مطالعه رفتار خمشی تورق در صفحه کامپوزیتی دایروی با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم

احمد حقانی[1]، مهدی مندعلی[2]

۱ استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد شهرکرد، دانشگاه آزاد اسلامی، شهرکرد، ایران

۲ استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران، mondali@srbiau.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۹/۰۱

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۱/۰۱

چکیده

سازه‌های کامپوزیتی به دلیل ویژگی‌های عالی نظیر انعطاف پذیری و نسبت استحکام به وزن بالا و همچنین اهمیتی که در صنایع دارند، همواره مورد توجه قرار گرفته‌اند. کیفیت کامپوزیت‌ها در اثر عیوبی که در آن‌ها حین تولید یا بارگذاری بوجود می‌آید، کاهش می‌یابد. عیب تورق که یکی از مهمترین و متداول‌ترین عیوب موجود در کامپوزیت‌ها می‌باشد، ممکن است تحت بارگذاری نظیر بارگذاری خمشی با رشد نیز همراه باشد که این خود باعث ایجاد شکست در کامپوزیت‌ها می‌شود. در این تحقیق رشد تورق یک صفحه‌ی کامپوزیتی دایره‌ای مورد بررسی قرار گرفت. هندسه‌ی تورق دایره‌ای شکل و بارگذاری از نوع خمشی فرض شد. معادلات غیرخطی حاکم ابتدا با در نظر گرفتن تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم بدست آمدند و سپس با استفاده از روش هموتوپی طیفی حل شدند. علاوه براین، اثرات شعاع و عمق تورق روی نرخ رهایش انرژی بررسی گردید و مشاهده شد که با افزایش شعاع تورق، نرخ رهایش انرژی تا شعاع تورق بحرانی ۰/۷ افزایش یافته و سپس کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش عمق تورق از ۰/۱۴ به ۰/۴۸ نرخ رهایش انرژی افزایش می‌یابد. نتایج این تحقیق مطابقت خوبی را با نتایج اجزای محدود و نتایج تحلیلی دیگر نشان داد.

واژگان کلیدی

صفحه‌ی کامپوزیتی دایروی، تورق دایره‌ای شکل، بارگذاری خمشی، تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم، روش حل هموتوپی طیفی.

۱. مقدمه

سازه‌های کامپوزیتی در صنایع نظامی، صنایع هوافضا، صنایع دریایی، صنایع حمل و نقل و بطور کلی صنایعی که در آن‌ها وزن بسیار مهم است، اهمیت و کاربردهای فراوانی دارند. با توجه به اینکه سازه‌های کامپوزیتی متشکل از صفحه‌های کامپوزیتی می‌باشد، همواره ممکن است صفحه‌های کامپوزیتی حین تولید با عیوبی همراه باشد. یکی از شایع‌ترین و مهمترین عیوبی که ممکن است در طی فرآیند تولید و یا بارگذاری رخ دهد، آسیب تورق می‌باشد. این آسیب همواره روی استحکام و کارآیی

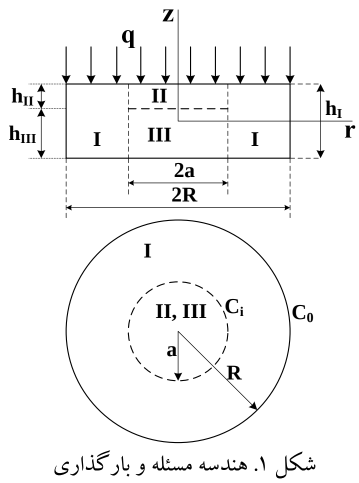
صفحه‌های کامپوزیتی اثرات جدی می‌گذارد، و آن‌ها را کاهش می‌دهد. بنابراین با توجه به اهمیت آسیب تورق، بررسی این آسیب در صفحه‌های کامپوزیتی مورد توجه قرار می‌گیرد. در سال‌های اخیر مطلعات زیادی بر روی تورق در صفحات کامپوزیتی صورت گرفته است. در این تحقیقات از انواع مختلف روش‌های آزمایشگاهی [۱-۳]، روش‌های عددی و اجزای محدود [۴، ۵]، استفاده شده است. همچنین مطالعاتی بر روی شکل‌های خاص از صفحات کامپوزیتی و تورق تحت بارگذاری‌های خمشی و کمانش [۶-۸] صورت گرفته است. نرخ رهایش انرژی یکی از مهمترین فاکتورها در محاسبه‌ی رشد تورق و ترک در کامپوزیت‌ها محسوب می‌شود. برخی از محققان از این رهیافت برای مطالعه‌ی رشد تورق در صفحات و تیرهای کامپوزیتی پرداختند [۹-۱۱].

تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول[1] یکی از تئوری‌های مربوط به صفحات است که در آن اثرات تغییرشکل‌های برشی عرضی ناشی از تنش‌های برشی عرضی را در میدان جابجایی لحاظ می‌کند. در این تئوری نیروهای برشی عرضی ثابت در نظر گرفته می‌شود و بنابراین به منظور برقراری موازنه میان انرژی کرنشی ناشی از تنش‌های برشی عرضی و انرژی کرنشی ناشی از تنش‌های برشی بدست آمده از تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی، بایستی یک ضریب تصحیح برشی[2] در نظر گرفته شود [۱۲]. این تئوری در برخی از تحقیقات به همراه روش‌های حساب تغییرات با مرز متحرک استفاده شده است تا رفتارهای خمشی و کمانشی صفحات کامپوزیتی دارای تورق را بررسی نماید [۱۳-۱۶]. تئوری صفحه‌ای تغییر شکل برشی مرتبه سوم[3] نیز توسط برخی از محققان به منظور بررسی رفتار کمانشی در صفحات کامپوزیتی دارای تورق بکار گرفته شد. این تئوری در مقایسه با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول دقت بهتری دارد و میدان تنش دقیق‌تری را ارائه می‌کند. همچنین در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم تنش‌های برشی عرضی درجه دوم می‌باشند و این باعث می‌شود که در این تئوری دیگر نیازی به ضریب تصحیح برشی نباشد. این تئوری شرط‌های مرزی آزاد از تنش[4] را در بالا و پایین صفحه‌ی کامپوزیتی خود به خود ارضا می‌کند [۱۲]. برخی از محققان از این تئوری در یافتن میدان کرنش و معادلات حاکم بر صفحات کامپوزیتی تحت بارگذاری حرارتی و کمانش استفاده نمودند و سپس معادلات حاکم به کمک تئوری لایه‌ای[5] [۱۷]، روش اجزای محدود و روش‌های عددی دیگر [۱۸، ۱۹] حل شدند.

تحقیقاتی که در بالا به آن اشاره گردید، تا به حال مطالعه روی صفحه‌ی کامپوزیتی دایروی با تورق دایره‌ای شکل را تحت بارگذاری خمشی و با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم انجام نداده‌اند. همچنین روش‌های عددی استفاده شده برای حل معادلات حاکم همواره زمان‌بر و با همگرایی کند همراه می‌باشند. روش‌های تحلیلی و نیمه تحلیلی روش‌هایی هستند که در مقایسه با روش‌های عددی معمول دقت بهتری دارند [۲۰-۲۳]. در این تحقیق در ادامه با استفاده از روش حساب تغییرات با مرز متحرک، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم و معیار شکست گریفیث، معادلات حاکم بر صفحه‌ی دایروی کامپوزیتی با تورق دایره‌ای شکل تحت بارگذاری عرضی بدست می‌آید. سپس این معادلات با استفاده از روش هموتوپی طیفی[6] که یکی از روش‌های نیمه تحلیلی با همگرایی سریع می‌باشد، حل می‌شوند و نرخ رهایش انرژی کرنشی ناشی از رشد تورق محاسبه می‌گردد. در نهایت اثرات اندازه و عمق تورق بر روی نرخ رهایش انرژی کرنشی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲. معادلات اساسی

همانطور که در شکل (۱) مشاهده می‌شود مسئله شامل یک صفحه‌ی کامپوزیتی دایره‌ای شکل به شعاع R می‌باشد که یک تورق دایره‌ای در مرکز صفحه قرار گرفته است. صفحه در مرز خارجی C0 بصورت گیردار ثابت شده است و تحت فشار q در سطح بالایی قرار دارد. با توجه به محل قرار گرفتن تورق، صفحه‌ی دایره‌ای به سه ناحیه‌ی کلی تقسیم می‌شود که Cj، (j=i,ii,iii) مرز هر ناحیه در محل تورق می‌باشد.



شکل ۱. هندسه مسئله و بارگذاری

از آنجا که تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم شرط مرزی سطح آزاد از تنش را در بالا و پایین صفحه ارضا می‌کند نیازی به ضریب تصحیح برشی نمی‌باشد [۱۲]، بنابراین با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم میدان جابجایی در مختصات استوانه‌ای برای یک صفحه‌ی دایره‌ای در حالت متقارن محوری طبق رابطه‌ی (۱) ارائه می‌شود [۱۲].

$$u(r.z) = u_0(r) + z\varphi(r) - \frac{4z^3}{3h^2}[\varphi(r) + w_{0.r}(r)] \qquad (۱)$$
$$w(r.z) = w_0(r)$$

در این رابطه u و w به ترتیب مؤلفه‌های جابجایی در راستای شعاعی و عرضی بوده و u_0 و w_0 به ترتیب مؤلفه‌های جابجایی در راستای شعاعی و عرضی برای صفحه میانی لمینیت می‌باشند. $\varphi(r)$ زاویه‌ی چرخش صفحه میانی حول محور r می‌باشد. روابط کرنش جابجایی برای صفحه‌ی میانی صفحه دایره‌ای کامپوزیتی با در نظر گرفتن تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم و میدان کرنش فون کارمن[۷] بصورت زیر محاسبه می‌شود [۱۲].

$$\{\varepsilon^{(0)}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr}^{(0)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} \\ \gamma_{r\theta}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{0.r} + \frac{1}{2}(w_{0.r})^2 \\ \frac{u_0}{r} \\ 0 \end{Bmatrix}$$
$$\{\varepsilon^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr}^{(1)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} \\ \gamma_{r\theta}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_{.r} \\ \frac{\varphi}{r} \\ 0 \end{Bmatrix}$$
$$\{\varepsilon^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr}^{(3)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(3)} \\ \gamma_{r\theta}^{(3)} \end{Bmatrix} = -c_1 \begin{Bmatrix} \varphi_{.r} + w_{0.rr} \\ \frac{\varphi}{r} + \frac{w_{0.r}}{r} \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (۲)$$
$$\{\gamma^{(0)}\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{\theta z}^{(0)} \\ \gamma_{rz}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \varphi + w_{0.r} \end{Bmatrix}$$
$$\{\gamma^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{\theta z}^{(2)} \\ \gamma_{rz}^{(2)} \end{Bmatrix} = -c_2 \begin{Bmatrix} 0 \\ \varphi + w_{0.r} \end{Bmatrix}$$

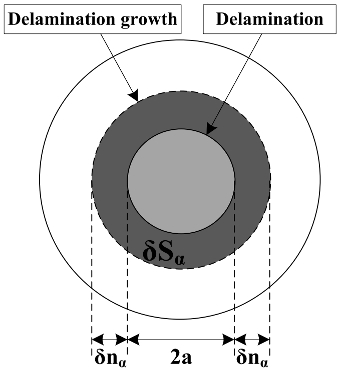
که $c_1 = 4/(3h^2)$ و $c_2 = 3c_1$ می‌باشد. با توجه به شکل (۱) انرژی پتانسیل کل برای سه ناحیه‌ی ایجاد شده از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=i}^{iii} \iint_{S_\alpha} \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon^{(0)\alpha} \\ \varepsilon^{(1)\alpha} \\ \varepsilon^{(3)\alpha} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^\alpha & B^\alpha & E^\alpha \\ B^\alpha & D^\alpha & F^\alpha \\ E^\alpha & F^\alpha & H^\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^{(0)\alpha} \\ \varepsilon^{(1)\alpha} \\ \varepsilon^{(3)\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma^{(0)\alpha} \\ \gamma^{(2)\alpha} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^{\alpha'} & D^{\alpha'} \\ D^{\alpha'} & F^{\alpha'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^{(0)\alpha} \\ \gamma^{(2)\alpha} \end{bmatrix} \right\} dS_\alpha - \sum_{\alpha=i}^{ii} \iint_{S_\alpha} q(r) w_0^\alpha dS_\alpha \qquad (۳)$$

که در این رابطه A، B و D به ترتیب ماتریس‌های سختی کششی، کوپلینگ و خمشی می‌باشند. همچنین ماتریس‌های E، F و H ماتریس‌های سختی مرتبه بالا هستند. ماتریس‌های مذکور طبق رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شوند [۲۴،۱۲].

$$\left(A_{ij}.B_{ij}.D_{ij}.E_{ij}.F_{ij}.H_{ij}\right) = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (1.z.z^2.z^3.z^4.z^6) dz.\ i.j = 1.2.6 \qquad (۴)$$
$$\left(A'_{ij}.D'_{ij}.F'_{ij}\right) = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (1.z^2.z^4) dz.\ \ i.j = 4.5$$

شکل (۲) صفحه‌ی دایروی با تورق دایره‌ای شکل به شعاع a را نشان می‌دهد که تحت بارگذاری فشاری، به اندازه‌ی $\delta n\alpha$ در جهت شعاعی رشد داده شده است.



شکل ۲. رشد تورق در جهت شعاعی

با توجه به شکل (۲) می‌توان دریافت که رشد تورق به اندازه‌ی $\delta n\alpha$ باعث ایجاد تغییر سطح $\delta S\alpha$ در هریک از سه ناحیه می‌شود. مطابق این شکل با توجه به اینکه مرز تورق به هنگام رشد، بطور پیوسته حرکت می‌کند، بنابراین با استفاده از روش حساب تغییرات با مرز متحرک می‌توان تغییرات مرتبه اول رابطه (۳) را محاسبه نمود [۲۵].

$$\delta\Pi = \sum_{\alpha=i}^{iii} \iint_{S_\alpha} \Big\{ N_r^\alpha \delta\left(u_{0.r}^\alpha + \frac{1}{2}(w_{0.r}^\alpha)^2\right) + N_\theta^\alpha \delta\left(\frac{u_0^\alpha}{r}\right) + M_r^\alpha \delta(\varphi_{.r}^\alpha) + M_\theta^\alpha \delta\left(\frac{\varphi^\alpha}{r}\right) - c_1^\alpha P_r^\alpha \delta(\varphi_{.r}^\alpha + w_{0.rr}^\alpha) - c_1^\alpha P_\theta^\alpha \delta\left(\frac{\varphi^\alpha}{r} + \frac{w_{0.r}^\alpha}{r}\right) + Q_r^\alpha \delta(\varphi^\alpha + w_{0.r}^\alpha) - c_2^\alpha R_r^\alpha \delta(\varphi^\alpha + w_{0.r}^\alpha) \Big\} dS_\alpha + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=i}^{iii} \oint_{C_\alpha} \Big\{ N_r^\alpha \left(u_{0.r}^\alpha + \frac{1}{2}(w_{0.r}^\alpha)^2\right) + N_\theta^\alpha \left(\frac{u_0^\alpha}{r}\right) + M_r^\alpha (\varphi_{.r}^\alpha) + M_\theta^\alpha \left(\frac{\varphi^\alpha}{r}\right) - c_1^\alpha P_r^\alpha (\varphi_{.r}^\alpha + w_{0.rr}^\alpha) - c_1^\alpha P_\theta^\alpha \left(\frac{\varphi^\alpha}{r} + \frac{w_{0.r}^\alpha}{r}\right) + \qquad (۵)$$

$$
\begin{aligned}
&Q_r^\alpha(\varphi^\alpha + w_{0.r}^\alpha) - \\
&c_2^\alpha R_r^\alpha(\varphi^\alpha + w_{0.r}^\alpha)\}\delta n_\alpha dC_\alpha - \\
&\textstyle\sum_{\alpha=i}^{ii} \iint_{S_\alpha} q(r)\delta w_0^\alpha \, dS_\alpha - \\
&\textstyle\sum_{\alpha=i}^{ii} \oint_{C_\alpha} q(r) w_0^\alpha \delta n_\alpha dC_\alpha
\end{aligned}
$$

در این رابطه فرض شده است که سه ناحیه‌ی موجود متقارن هستند و بنابراین ماتریس‌های B و E برابر صفر می‌شوند [۲۴]. همچنین در این رابطه M ،N و P به ترتیب نیرو، ممان و نیروی مرتبه‌ی بالا می‌باشند. علاوه بر این پارامترهای Q و R به ترتیب نیروی برشی عرضی و نیروی برشی عرضی مرتبه بالا هستند.

با توجه به این نکته که برای هر ناحیه جابجایی‌ها و چرخش‌ها در مرز تورق پیوسته می‌ماند، بنابراین تابع جابجایی عرضی، $w_0^\alpha(r)$، مشتق مرتبه اول تابع جابجایی عرضی، $w_{0,r}^\alpha(r)$ و تابع زاویه چرخش صفحه‌ی میانی، $\phi^\alpha(r)$، برای همه‌ی نواحی بایستی در مرز نوک تورق یعنی، $r = a$، پیوسته باشد. علاوه بر این، در طول ضخامت داخلی، h_{ii}، تابع جابجایی در راستای شعاعی بایستی پیوسته باشد یعنی $u^i(r,z) = u^{ii}(r,z)$ که تابع $u^\alpha(r,z)$ جابجایی در راستای شعاعی ناحیه α می‌باشد. بطور مشابه توابع جابجایی در راستای شعاعی بایستی در امتداد ضخامت داخلی h_{iii} نیز پیوسته باشد یعنی $u^i(r,z) = u^{iii}(r,z)$. در مرز خارجی صفحه تکیه گاه گیردار وجود دارد. شرایط مرزی حاکم بر صفحه دایروی با تورق دایره‌ای شکل در مرز خارجی عبارتند از:

$$
\begin{aligned}
&w_0^i(R) = 0 \\
&w_{0.r}^i(R) = 0 \\
&\varphi^i(R) = 0 \\
&u_0^i(R) = 0
\end{aligned}
\tag{۶}
$$

شرایط مرزی حاکم بر صفحه دایروی با تورق دایره‌ای شکل در مرز تورق عبارتند از:

$$
\begin{aligned}
&w_0^i(a) = w_0^{ii}(a) = w_0^{iii}(a) \\
&w_{0.r}^i(a) = w_{0.r}^{ii}(a) = w_{0.r}^{iii}(a) \\
&\varphi^i(a) = \varphi^{ii}(a) = \varphi^{iii}(a) \\
&u^i(a.z) = u^{ii}(a.z) \\
&u^i(a.z) = u^{iii}(a.z)
\end{aligned}
\tag{۷}
$$

شرایط مرزی حاکم بر صفحه دایروی با تورق دایره‌ای شکل در مرکز صفحه عبارتند از:

$$
\begin{aligned}
&w_{0.r}^{ii}(0) = w_{0.r}^{iii}(0) = 0 \\
&\varphi^{ii}(0) = \varphi^{iii}(0) = 0 \\
&u^{ii}(0) = u^{iii}(0) = 0
\end{aligned}
\tag{۸}
$$

با استفاده از رابطه (۵) و انتگرال‌گیری جز به جز و همچنین با توجه به متحرک بودن مرز تورق، معادلات تعادل غیرخطی حاکم بر صفحه دایره‌ای همراه با تورق دایره‌ای شکل برای هر یک از سه ناحیه طبق روابط زیر حاصل می‌شود [۱۶].

$$
\delta u_0^\alpha : -\frac{d}{dr}(rN_r^\alpha) + N_\theta^\alpha = 0 \tag{۹}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta w_0^\alpha : -\tfrac{d}{dr}(rN_r^\alpha w_{0.r}^\alpha) - c_1^\alpha \tfrac{d^2}{dr^2}(rP_r^\alpha) + \\
&c_1^\alpha \tfrac{dP_\theta^\alpha}{dr} - \quad \tfrac{d}{dr}(rQ_r^\alpha) + c_2^\alpha \tfrac{d}{dr}(rR_r^\alpha) = \\
&S_\alpha r q(r)
\end{aligned}
\tag{۱۰}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta\varphi^\alpha : -\frac{d}{dr}(rM_r^\alpha) + M_\theta^\alpha + c_1^\alpha \frac{d}{dr}(rP_r^\alpha) \\
&-c_1^\alpha P_\theta^\alpha + rQ_r^\alpha - c_2^\alpha r R_r^\alpha = 0
\end{aligned}
\tag{۱۱}
$$

که در رابطه‌ی (۷) ضریب Sα از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$
S_\alpha = \begin{cases} 1 & \alpha = i\text{،} ii \\ 0 & \alpha = iii \end{cases} \tag{۱۲}
$$

همچنین شرایط پیوستگی نیروها و ممان‌ها در مرز تورق بصورت زیر حاصل می‌گردد [۱۶].

$$
\delta u_r^i : N_r^i - N_r^{ii} - N_r^{iii} = 0 \tag{۱۳}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta w_0^i : N_r^i w_{0.r}^i + \frac{c_1^i}{r}\frac{d(rP_r^i)}{dr} - \frac{c_1^i}{r}P_\theta^i + Q_r^i - c_2^i R_r^i \\
&-\left(N_r^{ii} w_{0.r}^{ii} + \frac{c_1^{ii}}{r}\frac{d(rP_r^{ii})}{dr} - \frac{c_1^{ii}}{r}P_\theta^{ii} + Q_r^{ii} \right. \\
&\qquad\qquad \left. - c_2^{ii} R_r^{ii}\right) \\
&-\left(N_r^{iii} w_{0.r}^{iii} + \frac{c_1^{iii}}{r}\frac{d(rP_r^{iii})}{dr} - \frac{c_1^{iii}}{r}P_\theta^{iii} + Q_r^{iii} \right. \\
&\qquad\qquad \left. - c_2^{iii} R_r^{iii}\right) = 0
\end{aligned}
\tag{۱۴}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta\varphi^i : M_r^i - M_r^{ii} - M_r^{iii} - c_1^i P_r^i + c_1^{ii} P_r^{ii} \\
&+c_1^{iii} P_r^{iii} - (\alpha^{ii} N_r^{ii} + \alpha^{iii} N_r^{iii}) = 0
\end{aligned}
\tag{۱۵}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta w_{0.r}^i : -c_1^i P_r^i + c_1^{ii} P_r^{ii} + c_1^{iii} P_r^{iii} \\
&+(\beta^{ii} N_r^{ii} + \beta^{iii} N_r^{iii}) = 0
\end{aligned}
\tag{۱۶}
$$

رابطه زیر معرف تغییرات انرژی سیستم در اثر رشد تورق δn می‌باشد و به عبارت دیگر برابر است با مقدار انرژی صرف شده برای ایجاد رشد تورق به اندازه‌ی δn. بنابراین می‌توان نرخ رهایش انرژی را که طبق معیار گریفیث برابر است با مقدار انرژی آزاد شده برای ایجاد سطح اضافی مربوط به رشد تورق، بصورت زیر در نظر گرفت [۱۶].

$$
\begin{aligned}
&G_\alpha = N_r^\alpha\left(\tfrac{u_{0.r}^\alpha}{2} + \tfrac{3}{4}(w_{0.r}^\alpha)^2\right) - \tfrac{N_\theta^\alpha}{2}\left(\tfrac{u_0^\alpha}{r}\right) + \\
&\tfrac{M_r^\alpha}{2}(\varphi_{.r}^\alpha) - \tfrac{M_\theta^\alpha}{2}\left(\tfrac{\varphi^\alpha}{r}\right) - \tfrac{c_1^\alpha}{2}P_r^\alpha(\varphi_{.r}^\alpha + w_{0.rr}^\alpha) + \\
&\tfrac{c_1^\alpha}{2}P_\theta^\alpha\left(\tfrac{\varphi^\alpha}{r} - \tfrac{w_{0.r}^\alpha}{r}\right) - \tfrac{Q_r^\alpha}{2}(\varphi^\alpha - w_{0.r}^\alpha) + \\
&\tfrac{c_1^\alpha}{2}R_r^\alpha(\varphi^\alpha - w_{0.r}^\alpha) + \tfrac{c_1^\alpha}{r}\tfrac{d(rP_r^\alpha)}{dr} w_{0.r}^\alpha - \\
&S_\alpha q(r) w_0^\alpha
\end{aligned}
\tag{۱۷}
$$

مقدار نرخ رهایش انرژی برای کل صفحه‌ی دایروی با تورق دایره‌ای شکل طبق رابطه‌ی زیر ارائه می‌شود [۱۵].

$$G = G^i - G^{ii} - G^{iii}$$ (۱۸)

۳. روش حل هموتوپی طیفی

روش حل هموتوپی یکی از روش‌های تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیلی غیرخطی می‌باشد که دارای همگرایی سریع و دقت بالایی می‌باشد [۲۶، ۲۷]. با این حال برخی از محدودیت‌ها بر روی این روش وجود دارد که این محدودیت‌ها در روش هموتوپی طیفی بر طرف گردیده است و موجب شده که این روش انعطاف‌پذیرتر و با همگرایی سریعتر همراه باشد [۲۸، ۲۹]. در این تحقیق از روش هموتوپی طیفی برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیلی غیرخطی استفاده می‌شود. در این بخش اساس روش هموتوپی طیفی معرفی می‌گردد. در بیشتر حالات یک مسئله‌ی غیر خطی می‌تواند توسط مجموعه‌ای از معادلات حاکم و شرایط مرزی و اولیه توصیف شود. در حالت کلی معادله‌ی غیر خطی بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$N[p(r)] = 0$$ (۱۹)

که در این رابطه N اپراتور غیر خطی، $p(r)$ تابع مجهول و r متغیر مستقل می‌باشد. ترکیب هموتوپی معمولا بصورت زیر را ارائه می‌شود [۳۰].

$$\mathrm{H}[\phi(r;q); p_0(r). H(r). \hbar. q] = (1 - q)\{L[\phi(r;q) - p_0(r)]\} - q\hbar H(r) N[\phi(r;q)]$$ (۲۰)

که $p_0(r)$ یک تابع حدس اولیه از $p(r)$ است، $\hbar$ پارامتر کمکی غیرصفر، $H(r)$ تابع کمکی غیرصفر و L یک اپراتور خطی می‌باشد. پارامتر تعبیه‌ی[۸] q که از صفر به یک تغییر می‌کند باعث می‌شود که جواب از حدس اولیه به سمت جواب دقیق برود. وقتی سمت راست رابطه‌ی (۱۷) برابر صفر بشود معادله تغییر شکل مرتبه‌ی صفر[۹] بصورت زیر حاصل می‌شود.

$$(1 - q)\{L[\phi(r;q) - p_0(r)]\} = q\hbar H(r) N[\phi(r;q)]$$ (۲۱)

در رابطه‌ی (۱۸) وقتی مقدار q برابر صفر قرار داده شود، $\phi(r;0) = p_0(r)$ را نتیجه می‌دهد. همچنین وقتی مقدار q برابر یک قرار داده شود، با توجه به اینکه پارامتر کمکی $\hbar$ و تابع کمکی $H(r)$ غیر صفر هستند، $\phi(r;1) = p(r)$ حاصل می‌گردد. علاوه بر این، مشتقات تغییر شکل مرتبه‌ی m–ام تابع $p(r)$ به فرم زیر تعریف می‌شود [۳۰].

$$p_m(r) = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m \phi(r;q)}{\partial q^m}\bigg|_{q=0}$$ (۲۲)

با استفاده از قضیه تیلور بسط تابع $p(r)$ بصورت $p(r) \approx \sum_{k=0}^{m} p_k(r)$ می‌باشد و معادلات حاکم برای تابع $p_m(r)$ بصورت زیر است.

$$L[p_m(r)] = \chi_m L[p_{m-1}(r)] + \hbar H(r) R_m(\vec{p}_{m-1}(r). r)$$ (۲۳)

که در رابطه‌ی بالا χ_m و R_m به ترتیب طبق روابط (۲۱) و (۲۲) محاسبه می‌شوند.

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & m \le 1 \\ 1 & m > 1 \end{cases}$$ (۲۴)

$$R_m(\vec{p}_{m-1}(r). r) = \frac{1}{(m-1)!}\left\{\frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}} N\left[\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(r) q^n\right]\right\}\bigg|_{q=0}$$ (۲۵)

در روش هموتوپی تابع $p_m(r)$ از حل معادلات دیفرانسیلی خطی $L[p_m(r)]$ توسط نرم‌افزارهای محاسباتی امکان‌پذیر می‌باشد که در نهایت تابع تقریب $p(r)$ بدست می‌آید [۲۶].

در روش هموتوپی طیفی به منظور حل معادلات دیفرانسیلی خطی رابطه‌ی (۲۰)، روش حل عددی ایستگاهی متعامد[۱۰] بکار می‌رود [۲۹]. در این تحقیق از چند جمله‌ای متعامد لاگر[۱۱] [۳۱] برای حل معادلات استفاده می‌شود و از ریشه‌های چند جمله‌ای متعامد چبیشف[۱۲] به عنوان نقاط ایستگاهی استفاده می‌شود. برای این منظور تابع $p_k(r)$ که شرایط مرزی را ارضا می‌کند بصورت زیر فرض می‌شود.

$$p_k(r) = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i L_i(r)$$ (۲۶)

شرایط مرزی که تابع مذکور بایستی ارضا کند عبارتند از:

که $L_i(r)$ چند جمله‌ای متعامد مرتبه i–ام می‌باشد و λ_i ضرایب مجهولی هستند که بعدا تعیین می‌گردند.

برای حل معادلات رابطه (۲۰) از روش عددی ایستگاهی متعامد استفاده می‌شود که این معادله به فرم زیر تبدیل می‌شود [۲۹].

$$L[p_m(r_j)] = \chi_m L[p_{m-1}(r_j)] + \hbar H(r_j) R_m\left(\vec{p}_{m-1}(r_j)\right). \quad j = 0.1.\cdots.M$$ (۲۷)

که r_j ریشه‌های چند جمله‌ای چبیشف می‌باشد.

برای تعیین ضرایب λ_i دستگاه معادلات بدست آمده از رابطه (۲۴) بایستی حل شود.

۴. شبیه‌سازی اجزای محدود

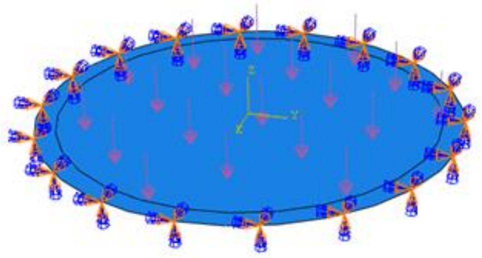
در این تحقیق، به منظور یافتن جابجایی عرضی ناحیه‌ی ii در مرکز صفحه‌ی دایره‌ای شکل با تورق دایره‌ای، صفحه به کمک نرم افزار اجزای محدود آباکوس شبیه سازی می‌شود. شرط مرزی لبه‌ی صفحه از نوع گیردار و بارگذاری فشاری بر روی صفحه و فقط ناحیه‌ی ii اعمال می‌شود.

خاصیت موادی که در این شبیه‌سازی و در ادامه استفاده می‌شود در جدول (۱) آورده شده است.

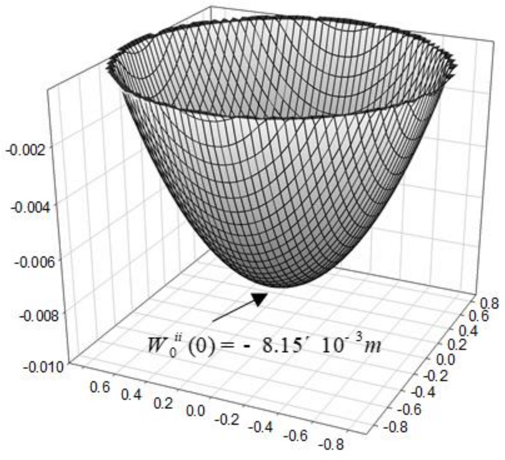
جدول ۱. خواص الاستیک مواد [۱۳]

نوع ماده	E1 (GPa)	E2 (GPa)	G12 (GPa)	v12
همسانگرد	۱۳۷/۹	۱۳۷/۹	---	۰/۳
اورتوتروپیک	۱۳۷/۹	۵۸/۶	۵/۸۶	۰/۲۱

در این شبیه سازی تعداد ۱۹۷۰۰ المان shell سه بعدی با نام S4R استفاده شد. شکل (۳) شماتیک این شبیه‌سازی را نمایش می‌دهد و شکل (۴) نمودار جابجایی ناحیه ii را برای بارگذاری $q_0 = 57KPa$ نشان می‌دهد.



شکل ۳. شماتیک صفحه شبیه‌سازی شده در نرم افزار آباکوس



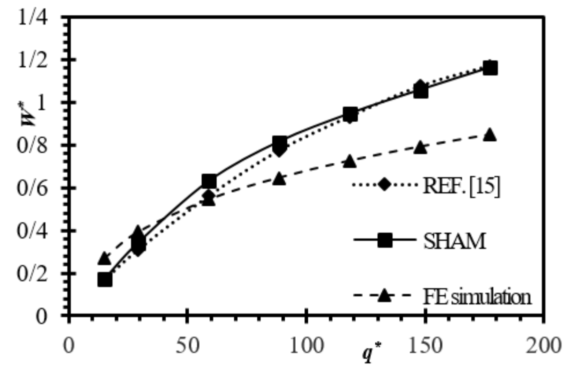
شکل ۴. جابجایی عرضی صفحه دایروی با تورق دایره‌ی شکل تحت بارگذاری فشاری

ماده استفاده شده در این شبیه‌سازی همسانگرد و خواص آن طبق جدول (۱) آورده شده است.

۵. نتایج و بحث

در این تحقیق معادلات غیرخطی حاکم با استفاده از روش هموتوپی طیفی حل شدند و به منظور صحت سنجی با نتایج منابع دیگر مقایسه گردید.

چن[۱۳] و همکارانش [۱۵] یک صفحه‌ی دایروی با تورق دایره‌ای شکل را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول مطالعه نمودند. به کمک روش حساب تغییرات با مرز متحرک معادلات حاکم بر صفحه استخراج و با استفاده از روش ایستگاهی متعامد حل شدند. به منظور صحت سنجی روش حل با نتایج چن و همکارانش [۱۵]، ابتدا ماده همسانگرد انتخاب می‌شود و فقط ناحیه‌ی ii تحت بارگذاری فشاری قرار می‌گیرد. ضخامت هر لایه ۲/۵ میلیمتر می‌باشد. همچنین تعداد لایه‌های نواحی i، ii و iii به ترتیب ۴۱، ۶ و ۳۵ لایه است. شعاع ناحیه تورق، a، برابر ۰/۹ متر و شعاع صفحه دایره‌ای، R، برابر ۱ متر در نظر گرفته می‌شود. شکل (۵) تغییرات جابجایی عرضی مرکز ناحیه‌ی ii را برحسب تغییرات بارگذاری فشاری نشان می‌دهد. در این شکل، $q^* = a^4 q_0/(D_{11}^{ii} h_{ii})$ فشار بدون بعد و $W^* = w_0^{ii}(0)/h_{ii}$ جابجایی عرضی بدون بعد مرکز ناحیه‌ی ii می‌باشد.



شکل ۵. نمودار جابجایی عرضی مرکز ناحیه ii صفحه‌ی دایروی برحسب بارگذاری فشاری.

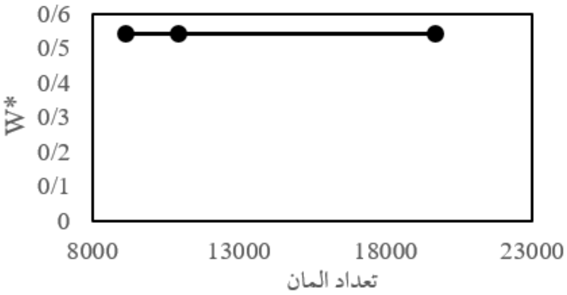
همانطور که از شکل (۵) می‌توان فهمید، نتایج حاصل از حل روش هموتوپی طیفی و شبیه‌سازی اجزای محدود مطابقت خوبی با نتایج چن و همکارانش [۱۵] دارد. جدول زیر درصد اختلاف را بین روش‌های هموتوپی طیفی و اجزای محدود را با مرجع [۱۵]

نشان می‌دهد. همانطور که از جدول (۲) مشخص است بین دو روش هموتوپی طیفی و مرجع [۱۵] بیشترین اختلاف در بارگذاری $q^* = 60$ می‌باشد. همچنین بین دو روش اجزای محدود و مرجع [۱۵] بیشترین اختلاف در بارگذاری $q^* = 180$ دیده می‌شود.

شکل (۶) نمودار همگرایی نسبت به شبکه را برای جابجایی W^* صفحه دایروی همراه با تورق دایره‌ای شکل تحت بارگذاری $q^* = 60$ و ماده همسانگرد که خواص آن طبق جدول (۱) ارائه شده است، نشان می‌دهد. همانطور که در شکل مشخص است مسئله نسبت به شبکه مستقل می‌باشد.

جدول ۲. درصد اختلاف بین روش‌های حل

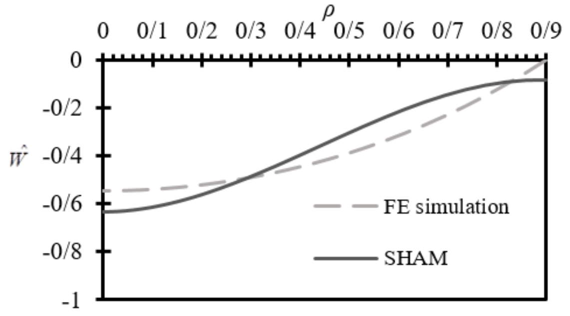
		W*			q*
%Δ	FEM	%Δ	SHAM	Ref[15]	
۳۸/۰۶۸۴	۰/۲۶۹۳	۳/۳۵۷۵	۰/۱۷۲۶	۰/۱۶۶۸	۱۵
۲۱/۰۸۲۹	۰/۳۹۲۵	۹/۷۵۵۴	۰/۳۴۳۳	۰/۳۰۹۸	۳۰
۳/۰۷۹۷	۰/۵۴۴۵	۱۱/۰۰۱۸	۰/۶۳۰۷	۰/۵۶۱۳	۶۰
۱۹/۸۵۰۶	۰/۶۴۵۱	۴/۹۸۳۳	۰/۸۱۳۷	۰/۷۷۳۱	۹۰
۲۸/۶۰۷۵	۰/۷۲۴۷	۱/۳۷۸۰	۰/۹۴۵۰	۰/۹۳۲۰	۱۲۰
۳۵/۹۵۴۸	۰/۷۹۰۷	۱/۸۰۶۹	۱/۰۵۵۹	۱/۰۷۵۰	۱۵۰
۳۸/۱۱۱۵	۰/۸۴۷۳	۰/۸۴۲۰	۱/۱۶۰۵	۱/۱۷۰۳	۱۸۰



شکل ۶. نمودار همگرایی شبکه

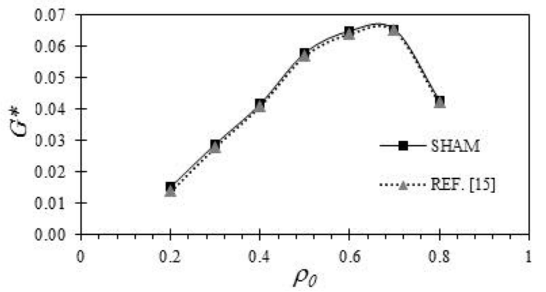
به منظور تعیین پارامتر کمکی $\hbar$ در روش هموتوپی طیفی، معمولا نمودار منحنی $\hbar$ بایستی برای یک کمیت فیزیکی رسم شود [۳۰]. در این تحقیق نمودار تغییرات مقدار جابجایی عرضی بدون بعد مرکز ناحیه‌ی ii بر حسب پارامتر کمکی $\hbar$ رسم شد که مقدار $\hbar$ بایستی با توجه به قسمت افقی نمودار انتخاب شود که در این مورد برای ۵ جمله هموتوپی $\hbar = -0.28$ انتخاب می‌گردد. این در صورتی است که در مرجع [۱۵] بالغ بر ۲۰ ریشه متعامد برای همگرایی در نظر گرفته شده است. همچنین تابع کمکی $H(r)$ بصورت $H(r) = H_a r^3 tanh(\hat{q})$ انتخاب می‌شود که $\hat{q} = 20\pi q_0/10^6$ است و H_a تعدادی ضریب می‌باشد که بصورت عددی تعیین می‌شوند.

شکل (۷) تغییرات جابجایی عرضی بدون بعد ناحیه‌ی ii، $\widehat{W} = w_0^{ii}(r)/h_{ii}$، را نسبت به شعاع بدون بعد، $\rho = r/R$، برای بارگذاری فشاری بدون بعد $q^* = 60$ نشان می‌دهد. همانطور که از شکل (۶) مشخص است نتایج حاصل از روش حل هموتوپی طیفی و شبیه‌سازی اجزای محدود در تطابق خوبی نسبت به یکدیگر قرار دارند و بیشترین جابجایی عرضی در $\rho = 0$ اتفاق می‌افتد.



شکل ۷. نمودار جابجایی عرضی ناحیه ii بر حسب شعاع ناحیه تحت بارگذاری فشاری.

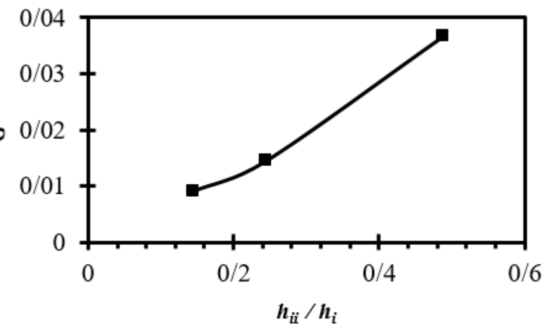
پارامتر نرخ رهایش انرژی یکی از مهمترین و تاثیرگذارترین پارامترها در رشد تورق در کامپوزیت‌ها محسوب می‌شود [۳۲]. بنابراین، در این تحقیق اثرات شعاع تورق و عمق قرار گرفتن آن بر روی پارامتر نرخ رهایش انرژی مورد بررسی قرار می‌گیرد. نمودار تغییرات نرخ رهایش انرژی بدون بعد $G^* = GR^4/\left(D_{11}^i h_i^2\right)$ بر حسب شعاع تورق بدون بعد $\rho_0 = a/R$ در شکل (۸) نشان داده شده است. در این نمودار ماده اورتوتروپیک در نظر گرفته شده است که خواص آن در جدول (۱) آورده شده است. همچنین بار فشاری بدون بعد $\breve{q} = q_0 R^4/\left(D_{11}^i h_i\right)$، برابر ۹ و عمق تورق برابر $h_{ii}/h_i = 10/41$ در نظر گرفته شد.



شکل ۸ نمودار تغییرات نرخ رهایش انرژی کرنشی بر حسب شعاع تورق

همانطور که از نمودار مشخص است نرخ رهایش انرژی بر حسب شعاع ناحیه‌ی تورق بطور پیوسته تغییر می‌کند و تا شعاع تورق بدون بعد ۰/۷ افزایش می‌یابد و پس از این شعاع نرخ رهایش انرژی کاهش می‌یابد که نشان می‌دهد رشد تورق پایدار می‌شود. بنابراین شعاع تورق بدون بعد بحرانی برای این حالت بارگذاری برابر ۰/۷ می‌باشد. همانطور که از نمودار مشخص است مطابقت خوبی بین نتایج حل هموتوپی طیفی و نتایج تحقیق چن و همکارانش [۱۵] وجود دارد.

شکل (۹) تغییرات نرخ رهایش انرژی بدون بعد G^* را بر حسب عمق ناحیه تورق نشان می‌دهد. این نمودار برای بارگذاری بدون بعد $\breve{q} = 4.5$ و شعاع تورق بی بعد $\rho_0 = 0.6$ رسم شده است. در این نمودار ماده‌ی مورد استفاده ماده اورتوتروپیک است که خواص آن در جدول (۱) آورده شده است.



شکل ۹. نمودار تغییرات نرخ رهایش انرژی بر حسب عمق تورق.

همانطور که از شکل مشخص است با افزایش عمق تورق نرخ رهایش انرژی نیز افزایش می‌یابد که این بدان معنی است که امکان رشد تورق نیز با افزایش عمق تورق تا سطح میانی صفحه دایره‌ای افزایش می‌یابد.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا معادلات غیرخطی حاکم بر ورق دایره‌ای شکل با تورق دایروی تحت بارگذاری عرضی به روش حساب تغییرات با مرز متحرک استخراج گردید. در این معادلات از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم استفاده شد. معادلات حاکم به روش هموتوپی طیفی حل شدند. نمودار تغییرات جابجایی ناحیه دوم صفحه‌ی دایره‌ای در مرکز آن بر حسب بارگذاری عرضی رسم شد و با نتایج موجود در منابع دیگر مقایسه شد که نتایج مطابقت خوبی را نشان داد. همچنین نمودار جابجایی عرضی ناحیه دوم بر حسب شعاع برای یک بارگذاری عرضی مشخص، با استفاده از دو روش هموتوپی طیفی و شبیه‌سازی اجزای محدود رسم گردید که همانطور که نتایج نشان داد مقادیر مطابقت خوبی را با یکدیگر نشان می‌دهند.

مطالعه‌ی رشد تورق در یک صفحه کامپوزیتی دایروی با تورق دایره‌ای شکل تحت بارگذاری خمشی نتایج زیر را به همراه داشت:

- در این مقاله از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم استفاده شد که با این کار دیگر نیازی به استفاده از ضریب تقریبی تصحیح برشی نمی‌باشد. همچنین شرط سطح آزاد تنش با استفاده از این تئوری خود به خود ارضا می‌شود و دیگر نگرانی از این بابت متوجه نتایج مقاله نمی‌باشد.
- روش استفاده شده در مرجع [۱۵] روش ایستگاهی متعامد است که این روش همگرایی بسیار کندی دارد و به شدت وابسته به تعداد ریشه‌های چند جمله‌ای متعامد است در صورتیکه روش حل هموتوپی طیفی همگرایی سریعی دارد.
- همانطور که در مرجع [۱۵] اشاره شده است به علت غیر خطی بودن شدید برخی ترم‌ها با اعلام اینکه این ترم‌ها در پاسخ نرخ رهایش انرژی کرنشی تاثیر کمی دارد از این ترم‌ها صرف نظر شده است که در روش استفاده شده در این مقاله از هیچ ترمی صرف نظر نشده است بنابراین جواب‌های روش استفاده شده در این مقاله قابل اعتمادتر می‌باشد.
- در مرجع [۱۵] علی‌رغم استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول از ضریب تصحیح برشی استفاده نشده است و این نکته که در محاسبه نرخ رهایش انرژی کرنشی نیز تاثیرگذار است جواب‌های این مرجع را با چالش مواجه می‌کند که این مشکل در روش استفاده شده در این مقاله دیده نمی‌شود.
- بیشترین جابجایی ناحیه ii که از دو روش اجزای محدود و روش هموتوپی طیفی بدست آمده‌اند در شعاع بدون بعد $\rho = 0$ اتفاق می‌افتد.
- اختلاف بین جابجایی ناحیه ii بدست آمده از روش اجزای محدود با روش استفاده شده در مرجع [۱۵] بیشتر از اختلاف بین جابجایی بدست آمده از روش هموتوپی طیفی با روش استفاده شده در مرجع [۱۵] است که علت این است که تئوری که در نرم افزار اجزای محدود استفاده می‌شود پارامترهای تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول و سوم را

استفاده نمی‌کند و همچنین مسئله را با گسسته‌سازی حل می‌کند.

- اختلاف جابجایی ناحیه ii بدست آمده از سه روش در بارگذاری‌های بدون بعد کوچکتر کمتر است.
- نرخ رهایش انرژی برای یک بار عرضی مشخص بطور پیوسته افزایش می‌یابد تا یک شعاع بحرانی و سپس کاهش می‌یابد. برای مسئله‌ی حل شده در این تحقیق شعاع بحرانی بدون بعد حدوداً ۰/۷ بدست آمد.
- با افزایش نرخ رهایش انرژی که ناشی از افزایش شعاع ناحیه‌ی تورق تا قبل از شعاع بحرانی بدون بعد ۰/۷ می‌باشد در حقیقت امکان رشد تورق افزایش می‌یابد.
- بعد از شعاع بحرانی بدون بعد ۰/۷ ، رشد تورق پایدار می‌شود زیرا نرخ رهایش انرژی کرنشی با افزایش شعاع ناحیه‌ی تورق کاهش می‌یابد.
- نرخ رهایش انرژی و بنابراین امکان رشد تورق با افزایش عمق تورق بدون بعد از ۰/۱۴ تا ۰/۴۸، بطور یکنواخت افزایش می‌یابد.

۷. علائم و اختصارات

R	شعاع صفحه‌ی دایره‌ای (m)
a	شعاع ناحیه‌ی تورق (m)
q	بارگذاری فشاری (Pa)
G	نرخ رهایش انرژی (m.Pa)
W*	جابجایی عرضی بدون بعد مرکز ناحیه‌ی ii
q*	بارگذاری فشاری بدون بعد اعمال شده بر ناحیه‌ی ii
G*	نرخ رهایش انرژی بدون بعد
hi	ضخامت صفحه‌ی دایره‌ای (m)
hii	ضخامت ناحیه‌ی ii (m)
hiii	ضخامت ناحیه‌ی iii (m)
$\hat{W}$	جابجایی عرضی بدون بعد ناحیه‌ی ii
$\breve{q}$	بارگذاری فشاری بدون بعد اعمال شده به کل صفحه‌ی دایره‌ای
ε	کرنش محوری
γ	کرنش برشی
τ	تنش برشی (Pa)
σ	تنش نرمال (Pa)
ρ	شعاع بدون بعد صفحه‌ی دایره‌ای
0ρ	شعاع بدون بعد ناحیه‌ی تورق
π	انرژی پتانسیل کرنشی کل صفحه (J)

۸. مآخذ

[1] B. D. Davidson, F. O. Sediles, Mixed-Mode I–II–III Delamination Toughness Determination Via a Shear–Torsion-Bending Test, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 42, No. 6, pp. 589-603, 2011.

[2] A. A. Mekonnen, K. Woo, M. Kang, I-G. Kim, Effects of size and location of initial delamination on post-buckling and delamination propagation behavior of laminated composites, *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 21, No. 1, pp. 80-94, 2020.

[3] M. Ma, W. Yao, P. Li, Critical Energy Release Rate for Interface Delamination of Asymmetrical Specimen, *Composite Structures*, (Accepted), 2020.

[4] N. Saeedi, K. Sab, J.-F. Caron, Cylindrical Bending of Multilayered Plates with Multi-Delamination Via a Layerwise Stress Approach, *Composite Structures*, Vol. 95, No. 4, pp. 728-739, 2013.

[5] F. Aylikci, S. D. Akbarov, N. Yahnioglu, 3d Fem Analysis of Buckling Delamination of a Piezoelectric Sandwich Rectangular Plate with Interface Edge Cracks, *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 55, No. 6, pp. 797-810, 2020.

[6] N. Hebbar, I. Hebbar, O. Djamel, M. Bourada, Numerical Modeling of Bending, Buckling, and Vibration of Functionally Graded Beams by Using a Higher-Order Shear Deformation Theory, *Frattura ed Integrità Strutturale*, Vol. 14, No. 52, pp. 230-46, 2020.

[7] H. Daghigh, V. Daghigh, A. Milani, D. Tannant, T. Lacy, J. N. Reddy, Nonlocal Bending and Buckling of Agglomerated Cnt-Reinforced Composite Nanoplates, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 183, No. 1, pp.107716, 2020.

[8] Sayyad, S. Atteshamuddin, M. Yuwaraj Ghugal, Bending, buckling and free vibration analysis of size-dependent nanoscale FG beams using refined models and Eringen’s nonlocal theory, *International Journal of Applied Mechanics*, Vol. 12, No. 1,pp. 2050007, 2020.

[9] Ma, Mingze, Weixing, Yao, Piao, Li, Critical Energy Release Rate for Interface Delamination of Asymmetrical Specimen." *Composite Structures*, (Accepted), 2020.

[10] Y. Li, Y. Fu, Y. Mao, Analysis of Delamination Fatigue Growth for Delaminated Piezoelectric Elasto-Plastic Laminated Beams under Hygrothermal Conditions, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 2, pp. 889-901, 2011.

[11] T. Q. Lu, W. X. Zhang, T. Wang, The Surface Effect on the Strain Energy Release Rate of Buckling Delamination in Thin Film–Substrate Systems, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 49, No. 9, pp. 967-975, 2011.

[12] J. N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*, pp. 359-399, CRC press, 2006.

[13] D. Chen, L. Dai, Delamination Growth of Laminated Circular Plates under in-Plane Loads and Movable Boundary Conditions, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 18, No. 11, pp. 3238-3249, 2013.

[14] D. Chen, C. Chen, Y. Fu, The Postbuckling Analysis of Laminated Circular Plate with Elliptic Delamination, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 16, No. 1, pp. 537-549, 2011.

[15] D. Chen, C. Chen, Y. Fu, L. Dai, Growth of Delamination for Laminates Circular Plates Subjected to Transverse Loads, *International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, New York, USA, 2009.

[16] A. Haghani, M. Mondali, S. A. Faghidian, Linear and Nonlinear Flexural Analysis of Higher-Order Shear Deformation Laminated Plates with Circular Delamination, *Acta Mechanica*, Vol. 229, No. 4, pp 1631–1648, 2018.

[17] N. Kharghani, C. G. Soares, Influence of Different Parameters on the Deflection of Composite Laminates Containing through-the-Width Delamination Using Layerwise Hsdt, *Composite Structures*, Vol. 15, No. 4, pp. 1080-1091, 2015.

[18] S. Nikrad, H. Asadi, A. Akbarzadeh, Z. Chen, On Thermal Instability of Delaminated Composite Plates, *Composite Structures*, Vol. 132, No. 4, pp. 1149-1159, 2015.

[19] E. Cheshmeh, M. Karbon, A. Eyvazian, D. Jung, M. Habibi M. Safarpour, Buckling and vibration analysis of FG-CNTRC plate subjected to thermo-mechanical load based on higher order shear deformation theory. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, pp. 1-24, 2020.

[20] M. Ertz, K. Knothe, A Comparison of Analytical and Numerical Methods for the Calculation of Temperatures in Wheel/Rail Contact, *Wear*, Vol. 253, No. 3–4, pp. 498-508, 2002.

[21] Z. Z. Ganji, D. D. Ganji, M. Esmaeilpour, Study on Nonlinear Jeffery–Hamel Flow by He's Semi-Analytical Methods and Comparison with Numerical Results, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 58, No. 11–12, pp. 2107-2116, 2009.

[22] Y. Yang, J. Wang, X. Wang, Y. Dai, A General Method to Predict Unbalance Responses of Geared Rotor Systems, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 381, No. 4, pp. 246-263, 2016.

[23] E. J. Barbero, F. Vetere, A. Madeo, R. Zinno, Analytic Integration of Singular Kernels for Boundary Element Analysis of Plane Orthotropic Media, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 108, No. 4, pp. 393-412, 2017.

[24] J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, pp. 671-721, CRC press, 2004.

[25] L. D. Elsgolc, *Calculus of Variations*, pp. 64-79, Courier Corporation, 2012.

[26] S. Liao, Notes on the Homotopy Analysis Method: Some Definitions and Theorems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 14, No. 4, pp. 983-997, 2009.

[27] M. Kargarnovin, S. Faghidian, Y. Farjami, G. Farrahi, Application of Homotopy-Padé Technique in Limit Analysis of Circular Plates under Arbitrary Rotational Symmetric Loading Using Von-Mises Yield Criterion, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 15, No. 4, pp. 1080-1091, 2010.

[28] S. Liao, *Advances in the Homotopy Analysis Method*, pp.1-85, World Scientific, 2013.

[29] S. Motsa, P. Sibanda, F. Awad, S. Shateyi, A New Spectral-Homotopy Analysis Method for the Mhd Jeffery–Hamel Problem, *Computers & Fluids*, Vol. 39, No. 7, pp. 1219-1225, 2010.

[30] S. Liao, *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method*, pp. 2-88, CRC press, 2003.

[31] C.-H. Lin, Design of a Composite Recurrent Laguerre Orthogonal Polynomial Neural Network Control System with Ameliorated Particle Swarm Optimization for a Continuously Variable Transmission System, *Control Engineering Practice*, Vol. 49, No. 4, pp. 42-59, 2016.

[32] C. T. Sun, Z. H. Jin, *Fracture Mechanics*, pp. 11-55, Academic Press, Boston, 2012.

پی‌نوشت

1. First order Shear Deformation Theory (FSDT)
2. Shear correction factor
3. Third order Shear Deformation Theory (TSDT)
4. Stress-free boundary condition
5. Layer-wise theory
6. Spectral Homotopy Analysis Method (SHAM)
7. von Karman strain field

8. Embedded parameter
9. Zero-order deformation equation
10. Orthogonal collocation method
11. Laguerre orthogonal polynomial
12. Chebyshev orthogonal polynomial
13. Chen