

# به کارگیری نگاشت پوانکاره در شناسایی مدارهای لیپانوفی مسئله سه جسم محدودشده در حضور اغتشاش پخیدگی سیارات اصلی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۱/۱۹

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۴/۰۶

احسان عباسعلی<sup>۱</sup>، امیررضا کوساری<sup>۲</sup>، مجید بختیاری<sup>۳</sup>

۱- دانشجوی دکتری، دانشکده علوم و فنون نوین، دانشگاه تهران، تهران

۲- دانشیار، دانشکده علوم و فنون نوین، دانشگاه تهران، تهران kosari\_a@ut.ac.ir

۳- استادیار، دانشکده فناوری‌های نوین، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

## چکیده

در این مقاله، شناسایی شرایط اولیه مدارهای متناوب لیپانوفی در مسئله سه جسم محدود شده دایروی در حضور اغتشاشات پخیدگی هر دو جسم اصلی، با استفاده از نگاشت پوانکاره انجام خواهد شد. بدین منظور ابتدا معادله‌های حاکم بر حرکت مداری ماهواره در حضور اغتشاشات پخیدگی با استفاده از مکانیک لاگرانژی استخراج می‌شود. با توجه به عدم وجود هرگونه حل حلقه- بسته برای معادله‌های استخراج شده، باید از روش‌های حل عددی استفاده شود. بنابراین وابسته به شرایط اولیه پارامترهای حالت، مسئله می‌تواند پاسخ‌های متناوب و غیر-متناوب داشته باشد. شرایط اولیه مناسب به منظور یافتن پاسخ‌های متناوب در مطالعات قبل توسط یک حل تخمینی از معادله‌های حرکت مسئله سه جسم محدودشده با روش مانده و استفاده از یک الگوریتم اصلاح مداری به دست می‌آید که نیازمند محاسباتی پیچیده بود. به همین علت، در این مقاله استفاده از نگاشت پوانکاره به منظور یافتن شرایط اولیه مناسب مدارهای لیپانوفی پیشنهاد می‌شود. استفاده از این روش مزیت کم کردن ابعاد سیستم، به ابعاد مورد مطالعه تحقیق و عدم نیاز به استفاده از محاسبات پیچیده ریاضی را به همراه دارد. مرکز و مرزهای جزایر تشکیل شده در این نگاشت به عنوان حدس‌های اولیه مناسب به منظور ملاقات پاسخ‌های متناوب قلمداد می‌شود. برای صلاحیت‌سنجی روش گفته شده، در نهایت مدارهای لیپانوفی با استفاده از حدس‌های اولیه استخراج شده از نگاشت پوانکاره رسم خواهد شد که گویای اعتبار روش گفته شده خواهد بود. همچنین به منظور نشان دادن تأثیر اغتشاشات، مقایسه‌ای میان شرایط اولیه مدارهای لیپانوفی در مدل دارای اغتشاش و ساده، انجام خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: نگاشت پوانکاره، اغتشاش پخیدگی، مسئله سه جسم، مدارهای متناوب لیپانوفی

## Employing the Poincaré mapping method to identify the periodic Lyapunov orbits in the restricted three-body problem considering primaries' oblateness

Ehsan Abbasali<sup>1</sup>, Amirreza Kosari<sup>2</sup>, Majid Bakhtiari<sup>3</sup>

1- Ph.D. student, Faculty of New and Technologies (FNST), University of Tehran, Tehran

2- Associate Professor, Faculty of New and Technologies (FNST), University of Tehran, Tehran

3- Assistant Professor, School of Advanced Technologies, Iran University of Science and Technology, Tehran

### Abstract

The study was done to identify periodic Lyapunov orbits in the presence of the primaries oblateness applying Poincaré map at the restricted three-body. Governing equations of the PRTBP orbital motion were derived using principles of the Lagrangian mechanics. Since the governing equations have no closed-form solution, so the numerical method must be applied. So the problem can have different periodic or non-periodic responses to the initial conditions. The proper initial conditions were obtained from combining the third-order approximation of the Unperturbed Restricted Three-Body Problem and the orbital correction algorithm in previous researches. This method required complex and time-consuming mathematical calculations. Therefore, in this paper, the suitable initial conditions of periodic Lyapunov orbit are suggested to identify with the Poincaré map. Poincaré maps are a valuable tool for capturing the dynamical structures of a system, such as periodic solutions via a discrete and lower-dimensional representation of the dynamical flow. The center and boundaries of the islands created in this map are considered as suitable initial conditions to meet the periodic responses. To validate the proposed method, the perturbed Lyapunov orbits family is plotted. Also, in order to illustrate the effect of perturbations, the initial conditions of the perturbed and unperturbed models are compared due to the same initial guess vectors.

**Keywords:** Poincaré map, Oblate primaries, Lyapunov orbits, Three-body problem

۱۱۷

سال ۱۰- شماره ۲

پاییز و زمستان ۱۴۰۰

نشریه علمی دانش و

فناوری هوا فضا



## ۱. مقدمه

امروزه ساختارهای پویای چندجسمی مطالعات ارزشمندی را با هدف شبیه‌سازی هرچه دقیق‌تر از محیط مورد مطالعه حرکت فضاپیماها و ماهواره‌ها به خود اختصاص داده است زیرا در نظر گیری این سیستم‌ها در درک طبیعی حرکت وسایل نقلیه فضایی بسیار مفید است. به‌عنوان نمونه می‌توان از مأموریت‌هایی مانند رصدهای نجومی<sup>1-3</sup>، آماده‌سازی زیستگاه‌های انسانی در فضا، ارتقای دقت نشانه‌روی تلسکوپ‌های فضایی و اتصال به ایستگاه فضایی نام برد. تخمین مناسبی از ساختارهای پویای چندجسمی به مسئله سه جسم محدود شده دایروی اطلاق می‌شود که در آن فضاپیمایی دلخواه در میدان پتانسیل جاذبی دو سیاره شناور بوده و چون جرم فضاپیما نسبت به جرم سیارات قابل چشم‌پوشی است، حرکت سیارات اصلی از فضاپیما تأثیر نمی‌پذیرد.<sup>4</sup> تاکنون مطالعات ارزشمندی درباره مسئله سه جسم محدود شده دایروی صورت گرفته است. کانیتسین پایداری ماهواره در پیرامون نقاط تعادلی این مسئله را مورد مطالعه قرار داد.<sup>5</sup> لگا در مطالعات خود به بررسی منیفیلدهای انرژی در مسئله سه جسم محدود شده دایروی پرداخت.<sup>6</sup> بختیاری مسئله آرایش پرواز دسته‌جمعی ماهواره‌ها را در مسئله سه جسم محدود شده بیضوی مورد بررسی قرار داد.<sup>7</sup> از آنجاکه معادله‌های حرکت ماهواره در مسئله سه جسم محدود شده دایروی دارای هیچ حل حلقه-بسته‌ای نیست<sup>4</sup> استفاده از روش‌های حل عددی در این گونه مسئله اجتناب‌ناپذیر است. در روش‌های حل عددی مسئله وابسته به شرایط اولیه پارامترهای حالت می‌تواند بی‌شمار جواب متفاوت داشته باشد. به همین دلیل می‌توان تعداد بی‌شماری مدار در این مسئله پیدا نمود. مدارهایی با

ساختارهای تناوبی و شبه-تناوبی می‌توانند کاربردهای فراوانی از جمله حفظ ماهواره در مسیری مشخص و نیز تداوم در مخابره داده‌ها داشته باشند. یک دسته بسیار شناخته شده از مدارهای متناوب در مسئله سه جسم محدود شده دایروی با نام مدارهای هاله‌ای و لیاپانوفی شناخته می‌شوند.<sup>8</sup> رابرت فارکووار برای اولین بار از اصطلاح مدارهای هاله‌ای در رساله دکتری خود استفاده کرد.<sup>9</sup> فارکووار و کامل در ادامه موفق به تبیین روشی به منظور حل تحلیلی معادله‌های مسئله سه جسم در پیدا کردن مدارهای شبه-تناوبی حول نقطه لاگرانژی  $L_2$  سیستم زمین-ماه شدند.<sup>10</sup> آن‌ها در این مقاله از روش لیندست پوانکاره بهره گرفتند.<sup>11</sup> در ادامه این تحقیقات در سال ۱۹۷۹ برک ول و برون روشی عددی به منظور پیدا کردن مدارهایی کاملاً متناوب حول نقطه تعادلی  $L_2$  سیستم زمین-ماه را توسعه دادند.<sup>12</sup> هاول با بهره‌گیری از تحقیقات مذکور در رساله دکتری خود روش عددی جامعی را به منظور پیدا نمودن مدارهای هاله‌ای در حول نقاط لاگرانژی مسئله سه جسم محدود شده دایروی توسعه داد.<sup>13</sup> عباسعلی و همکاران، از توسعه این الگوریتم در استخراج مدارهای متناوب لیاپانوفی استفاده کردند.<sup>14,15</sup> نزدیک‌سازی هرچه بیشتر محیط مورد مطالعه، به محیط واقعی به شبیه‌سازی دقیق‌تری از مدارهای مذکور منجر خواهد شد. اضافه نمودن اغتشاشات فضایی به محیط مورد مطالعه می‌تواند در رسیدن به این امر سودمند باشد.<sup>16</sup> تحلیل‌های مداری در رژیم سه جسم دایروی با در نظرگیری زمین پخیده در سیستم زمین-ماه توسط سینگ انجام شد.<sup>17</sup> سیرواستاوا و کومار مدارهای سیستم سه جسم محدود شده دایروی را در حضور پخیدگی زمین و اثرات فشار تشعشعی خورشید در سیستم زمین-

۱۱۸

سال ۱۰ - شماره ۲  
پاییز و زمستان ۱۴۰۰  
نشریه علمی دانش و فناوری هوا فضا



سه جسم محدود شده در حضور اغتشاش پخیدگی سیارات اصلی  
به کارگیری تکنیک پوانکاره در شناسایی مدارهای لیاپانوفی مسئله

خورشید به انجام رساندند<sup>18</sup>. آن‌ها در تحقیقات خود از مکانیک لاگرانژی به منظور به دست آوردن معادله‌های حرکت مداری بهره گرفتند. مارکوس و پاپاداکیس، پایداری غیرخطی ماهواره حول نقاط لاگرانژی سیستم زمین-ماه را با در نظرگیری اغتشاش پخیدگی زمین مورد مطالعه قرار دادند<sup>19</sup>. سینگ، این تحقیقات را با در نظرگیری فضاپیمایی با جرم متغیر تکمیل کرد<sup>20</sup>. اثر اغتشاش پخیدگی در مسئله هاورینگ ماهواره در حال عملیات در مدار کم ارتفاع زمین آهنگ توسط ژانگ و همکاران بررسی شد<sup>21</sup>.

الگوریتم‌های توسعه داده شده توسط فارکوآر-کامل و هاول، به منظور مطابقت پارامترهای حالت مداری در زمان شروع و پایان حل به منظور رسیدن به مدارهای لیپانوفی و هاله‌ای متناوب، از ماتریس انتقال حالت ترکیب شده با روش جستجوی مانده بهره می‌گرفت. که این ماتریس برای معادلات حرکت مداری فضاپیما در مسئله سه جسم محدود شده شامل  $6+36$  مجهول (6 مجهول پارامترهای حالت حرکت مداری و 36 مجهول از درایه‌های ماتریس انتقال حالت) است؛ بنابراین برای حل آن، نیاز به حل  $36+6$  معادله هم‌زمان دیفرانسیلی شامل معادله‌های حرکت مداری و معادلات تشکیل شده با ماتریس انتقال حالت برای تمامی پله‌های زمانی در طول دوره تناوب است. الگوریتم‌های مذکور به دلیل حساسیت دقت حل مسئله و محدودیت در تعداد پاسخ‌های متناوب، خود نیاز به ورودی‌های دقیق و مناسبی داشتند که این ورودی‌ها از یک حل تخمینی از معادله‌های حرکت مسئله سه جسم محدود شده با روش مانده به دست می‌آمد. محاسبه این حدس‌های اولیه نیازمند محاسبات ریاضی پیچیده و وقت‌گیر به دلیل محیط آشفته مسئله داشت و در مواردی الگوریتم‌های توسعه

داده شده توانایی اصلاح این حدس‌ها به منظور به دست آوردن شرایط اولیه اصلاح شده‌ای که به ملاقات مدارهای متناوب منجر می‌شود را نداشت. این امر به علت عدم دقت کافی روش حل در پیدا کردن بردار حدس‌های اولیه به عنوان ورودی الگوریتم اصلاح مداری بود. در این مقاله از نگاشت پوانکاره به منظور شناسایی شرایط اولیه مناسب مدارهای لیپانوفی استفاده خواهد شد. نگاشت پوانکاره به عنوان ابزاری مناسب در مطالعه پارامترهای مورد علاقه یک سیستم شناخته می‌شود که این روش دارای مزیت کم کردن ابعاد سیستم به منظور تحلیل و مطالعه آسان‌تر از پارامترهای مورد علاقه بررسی است<sup>22</sup>. به منظور صلاحیت‌سنجی روش مذکور، در هر مرحله مدارهای متناوب لیپانوفی با شرایط اولیه به دست آمده با نگاشت پوانکاره و حل آن به استفاده از معادله‌های حرکت مداری انجام خواهد شد. متناوب بودن مدارهای به دست آمده می‌تواند به عنوان صلاحیت‌سنجی دقیقی از روش معرفی شده لحاظ شود. همچنین به منظور نشان دادن تأثیر اغتشاشات مذکور، مقایسه‌ای میان شرایط اولیه و مدارهای متناوب لیپانوفی مسئله دارای اغتشاش و ساده انجام می‌پذیرد.

## ۲. هندسه مسئله سه جسم محدود شده

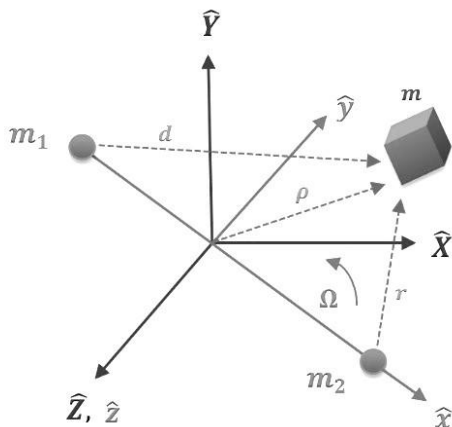
دو سیاره جاذب اصلی با جرم‌های  $m_1$  و  $m_2$  که تنها تحت تأثیر گرانش متقابل یکدیگر نسبت به هم حول مسیری دایروی حرکت می‌کنند را در نظر بگیرید ( $m_1 > m_2$ ). فضاپیمایی با جرم  $m$  را به این سیستم اضافه کرده و علاقه‌مند به توصیف معادلات حرکت آن در سیستم مورد نظر هستیم. جرم فضاپیما در مقایسه با جرم سیارات اصلی بسیار ناچیز است. به مسئله تعریف شده در مکانیک سماوی مسئله سه جسم محدود شده گفته می‌شود چرا که حرکت آن تأثیری بر حرکت





سیارات اصلی ندارد ( همانند جرم فضاپیما در مقابل جرم سیارات منظومه شمسی). حرکت فضاپیمای کوچک  $m$  در این سیستم به عنوان مهم‌ترین محور مطالعه مسئله سه جسم شناخته می‌شود. مدل نهایی به دست آمده با استفاده از دو شرط گفته شده با نام مسئله سه جسم محدود شده دایروی شناخته می‌شود و در پژوهش‌های زیادی از آن بهره گرفته شده است<sup>۴</sup>. هنگامی که دو سیاره اصلی روی مدار دایروی مشخصی حرکت می‌کنند، می‌توان مختصاتی که نسبت به حرکت آن‌ها ثابت است را تعریف کرد. مرکز مختصات گفته شده در مرکز جرم سیارات اصلی قرار داشته و این مختصات با سرعت زاویه ثابت  $\Omega$  دوران می‌کند که برابر با مقدار حرکت متوسط سیارات اصلی است. این مختصات که با نام مختصات چرخان شناخته می‌شود با بردارهای  $\mathbf{I}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  تعریف می‌شود (شکل ۱) به گونه‌ای که مؤلفه  $\hat{z}$  آن عمود بر صفحه حرکت سیارات اصلی است و اجرام  $m_1$  و  $m_2$  همواره بر روی بردار  $\hat{x}$  این مختصات باقی می‌مانند. همچنین مختصات اینرسی  $I(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  به گونه‌ای تعریف می‌شود که در زمان اولیه  $t = 0$  هم‌راستا با مختصات چرخان بوده و بردار  $\hat{z}$  آن همواره با جهت بردار  $\hat{z}$  مختصات چرخان هم‌راستا و عمود بر صفحه حرکت سیارات اصلی باشد. حال بهتر است برای ساده شدن معادلات در مختصات تعریف شده، از فرم بی-بعد استفاده کنیم به گونه‌ای که ثابت جهانی گرانش  $G$ ، سرعت زاویه‌ای  $\Omega$  و فاصله میان دو سیاره اصلی واحد در نظر گرفته شوند. همچنین زمان تناوب سیارات اصلی برابر  $2\pi$  و پارامتر جرمی  $\mu$  به صورت نسبت سیاره کوچک‌تر  $m_2$  و جرم کل سیستم در نظر گرفته شود  $\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}$ . پارامتر جرمی همچنین توانایی تعریف جایگاه قرارگیری

سیارات اصلی را دارد، به گونه‌ای که سیاره بزرگ‌تر در نقطه  $(-\mu, 0, 0)$  و سیاره کوچک‌تر در  $(1 - \mu, 0, 0)$  قرار خواهند داشت:



شکل ۱- هندسه مسئله سه جسم محدود شده

### ۳. مسئله سه جسم محدود شده در حضور اغتشاشات پخیدی سیارات اصلی

در این مقاله از مکانیک لاگرانژی به منظور استخراج معادلات حاکم بر حرکت ماهواره در مسئله سه جسم محدود شده در حضور اغتشاشات پخیدی هر دو سیاره اصلی استفاده می‌شود. مکانیک لاگرانژی با در اختیار داشتن انرژی جنبشی و میدان پتانسیل مؤثر بر جسم مورد مطالعه، قادر به استخراج معادلات حرکت خواهد بود. تابع لاگرانژین  $L$  در حالت کلی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$L = K - V \quad (2)$$

که در آن  $K$  و  $V$  به ترتیب نماینده انرژی جنبشی و میدان پتانسیل وسیله مورد مطالعه هستند. در ادامه، استفاده از معادلات زیر به استخراج معادلات حاکم منجر می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

شده‌اند :

$$d = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2} \quad (7)$$

$$r = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2}$$

انرژی جنبشی ماهواره بیان شده در قاب چرخانی که با سرعت زاویه ثابت یا همان متوسط حرکت  $n$  حول محور  $z$  دوران می‌کند با رابطه زیر بیان می‌شود<sup>18</sup>:

$$K = \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + n(xy - \dot{x}y) + \frac{1}{2}n^2(x^2 + y^2) \quad (8)$$

در رابطه (8)  $v_x, v_y, v_z$  نماینده مؤلفه‌های بردار سرعت ماهواره در قاب چرخان است و مقدار متوسط حرکت از رابطه زیر به دست خواهد آمد<sup>23</sup>:

$$n = \sqrt{1 + 3(J_2^{(1)} + J_2^{(2)})} \quad (9)$$

که  $J_2^{(1)}$  و  $J_2^{(2)}$  به ترتیب بیانگر هارمونیک منطقه‌ای دوم سیارات  $m_1$  و  $m_2$  هستند.

در نهایت معادلات حاکم بر حرکت ماهواره در مسئله سه جسم محدود شده دایروی از جاگذاری رابطه‌های (6) و (8) در معادله (2) و به‌کارگیری رابطه‌های (3) استخراج خواهند شد:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= n^2x + 2nvy \\ &\quad + \mu(\mu + x - 1)R^* \\ &\quad - (\mu - 1)(x \\ &\quad + \mu)D^* \\ \ddot{y} &= n^2y - 2nvx + \mu yR^* \\ &\quad - (\mu - 1)yD^* \\ \ddot{z} &= \mu zR^* - (\mu - 1)zD^* \end{aligned} \quad (10)$$

در معادله (10) مقادیر  $D^*$  و  $R^*$  برابر است با:

$$R^* = \frac{1}{r^3} + \frac{3A_2^{(2)}}{2r^5} \quad (11)$$

$$D^* = \frac{1}{d^3} + \frac{3A_2^{(1)}}{2d^5}$$

با صفر قرار دادن ضرایب پخیدگی در معادله (10)، معادلات حرکت مداری ماهواره در مسئله ساده بدون اغتشاش حاصل خواهد شد. سیستم معادلات استخراج شده بیانگر معادلات حاکم بر

میدان پتانسیل جاذبی بر واحد جرم برای جسمی در فاصله  $\rho$  قرار گرفته از مرکز جسم دارای پخیدگی با شعاع متوسط  $R_m$  به صورت زیر توصیف می‌شود<sup>18</sup>

$$V = -\frac{G}{\rho} \left[ 1 - \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{R_m}{\rho} \right)^{2l} P_{2l}(\cos\theta) \right] \quad (4)$$

که در آن  $J_{2l}$  نشان‌دهنده دومین هارمونیک منطقه‌ای،  $\theta$  زاویه بین ماهواره تا مرکز سیاره پخیده و  $P_{2l}$  نماینده چند جمله‌ای لژاندر است. با توجه به آنکه هارمونیک منطقه‌ای دوم  $J_2$  مقدار بسیار بزرگ‌تری از دیگر هارمونیک‌های منطقه‌ای دارد، از اثر هارمونیک‌های دیگر چشم‌پوشی می‌شود. در ادامه، میدان پتانسیل وارد شده به فضای ما واقع شده در فاصله  $r$  از سیاره پخیده اصلی با در نظرگیری هارمونیک منطقه‌ای دوم  $J_2$  با جاگذاری  $k = 2$  در معادله (4) به دست می‌آید و پس از ساده‌سازی به فرم زیر باز نویسی می‌شود:

$$V = -Gm \left( \frac{1}{r} + \frac{A_2}{2r^3} \right) \quad (5)$$

که در آن  $A_2$  ضریب پخیدگی سیاره اصلی است و برابر با  $J_2 R_e^2$  است که  $R_e$  شعاع استوایی سیاره اصلی است<sup>18</sup>. در ادامه، با در نظرگیری هر دو سیاره اصلی به عنوان اجرام پخیده و بی‌بعدسازی رابطه (5) میدان پتانسیل مسئله مذکور به دست خواهد آمد.

$$V_{m1} = -\mu \left( \frac{1}{r} + \frac{A_2^{(2)}}{r^3} \right)$$

$$V_{m2} = -(1 - \mu) \left( \frac{1}{d} + \frac{A_2^{(1)}}{d^3} \right) \quad (6)$$

$V = V_{m1} + V_{m2}$  که در آن  $r$  و  $d$  به ترتیب نشان‌دهنده فاصله سیارات  $m_1$  و  $m_2$  از فضای ما در فرم بی‌بعد





حرکت ماهواره در مسئله سه جسم محدوده در حضور اغتشاشات پخیدگی هر دو سیاره اصلی است. این معادلات دارای هیچ حل حلقه-بسته‌ای نیست. بنابراین حل آن‌ها نیازمند استفاده از روش‌های عددی است. باتوجه به وابستگی حل-های عددی به شرایط اولیه، به منظور ملاقات پاسخ‌های متناوب، مسئله نیازمند شرایط اولیه مناسبی از پارامترهای حالت مسئله است. محدود بودن تعداد پاسخ‌های متناوب به معنی نیاز مسئله به شرایط اولیه بسیار دقیق به منظور ملاقات این پاسخ‌ها است. شرایط اولیه مناسب به منظور یافتن پاسخ‌های متناوب در مطالعات قبل با یک حل تخمینی از معادلات حرکت مسئله سه جسم محدود شده با روش مانده و استفاده از یک الگوریتم اصلاح مداری به دست می‌آمد. یافتن شرایط اولیه مناسب با استفاده از این روش، نیازمند محاسبات ریاضی پیچیده و وقت‌گیر بود. همچنین در روش‌های مذکور، به منظور شناسایی هر پاسخ متناوب نیازمند شناسایی یک حدس اولیه مناسب به عنوان ورودی الگوریتم اصلاح مداری بود. به همین علت، در این مقاله، به کارگیری نگاشت پوانکاره در یافتن پاسخ‌های متناوب در مسئله سه جسم محدود شده پیشنهاد می‌شود. به طور خاص هدف اصلی مقاله حاضر، شناسایی شرایط اولیه مدارهای لیاپانوفی در مسئله سه جسم محدود شده در حضور اغتشاشات پخیدگی هر دو سیاره اصلی است. بنابراین در ادامه، مدارهای متناوب لیاپانوفی معرفی می‌شود و سپس روند استفاده از نگاشت پوانکاره در شناسایی شرایط اولیه دقیق و مناسب این دسته مدارها توصیف خواهد شد.

#### ۴. مدارهای لیاپانوفی

مدارهای متناوب لیاپانوفی، خانواده بسیار معروفی از مدارهای متناوب حول نقاط تعادلی

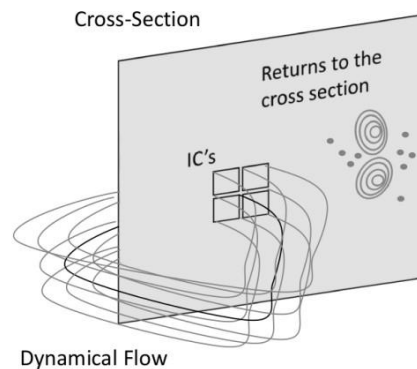
مسئله سه جسم محدودشده می‌باشند<sup>15,24</sup>. مهم‌ترین مشخصه این دسته از مدارها، دوبعدی و متقارن بودن آن‌هاست به طوری که اصطلاحاً خانواده‌های مداری لیاپانوفی در صفحه حرکت مدار سیارات جاذب دراز کشیده‌اند<sup>24</sup>. چون معادلات حرکت مداری در مسئله سه جسم محدودشده دایروی دارای هیچ حلقه بسته‌ای نیستند، بنابراین استفاده از روش‌های حل عددی در حل این معادلات ضروری است. حل‌های عددی ذکر شده وابستگی شدیدی به شرایط اولیه پارامترهای حالت مداری دارند. بنابراین به منظور یافتن مدارهای لیاپانوفی متناوب نیازمند پیدا کردن شرایط اولیه دقیقی از پارامترهای حالت مداری هستیم. فارکووار و هاوول از ویژگی‌های گفته شده این مدارها به منظور پیدا نمودن شرایط اولیه مدارهای متناوب لیاپانوفی استفاده کردند<sup>10,13</sup>. فرض کنید که مدار حرکت سیارات پخیده اصلی در صفحه  $xz$  قرار داشته باشند. در حالت کلی بردار حدس‌های اولیه پارامترهای حالت مداری به صورت  $\bar{\mathbf{X}}_0 = [x_0, y_0, z_0, v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0}]$  نوشته می‌شود. بردار حدس‌های اولیه در صورتی که به فرم  $\bar{\mathbf{X}}_0 = [x_0, 0, 0, 0, v_{y_0}, 0]^T$  نوشته شوند شرط عمود بودن به صفحه حرکت مدار سیارات اصلی را در زمان اولیه ایجاد می‌شود که  $T$  زمان تناوب خواهد بود. حال اگر عبور مجدد مدار از صفحه  $xz$  به صورت  $\bar{\mathbf{X}}\left(\frac{T}{2}\right) = [x, 0, 0, 0, v_y, 0]$  تعریف شود؛ آنگاه هر دو شرط تقارن و عمود بودن به صفحه حرکت سیارات در تمام مسیر ایجاد شده و مدار متناوب خواهد بود. به مدارهای لیاپانوفی مذکور را داشته باشد اصطلاحاً مدارهای لیاپانوفی گفته می‌شود. با دانستن فرم اصلی شرایط اولیه مدارهای متناوب، در ادامه از نگاشت پوانکاره به عنوان ابزاری قدرتمند در شناسایی این شرایط



استفاده خواهد شد.

## ۵. شناسایی شرایط اولیه مدارهای لیاپانوفی با نگاشت پوانکاره

در این مقاله، استفاده از نگاشت پوانکاره به منظور شناسایی شرایط اولیه پارامترهای مداری مدارهای لیاپانوفی، پیشنهاد می‌شود. نگاشت پوانکاره ابزاری مناسب به منظور ضبط ساختارهای دینامیکی یک سیستم  $n$  بعدی، همانند ساختارهای متناوب یا شبه-متناوب، به فرم  $\dot{x} = f(x)$  است که مبنای اصلی آن استفاده از جریان دینامیکی سیستم مورد نظر است. برای پیاده‌سازی این روش ابتدا یک سطح مقطع  $n-1$  بعدی عمود بر جریان دینامیکی تعریف کرده و حدس‌های اولیه خود را روی آن پهن می‌کنیم (شکل ۲).



شکل ۲- شماتیک نگاشت پوانکاره<sup>25</sup>

سپس با استفاده از معادلات حاکم در هر مرحله، حدس‌های اولیه را انتشار خواهیم داد و برخورد جریان دینامیکی با سطح مقطع تعریف شده را ضبط می‌کنیم و نمایش می‌دهیم. توجه داشته باشید که سطح مقطع تعریف شده می‌تواند به عنوان هر ترکیبی از پارامترهای حالت سیستم باشد. تقاطع این جریان پویای دینامیکی با سطح مقطع تعریف شده را می‌توان بر اساس پارامترهای حالت نمایش داد. هنگامی که دو پارامتر حالت مورد مطالعه باشند، در هر برخورد جریان

دینامیکی یک نقطه در فضای دوبعدی سطح مقطع ضبط و نمایش داده می‌شود. باید توجه داشت که شاید دو پارامتر برای توصیف کامل از وضعیت یک سیستم کافی نباشد، اما برای نمایش ساختار دینامیکی مورد علاقه کافی باشد.

به طور خاص، بازه‌های ساختار تناوبی و شبه-تناوبی یک ساختار دوبعدی بر امتداد یک منحنی بسته روی نقشه ایجاد شده بر سطح مقطع ظاهر می‌شود. این منحنی‌های بسته ساختار جدا از همی نداشته بلکه در جزایری گرد هم می‌آیند و مراکز و مرزهای جزیره‌های تشکیل شده به عنوان پاسخ‌های تناوبی در نظر گرفته خواهند شد. به منظور درک بهتر، پیاده‌سازی این روش در قالب مثالی آورده خواهد شد. در قسمت قبل گفته شده که در حالت کلی، بردار حدس‌های اولیه مدارهای متناوب لیاپانوفی به صورت  $\bar{X}_0 = [x_0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot v_{y_0} \cdot 0]^T$  نوشته می‌شود. به منظور پیدا کردن پاسخ‌های تناوبی باید شرط زیر برای زمان پایانی تناوب  $t_f$  و زمان اولیه حل  $t_0$  برقرار باشد. به عبارتی دیگر باید پارامترهای حالت مداری در زمان شروع و پایان حل منطبق باشند:

$$\tau = \begin{bmatrix} x(t_f) - x(t_0) \\ v_y(t_f) - v_y(t_0) \end{bmatrix} = 0 \quad (9)$$

بنابراین پارامترهای موردعلاقه برابر با دو پارامتر موقعیت  $x$  و  $v_y$  خواهد بود. به همین خاطر ابتدا صفحه به‌عنوان سطح مقطع از پارامترهای مورد اشاره تشکیل داده، سپس حدس‌های اولیه دلخواهی از پارامترهای گفته‌شده را روی این صفحه قرار می‌دهیم. در ادامه حل-های متفاوتی همانند حل‌های متوالی برای یک دوره تناوب دلخواه را با استفاده از جریان دینامیکی که همان معادلات سیستم هستند، انجام داده و در هر بار برگشت جریان دینامیکی به سطح مقطع مورد اشاره، مقدار پارامترهای موردعلاقه را





در سطح مقطع تشکیل داده با یک نقطه نمایش می‌دهیم و در حل بعدی این بار یکی از پارامترهای موردعلاقه تحلیل را همانند آنچه در حدس اولیه حل اول انتخاب کرده‌ایم ثابت نگه داشته و این بار مقدار حدس‌های اولیه پارامترهای دیگر، برابر مقادیر نشان داده شده روی سطح مقطع، از حل اول خواهند بود و دوره تناوب در تمامی حل‌ها ثابت خواهند بود. جزایر به‌دست‌آمده بر نگاشت پوانکاره (مناطق با تراکم نقاط بیشتر) و مرزهای آن، نشانگر شرایط اولیه مناسب پارامترهای مداری به‌منظور ملاقات پاسخ-های تناوبی خواهند بود. همچنین در صورت تشکیل جزایر بیان‌شده، زمان تناوب انتخابی به‌عنوان زمان دوره تناوب مدار متناوب به‌دست‌آمده انتخاب خواهد شد.

## ۶. نتایج

در این مطالعه سیارات زمین و ماه به عنوان سیارات پخیده مسئله سه جسم محدود شده فرض شده‌اند. ثوابت این سیستم در جدول ۱ آورده شده است:

جدول ۱- ثوابت سیستم زمین-ماه پخیده

$\mu_{Earth-Moon}$	0.0121505856
$J_2^{(earth)}$	$1.0826 \times 10^{-3}$
$J_2^{(moon)}$	$2.0323 \times 10^{-4}$
$D_{Earth-Moon} (km)$	384400
$R_{eEarth} (km)$	6378.1
$R_{eMoon} (km)$	1738.1

همان‌طور که گفته شد، هدف اصلی این مقاله شناسایی شرایط اولیه مدارهای متناوب لیپانوفی توسط نگاشت پوانکاره است. در قسمت ۴ که مدارهای لیپانوفی توصیف شد، اشاره شد که شرایط اولیه این مدارها با توجه به خصوصیات بیان شده به فرم کلی  $\bar{X}_0 = [x_0 \ 0 \ 0 \ 0 \ v_{y_0} \ 0]^T$  بنابراین

به‌منظور به‌کار گیری نگاشت پوانکاره، ابتدا یک صفحه به‌عنوان سطح مقطع شامل مختصات  $x - v_y$  را تشکیل می‌دهیم. حال فرض کنید که قرار است مدارهایی متناوب با دوره تناوب  $L_2 = [3 - 3.5]$  را حول نقطه لاگرانژی  $L_2$  سیستم زمین-ماه پخیده را شناسایی کنیم. برای شروع حل نیازمند حدس‌های اولیه‌ای از مقادیر  $x_0$  و  $v_{y_0}$  هستیم. در این مقاله حدس اولیه مقدار  $x_0$  برابر با مختصات نقطه لاگرانژی مربوطه پیشنهاد می‌شود. مختصات سه نقطه لاگرانژی در مسئله سه جسم محدود شده زمین-ماه ساده در فرم بی‌بعد (ndim) آورده شده است<sup>4,14</sup>. بی‌بعد سازی مکانی در این مقاله بر اساس فاصله میان سیارات زمین-ماه انجام شده است.

جدول ۲- مختصات نقاط لاگرانژی خطی در سیستم

زمین-ماه ساده

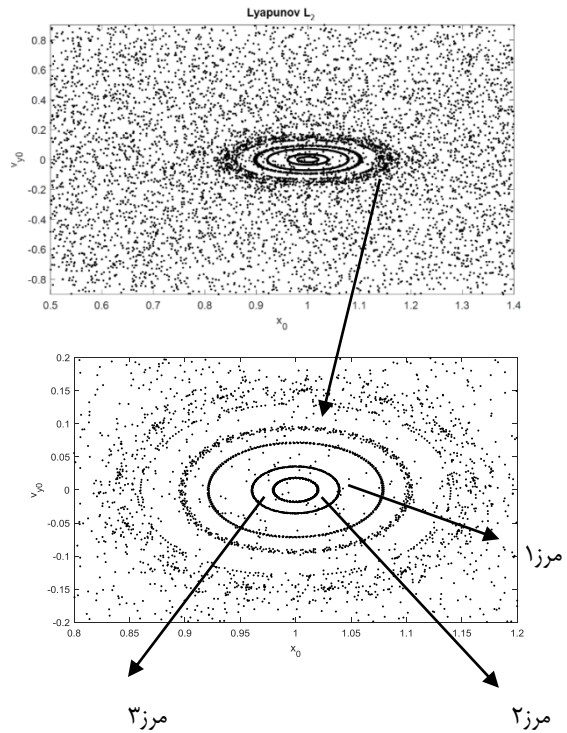
$x_{L_1}$	$x_{L_2}$	$x_{L_3}$
(ndim)	(ndim)	(ndim)
0.8369	1.156	-1.005

بنابراین مقدار  $x_0 = 1.156$  و بردار حدس اولیه  $v_{y_0} = [-0.7, 0.7]$  به عنوان حدس اولیه انتخاب می‌شود. در ادامه حل‌های متوالی ابتدا یک بار برای دوره تناوب‌های متفاوت با یک مقدار سرعت اولیه (به طور مثال سرعت اولیه ۱- انتخاب شده و برای تمام دوره تناوب‌ها حل انجام می‌شود، سپس سرعت اولیه ۰.۷- انتخاب شده و برای تمامی دوره تناوب‌ها حل صورت می‌گیرد و این روند ادامه پیدا می‌کند) و یک مقدار  $x_0$ ، و بار دیگر برای سرعت‌های اولیه مختلف و یک دوره تناوب ثابت و یک مقدار  $x_0$  انجام می‌گردد که نتایج آن در شکل ۳ آورده شده است:

هریک از نقاط روی مرزهای تشکیل شده، بیانگر شرایط اولیه مناسب مدارهای لیپانوفی است. جدول ۳ شامل برخی از شرایط اولیه



شناسایی شده از نگاشت پوانکاره شکل ۳ است.



شکل ۳- جزیره و مرزهای تشکیل شده برای شناسایی مدارهای لیپانوفی سیستم زمین-ماه پخیده حول نقطه لاگرانژی  $L_2$

جدول ۳- برخی از شرایط اولیه مدارهای متناوب لیپانوفی سیستم زمین ماه پخیده حول نقطه

لاگرانژی  $L_2$

$x_0$	$v_{y_0}$	$T$
(ndim)	(ndim)	(ndim)
0.919794	-0.4751	3.02
0.947902	-0.4628	3.12
1.0954336	-0.4492	3.19
1.1199909	-0.4136	3.23
1.1630754	-0.4731	3.28
1.1776543	-0.4413	3.35
1.1802748	-0.4567	3.43
1.1902662	-0.4487	3.48
1.1943835	-0.4248	3.49
1.1973427	-0.4092	3.50

به دلیل آن که شرایط اولیه مدارهای لیپانوفی تنها شامل پارامترهای  $x_0$  و  $v_{y_0}$  است، این جدول تنها دربردارنده مقادیر پارامترهای گفته

شده است.

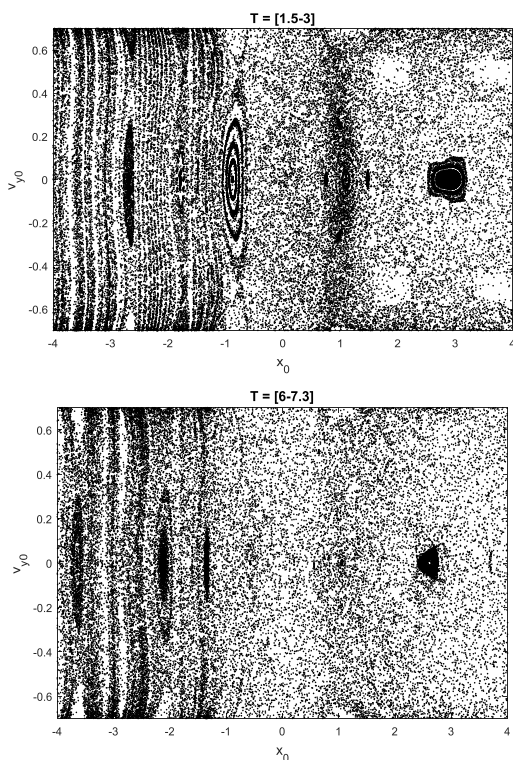
در ادامه، باهدف شناسایی تمامی مدارهای متناوب لیپانوفی حول هر سه نقطه لاگرانژی در محدوده دوره تناوب  $T = [3, 5.5]$ ، اینبار علاوه بر در نظرگرفتن بازه  $v_{y_0} = [-0.7, 0.7]$ ، بازه‌ای بین نقطه لاگرانژی  $L_1$  تا  $L_3$  برای حدس اولیه پارامتر  $x_0$  در نظر گرفته خواهد شد. بدین معنا که مقدار  $x_0$  در بازه  $x_0 = [0.83, -1.005]$  در نظر گرفته خواهد شد. در نظرگیری بازه مذکور باعث خواهد شد که حل‌های متوالی با در نظرگیری حدس‌های اولیه  $x_0$  برای بازه‌های دوره تناوب و سرعت اولیه بیان شده، به حل‌های متوالی گفته شده در قبل اضافه شود. در ادامه با هدف نشان دادن تأثیرات اغتشاشات پخیدگی سیارات زمین و ماه روی مدارهای لیپانوفی و شرایط اولیه آنها، نگاشت پوانکاره با حدس‌های اولیه یکسان معرفی شده، یک بار برای معادلات استخراج شده اغتشاشی در (۱۰) و یک بار برای معادلات ساده و بدون اغتشاش حرکت ماهواره در مسئله سه جسم محدود شده که از صفر قرار دادن ترم های اغتشاشی در معادلات (۱۰) به دست می‌آیند، رسم خواهد شد.

همان‌طور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، حضور اغتشاشات پخیدگی سیارات زمین و ماه، باعث تغییر در الگوی شکل جزایر تشکیل شده در نگاشت پوانکاره شده است. تغییر در الگوی جزایر ظاهر شده به تغییر در شرایط اولیه مدارها در مدل اغتشاشی نسبت به مدل ساده منجر می‌شود. این شکل دربردارنده شرایط اولیه مدارهای متناوب لیپانوفی در بازه دوره تناوب گفته شده است. در ادامه به منظور صلاحیت سنجی روش به کار گرفته شده، برخی از مدارهای لیپانوفی مسئله زمین-ماه پخیده، با استفاده از نتایج حاصل شده از شکل ۴ در شکل ۵ رسم شده است.



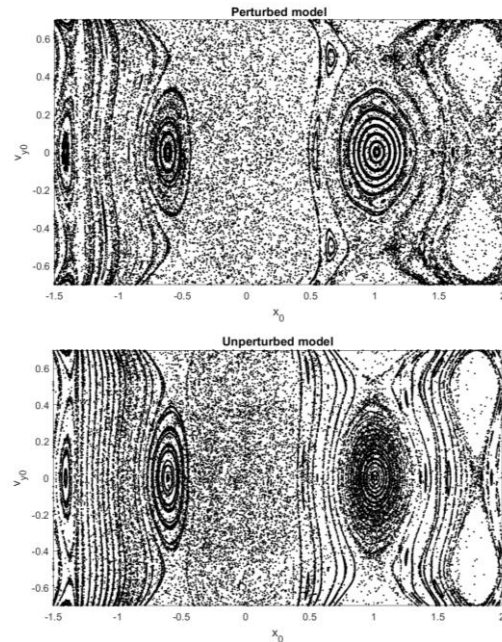
باتوجه به متناوب بودن مدارهای رسم شده و شباهت مدارهای لیپانوفی در محیط دارای اغتشاشات پخیدگی با مدارهای لیپانوفی رسم شده در مدل ساده که در مراجع یادشده آورده شده‌اند، می‌توان به صلاحیت روش به‌کار گرفته شده پی‌برد.

تحقیقات صورت گرفته در این مقاله نشان داد که حدس اولیه مقدار دوره تناوب یکی از عوامل بسیار مؤثر در تشکیل جزایر پوانکاره است. در شکل ۶، نگاشت پوانکاره با حدس‌های اولیه  $x_0 = [0.83, 1.005]$  و  $v_{y_0} = [-0.7, 0.7]$  یک بار برای حدس اولیه دوره تناوب  $T = [1.5, 3]$  و بار دیگر برای  $T = [6, 7.3]$  در مسئله زمین-ماه پخیده رسم شده است:



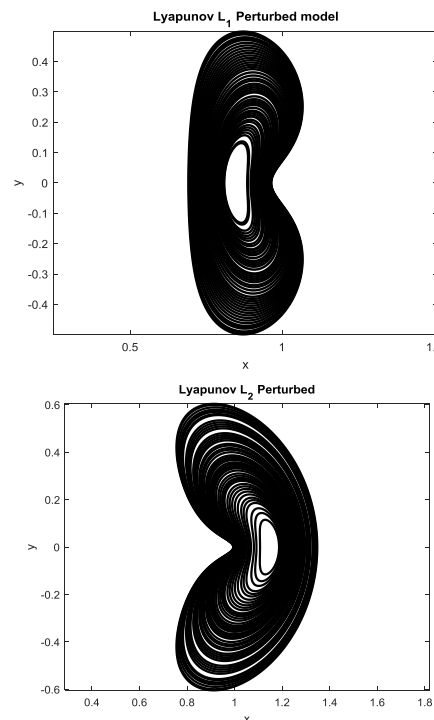
شکل ۶- تأثیر انتخاب حدس اولیه دوره تناوب بر نگاشت پوانکاره در شناسایی شرایط اولیه مدارهای متناوب لیپانوفی مسئله زمین-ماه پخیده

در شکل ۶، دو نگاشت پوانکاره با حدس‌های اولیه یکسان پارامترهای حالت  $x_0$  و  $v_{y_0}$  برای بازه‌های دوره تناوب متفاوت رسم شده است.



شکل ۴- مقایسه نگاشت پوانکاره رسم شده به منظور شناسایی شرایط اولیه مدارهای متناوب سیستم زمین-ماه پخیده و ساده

متناوب بودن مدارهای رسم شده در این شکل، و شباهت آن‌ها با مدارهای لیپانوفی مدل ساده در پژوهش‌های گذشته<sup>15, 25-28</sup> نشان‌دهنده صلاحیت و درستی روش معرفی شده است:



شکل ۵- خانواده‌های مداری لیپانوفی مسئله زمین-ماه پخیده

همان‌طور که در شکل ۶ مشخص است، انتخاب بازه‌های بزرگ‌تر دوره تناوب به کاهش جزایر تشکیل شده در نگاشت پوانکاره منجر خواهد شد. به بیانی دیگر، احتمال شناسایی شرایط اولیه مدارهای متناوب لیاپانوفی در نگاشت پوانکاره با افزایش دوره تناوب مداری کاهش خواهد یافت. این نتیجه از کاهش تعداد جزایر ظاهر شده در دو نگاشت رسم شده در شکل ۶، به دست آمده است. دلیل این امر آن است که با افزایش دوره تناوب، ماهواره از فاصله نزدیک‌تری نسبت به سیارات اصلی عبور کرده و این امر باعث افزایش تأثیر اغتشاشات سیارات بر حرکت ماهواره می‌شود.

در ادامه به منظور نشان دادن تأثیر اغتشاشات بر شرایط اولیه مدارهای متناوب لیاپانوفی، مقایسه‌ای میان این شرایط در سیستم زمین-ماه پخیده و ساده در جدول ۵ صورت گرفته است. در این جدول  $a$  امین مدار متناوب لیاپانوفی حول نقطه لاگرانژی  $e$ ام و اختلاف میان شرایط اولیه مدل‌های پخیده و ساده به ترتیب با نمادهای  $L(e; a)$  و  $\Delta$  نمایش داده شده است.

جدول ۵- مقایسه میان شرایط اولیه مدارهای

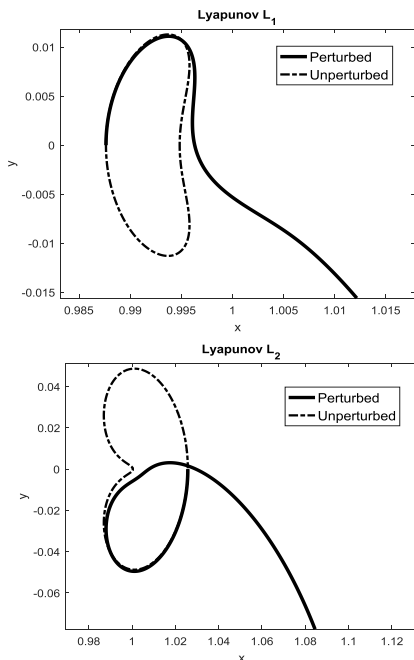
متناوب لیاپانوفی سیستم زمین-ماه پخیده با دوره تناوب یکسان

مدار	$\Delta \times 10^7$	
	$x_0 (km)$	$v_{y_0} (km/s)$
$L(1:1)$	3.21	0
$L(1:5)$	3.32	0
$L(1:15)$	3.38	0
$L(1:25)$	3.49	0
$L(2:1)$	10.04	0.08
$L(2:5)$	10.17	0.10
$L(2:15)$	10.65	0.23
$L(2:25)$	11.00	0.30
$L(3:1)$	0.98	0
$L(3:5)$	0.99	0
$L(3:15)$	0.99	0

جدول ۵، به خوبی نمایشگر تأثیر اغتشاشات

پخیدگی بر شرایط اولیه مدارهای متناوب لیاپانوفی است. داده‌های این جدول بر اساس مقایسه‌ای میان مدارهای متناوب لیاپانوفی با دوره تناوب یکسان و با حدس‌های اولیه یکسان میان مدل پخیده و ساده به دست آمده است. طبق جدول ۵، با افزایش دوره تناوب مداری، مقدار اختلاف میان شرایط اولیه دو مدل افزایش پیدا کرده است. همانند آنچه که گفته شد، دلیل این امر آن است که با افزایش دوره تناوب، مدار از فاصله نزدیک‌تری نسبت به سیارات اصلی عبور کرده و این امر باعث افزایش تأثیر اغتشاشات سیارات روی حرکت ماهواره شده است.

نتایج به دست آمده در جدول ۵، به خوبی نمایشگر نقش کلیدی تأثیر اغتشاشات بر موفقیت یا شکست یک مأموریت فضایی است. به منظور درک بهتر این موضوع، در شکل ۷ باهدف نمایش تأثیر اغتشاشات پخیدگی، شرایط اولیه مدارهای متناوب لیاپانوفی در مدل زمین-ماه ساده، در معادلات مدل پخیده استفاده شده است:



شکل ۷- استفاده از شرایط اولیه مدارهای متناوب لیاپانوفی مدل ساده در معادلات مدل پخیده





در شکل ۷، از شرایط اولیه مدارهای متناوب لیپانوفی ساده در محیط دارای اغتشاش پخیدگی استفاده شده است. ملاحظه می‌شود که تأثیر اغتشاشات باعث خارج شدن مدار از فرم متناوب شده است و حتی در دوره اول نیز متناوب نیست که به خوبی نمایشگر تأثیر اغتشاشات اشاره شده است. شکل ۷ گویای نامعتبر بودن شرایط اولیه مدارهای متناوب لیپانوفی در حالت بدون اغتشاش در محیط دارای اغتشاش است. اغتشاشات پخیدگی با تأثیری هرچند کوچک بر شرایط اولیه پارامترهای مداری، باعث تغییر در رفتار حرکت ماهواره و نیز شکل مداری می‌شود. این نتیجه در جدول ۵ نیز به خوبی قابل مشاهده است. بنابراین در نظرگیری این اغتشاشات به درک حرکت طبیعی ماهواره کمک کرده و به‌عنوان پارامتری اساسی در شکست یا موفقیت یک مأموریت شناخته می‌شود.

## ۷. جمع بندی

در این مقاله، استفاده از نگاشت پوانکاره به‌منظور شناسایی شرایط اولیه مدارهای متناوب لیپانوفی مسئله سه جسم محدود شده در حضور اغتشاشات هر دو سیاره اصلی پیشنهاد شد. به‌همین منظور ابتدا معادلات حرکت ماهواره در مسئله سه جسم محدود شده در حضور اغتشاشات پخیدگی با استفاده از مکانیک لاگرانژی استخراج شد. بیان شد که به دلیل عدم وجود حل حلقه-بسته برای معادلات حرکت مداری، استفاده از روش‌های عددی الزامی است. روش‌های عددی وابستگی شدید به شرایط اولیه پارامترهای حالت معادلات داشته و بسته به این مقادیر می‌توانند به حل‌های تناوبی یا شبه-تناوبی منجر شوند. بیان شد که شرایط اولیه مناسب به منظور یافتن پاسخ‌های متناوب در مطالعات قبل با یک حل تخمینی از معادلات حرکت مسئله سه

جسم محدود شده با روش مانده و استفاده از یک الگوریتم اصلاح مداری به‌دست می‌آید. یافتن شرایط اولیه مناسب با استفاده از این روش، نیازمند محاسبات ریاضی پیچیده و وقت‌گیر بود. به همین علت، در این مقاله استفاده از نگاشت پوانکاره به‌منظور یافتن شرایط اولیه مناسب مدارهای لیپانوفی متناوب پیشنهاد شد. استفاده از این روش مزیت کم کردن ابعاد سیستم، به ابعاد مورد مطالعه تحقیق و عدم نیاز به استفاده از محاسبات پیچیده ریاضی را به همراه داشت. نقاط تشکیل دهنده در مرکز و مرزهای جزایر تشکیل شده در این نگاشت به‌عنوان حدس‌های اولیه مناسب به‌منظور ملاقات پاسخ‌های انتخاب شد. در ادامه مدارهای متناوب لیپانوفی در مسئله مذکور رسم شد. متناوب بودن مدارهای رسم شده و شباهت آن‌ها به مدارهای لیپانوفی رسم شده در مسئله بدون اغتشاش و ساده نشان‌دهنده صلاحیت روش به‌کار گرفته شده بود. به‌منظور نشان دادن نقش کلیدی اغتشاشات پخیدگی در موفقیت یک مأموریت فضایی، مقایسه‌ای میان شرایط اولیه مدارهای شناسایی شده دارای تناوب یکسان با توجه به حدس‌های اولیه یکسان میان دو مدل اغتشاشی و ساده انجام شد. اختلاف میان شرایط اولیه مدارهای میان دو مدل به خوبی نشان‌دهنده تأثیر اغتشاشات مذکور بود. نشان داده شد که با افزایش زمان تناوب، اختلاف مذکور افزایش خواهد یافت. علت این امر آن بود که با افزایش زمان تناوب، در حقیقت اندازه مدار افزایش یافته و ماهواره از فاصله نزدیک‌تری نسبت به سیارات اصلی گذر کرده و در نتیجه تأثیر اغتشاشات بر مسیر حرکت آن افزایش یافته است. همچنین استفاده از شرایط اولیه مدارهای متناوب لیپانوفی مدل ساده در معادلات استخراج شده مدل دارای اغتشاش، نشان‌دهنده این موضوع بود که تأثیر



representations of the tube manifolds of the planar restricted three-body problem. *Phys D Nonlinear Phenom.* 2016;325:41-52.

7. Bakhtiari M, Daneshjou K, Abbasali E. A new approach to derive a formation flying model in the presence of a perturbing body in inclined elliptical orbit: relative hovering analysis. *Astrophys Space Sci.* 2017;362(2). doi:10.1007/s10509-016-2968-9
8. Wong B, Patil R, Misra A. Attitude dynamics of rigid bodies in the vicinity of the Lagrangian points. *J Guid Control Dyn.* 2008;31(1):252-256.
9. Farquhar RW. The Control and Use of Libration-Point Satellites, Ph. D. Dissertation, Dept. of Aeronautics and Astronautics, Stanford University. Stanford, CA, 1968. Published online 1968.
10. Farquhar RW, Kamel AA. Quasi-periodic orbits about the translunar libration point. *Celest Mech.* 1973;7(4):458-473.
11. Casal A, Freedman M. A Poincaré-Lindstedt approach to bifurcation problems for differential-delay equations. *IEEE Trans Automat Contr.* 1980;25(5):967-973.
12. Breakwell J V, Brown J V. The 'halo' family of 3-dimensional periodic orbits in the Earth-Moon restricted 3-body problem. *Celest Mech.* 1979;20(4):389-404.
13. Howell KC. Three-dimensional, periodic, 'halo' orbits. *Celest Mech.* 1984;32(1):53-71.
14. Abbasali E, Bakhtiari M. Restricted three body problem considering the perturbations of both oblate massive primaries. *J Aerosp Sci Technol.* 13(2).
15. Abbasali E, Kosari A, Bakhtiari M. Effects of oblateness of the primaries on natural periodic orbit-attitude behaviour of satellites in three body problem. *Adv Sp Res.* Published online 2021.
16. Qian Y-J, Yang X-D, Zhai G-Q, Zhang W. Planar periodic orbits' construction around libration points with invariant manifold technique. *Proc Inst Mech Eng Part G J Aerosp Eng.*

اغتشاشات پخیدگی باعث خارج شدن مدارها از فرم متناوب خواهد شد. از دیگر نتایج مهم این تحقیق، نمایش تأثیر افزایش حدس اولیه دوره تناوب بر تعداد جزایر تشکیل شده در نگاشت پوانکاره بود. داده‌های به دست آمده گویای این موضوع بود که با افزایش زمان تناوب، احتمال شناسایی مدارهای لیپانوفی کاهش خواهد یافت. این نتیجه از کاهش جزایر ظاهر شده بر نگاشت پوانکاره به دست آمد.

استفاده از نگاشت پوانکاره باعث کاهش چشم‌گیر حجم محاسبات در شناسایی شرایط اولیه مدارهای لیپانوفی مسئله سه جسم می‌شود. همچنین نشان داده شد که به کارگیری این روش در محیط‌های دارای اغتشاش نیز معتبر خواهد بود.

در نظرگیری اغتشاشات پخیدگی سیارات اصلی باعث شبیه‌سازی هرچه بیشتر محیط مورد مطالعه شده و درک بهتری از حرکت طبیعی ماهواره را به همراه خواهد داشت.

## ۸. مآخذ

1. Gardner JP, Mather JC, Clampin M, et al. The james webb space telescope. *Space Sci Rev.* 2006;123(4):485-606.
2. Krist J. In the Spirit of Bernard Lyot: The Direct Detection of Planets and Circumstellar Disks in the 21st Century, ed. *P Kalas (Berkeley, CA Univ California).* 2007;32.
3. Machula M, Sandhoo G. Rendezvous and docking for space exploration. In: *1st Space Exploration Conference: Continuing the Voyage of Discovery.* ; 2005:2716.
4. Curtis HD. *Orbital Mechanics for Engineering Students.* Butterworth-Heinemann; 2013.
5. Kunitsyn AL. The stability of triangular libration points in the photogravitational three-body problem. *J Appl Math Mech.* 2000;64(5):757-763.
6. Lega E, Guzzo M. Three-dimensional



- Model in EarthMoon Lyapunov Orbits. *J Guid Control Dyn J Guid Control Dyn*. 2015;38(7):1264-1273.
27. Guzzetti D, Howell KC. Coupled orbit-attitude dynamics in the three-body problem: A family of orbit-attitude periodic solutions. In: *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference*. ; 2014:4100.
  28. Sabzy S, Daneshjou K, Bakhtiari M. Periodic attitude motions along planar orbits in the elliptic restricted three-body problem. *Adv Sp Res*. 2021;67(8):2252-2273.
  - 2019;233(2):498-509.
  17. Singh J, Cyril-Okeme VU. Perturbed Robe's circular restricted three-body problem under an oblate primary. *New Astron*. 2015;34:114-119.
  18. Srivastava VK, Kumar J, Kushvah BS. Regularization of circular restricted three-body problem accounting radiation pressure and oblateness. *Astrophys Space Sci*. 2017;362(3):49.
  19. Markellos V V, Papadakis KE, Perdios EA. Non-linear stability zones around triangular equilibria in the plane circular restricted three-body problem with oblateness. *Astrophys Space Sci*. 1996;245(1):157-164.
  20. Singh J. Nonlinear stability in the restricted three-body problem with oblate and variable mass. *Astrophys Space Sci*. 2011;333(1):61-69. doi:10.1007/s10509-010-0572-y
  21. Zhang L, Ge P. High precision dynamic model and control considering J2 perturbation for spacecraft hovering in low orbit. *Adv Sp Res*. 2021;67(7):2185-2198.
  22. Channell Jr P, Cymbalyuk G, Shilnikov A. Applications of the poincare mapping technique to analysis of neuronal dynamics. *Neurocomputing*. 2007;70(10-12):2107-2111.
  23. Arredondo JA, Guo J, Stoica C, Tamayo C. On the restricted three body problem with oblate primaries. *Astrophys Space Sci*. 2012;341(2):315-322.
  24. Palacián JF, Yanguas P, Fernández S, Nicotra MA. Searching for periodic orbits of the spatial elliptic restricted three-body problem by double averaging. *Phys D Nonlinear Phenom*. 2006;213(1):15-24. doi:https://doi.org/10.1016/j.physd.2005.10.009
  25. Guzzetti D, Howell KC. Natural periodic orbit-attitude behaviors for rigid bodies in three-body periodic orbits. *Acta Astronaut*. 2017;130:97-113.
  26. Knutson AJ, Guzzetti D, Howell KC, Lavagna M. Attitude Responses in Coupled Orbit-Attitude Dynamical