

بررسی تأثیر خروج از مرکز و نسبت جرم‌های اصلی بر ساختار مدارهای لیپانوفی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۷/۱۰

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۰/۱۵

مجید بختیاری^۱، سیاوش سبزی^۲، کامران دانشجو^۳

۱ - استادیار، دانشکده فناوری‌های نوین، دانشگاه علم و صنعت ایران، Bakhtiari_m@iust.ac.ir

۲ - کارشناس ارشد، دانشکده فناوری‌های نوین، دانشگاه علم و صنعت ایران

۳ - استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

چکیده

هدف از این تحقیق مسئله سه جرمی محدود شده بیضوی به‌عنوان یکی از راه‌های بهبود دقت مسئله سه جرمی، مدلی برای مطالعه مسیر حرکت فضاپیما در محدوده این مسئله است که خروج از مرکز جرم‌های اصلی در آن لحاظ شده است. به‌عنوان اصلی‌ترین عامل اغتشاشی در مدل دینامیکی، خروج از مرکز جرم‌های اصلی ساختار مدارهای دوره‌ای را در مقایسه با مدل‌های ساده‌تر تغییر می‌دهد. مدارهای دوره‌ای رفتارهای تکرارشونده‌ای هستند که در آن‌ها دینامیک مدارهای فضاپیما بعد از هر دوره مداری تکرار می‌شود، این رفتارهای دوره‌ای موضوع اصلی این پژوهش هستند، زیرا برای طراحی مأموریت‌های آینده و شناسایی ساختار دینامیکی حاکم بسیار مفید هستند. علی‌رغم بررسی‌های صورت گرفته در رابطه با روش‌های یافتن مدارهای دوره‌ای صفحه‌ای و تحلیل پایداری آن‌ها در مسئله بیضوی، تأثیر به‌خصوص پارامترهای اصلی سیستم بر ساختار مدارهای لیپانوفی بررسی نشده است. این در حالی است که در این مقاله، در ابتدا حدس‌های اولیه برای الگوریتم تصحیح مداری از طریق خانواده‌های مدارهای از قبل شناسایی شده در مسئله دایروی استخراج شده است، سپس الگوریتم تصحیح برای اصلاح حدس‌های اولیه و رسیدن به مدارهای دوره‌ای صفحه‌ای مورد استفاده قرار گرفته است. مدارهای دوره‌ای استخراج شده در مسئله بیضوی با مطالعات قبلی و مدل‌های ساده‌تر مقایسه شده و در نهایت این مدارهای دوره‌ای برای سیستم‌های مختلف با مقادیر متفاوت خروج از مرکز و نسبت جرمی برای مشخص کردن تأثیر این پارامترها بر ساختار مدارها با یکدیگر مقایسه شده‌اند

واژه‌های کلیدی: مسئله سه‌جرمی محدود شده بیضوی، دینامیک آشوب، نقاط لاگرانژی، مدارهای دوره‌ای

Investigating the effect of eccentricity and mass ratio of primaries on the structure of lyapunov orbits

Majid Bakhtiari¹, Siavash Sabzy², Kamran Daneshjou³

1 Assistant Professor, School of New Technologies, Iran University of Science and Technology; Bakhtiari_m@iust.ac.ir

2 Graduated Student, School of New Technologies, Iran University of Science and Technology; siavash_sabzy@alumni.iust.ac.ir

3 Professor, Department of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology; kjoo@iust.ac.ir

Abstract

In this Elliptic Restricted Three-Body Problem (ERTBP) is one of the ways to improve the accuracy of the three-body problem and a model for studying the trajectory of the spacecraft in the range of this problem in which the eccentricity of the primaries is considered. As the main perturbation factor in the dynamic model, the eccentricity of the primaries changes the structure of the periodic orbits compared to the simpler models. Periodic orbits are repetitive behaviors in which the orbital dynamics of the spacecraft are repeated after each orbital period. These periodic behaviors are the main subject of this research, as they are beneficial for designing future space missions and identifying the governing dynamic structure. Despite the studies on the methods of finding planar orbits and analyzing their stability in the ERTBP, the effect of the main parameters of the systems on the structure of Lyapunov orbits has not been studied. However, in this paper, first, the initial guesses for the orbital correction algorithm are extracted through the families of orbits already identified in the circular problem, then the correction algorithm is used to correct the initial guesses. The periodic orbits extracted in the elliptical problem are compared with previous studies and simpler models, and finally, these periodic orbits for different systems with different values of eccentricity and mass ratio are compared to determine the effect of these parameters on their structure.

Keywords: ER3BP - Complex Dynamics - Lagrangian Points - Periodic Orbits - Three-Body Problem

۱۵۳

سال ۱۱ - شماره ۲

پاییز و زمستان ۱۴۰۱

نشریه علمی

دانش و فناوری هوا فضا



۱. مقدمه

پژوهش‌های اخیر که در حوزه آسترو دینامیک (اخترپویاشناسی) و مکانیک مداری صورت گرفته است، اطلاعات مفیدی را برای طراحی مأموریت‌های نوین فضایی فراهم آورده است. مهم‌ترین مأموریت‌های اخیر فضایی و مأموریت‌های در دست اجرا، برای نقاط لاگرانژی یا حول این نقاط مطرح شده‌اند. نقاط لاگرانژی یا نقاط تعادل، نقاطی در مسئله سه‌جرمی محدود شده هستند که برآیند نیروهای گرانشی و گریز از مرکز، صفر می‌شود و فضاپیما می‌تواند با صرف کمترین میزان سوخت در این نقاط بماند یا حول آن‌ها بچرخد. مسئله دایروی که یک مدل ساده‌شده برای بررسی دینامیک سیستم‌های چندجرمی است، مدل مرجع اغلب مطالعات صورت گرفته در این حوزه است. پژوهش‌های زیادی در بررسی مسیر حرکت فضاپیما در این مدل صورت گرفته است [۱]–[۵]، در تمامی این پژوهش‌ها فضاپیما به صورت جرم نقطه‌ای در نظر گرفته شده است، همچنین برای استخراج مداری‌های دوره‌ای در مسئله دایروی از روش‌های متنوع اصلاح دیفرانسیلی استفاده شده است [۶]. با وجود این، مدل دقیق‌تر و کلی‌تر برای بررسی حرکت مداری سه‌جرمی، مدل سه‌جرمی محدود شده بیضوی است که خروج از مرکز اجرام اصلی درگیر را در نظر می‌گیرد [۷]، [۸]. حرکت مداری فضاپیما در مسئله بیضوی نیز به صورت وسیع [۹]–[۱۲] به خصوص در دهه‌های گذشته [۱۳]–[۱۵] بررسی شده است. در این پژوهش‌ها تأثیر پارامترهای اجرام اصلی برای سیستم‌های به خصوص هدف پژوهش‌ها نبوده و اغلب به بررسی روش‌های ممکن استخراج مدارها و تحلیل پایداری آن‌ها پرداخته‌اند [۱۶]. در این مقاله، تأثیر پارامترهای اصلی مسئله سه‌جرمی محدود شده بیضوی بر مسیر حرکت فضاپیما در مدارهای دوره‌ای صفحه‌ای بررسی شده است، از

سیستم‌های سه‌جرمی منظومه شمسی به‌عنوان مطالعه موردی به سبب تنوع مناسب در این پارامترها استفاده شده است. نتایج این پژوهش می‌تواند به‌عنوان اساس استخراج مدارهای دوره‌ای سه‌بعدی (برون صفحه‌ای) [۱۷]، تحلیل رفتار سیستم‌های سه‌جرمی با مقدار خروج از مرکز بالا و در نهایت به‌عنوان موده‌ای ایمن عملیاتی استفاده شود.

در این پژوهش، در گام اول، معادلات حرکت فضاپیما در مسئله بیضوی بیان شده، سپس مدارهای دوره‌ای مختلف در سیستم‌های متنوع با استفاده از یک روش اصلاح دیفرانسیلی استخراج شده است. سپس این مدارها با هدف بررسی تأثیر نسبت جرمی و خروج از مرکز جرم‌های اصلی با همدیگر مقایسه شده‌اند.

۲. روش حل

در این بخش، مراحل اصلی استخراج و تحلیل مدارهای لیپانوفی بیان شده است؛ که به دو گام اصلی تقسیم می‌شود: استخراج مدارهای دوره‌ای در مسئله سه‌جرمی محدود شده بیضوی و تحلیل این مدارها بر اساس ویژگی‌های سیستم جرم‌های اصلی. بر همین اساس، در ابتدا دستگاه‌های مختصاتی تعریف شده‌اند، سپس دینامیک مداری فضاپیما در مسئله سه‌جرمی محدود شده بیضوی استخراج شده است، بعد از آن تشدیدهای مداری در مسئله سه‌جرمی محدود شده دایروی به‌عنوان حدس اولیه الگوریتم تصحیح به کار گرفته شده‌اند تا مدارهای دوره‌ای در مسئله بیضوی استخراج شوند. در پایان استخراج این مدارها برای سیستم‌های مختلف با نسبت جرمی و خروج از مرکز متفاوت توسعه داده شده است و حرکت‌های مداری دوره‌ای به دست آمده برای سیستم‌های مختلف تحلیل و بررسی شده است.

مدل سه‌جرمی محدود شده بیضوی، یک مدل ریاضی برای بیان حرکت جرم ناچیز (فضاپیما) در

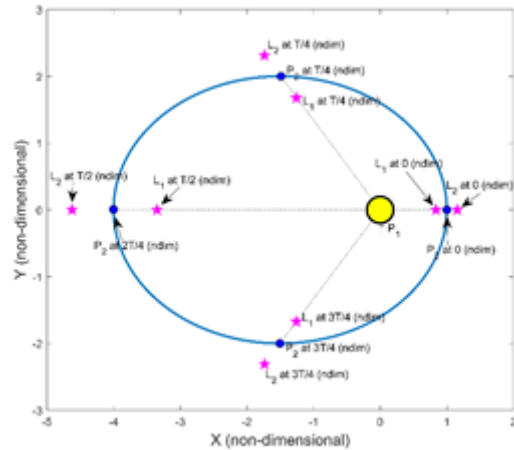


۲-۱. دستگاه‌های مختصات

برای بررسی هر چه بهتر مسئله، چهار دستگاه مختصات تعریف می‌شوند، مرکز دستگاه‌های مختصات اینرشیال، چرخشی و دستگاه مختصات چرخشی تپشی، مرکز جرم سیستم جرم‌های اصلی است. دو جرم اصلی حول مرکز جرم در مدارهای بیضوی می‌چرخند و فاصله آن‌ها از یکدیگر در طول زمان تغییر می‌کند، همان‌طور که در شکل ۲ نشان داده شده است، محور \hat{Z} چارچوب اینرشیال، عمود بر صفحه‌ای است که دو جرم اصلی را در بر دارد، محور \hat{X} این چارچوب در زمان اولیه منطبق بر محور کشیده شده از جرم M_1 به جرم M_2 است و محور \hat{Y} طوری است که دستگاه مختصات راست‌گرد تشکیل شود.

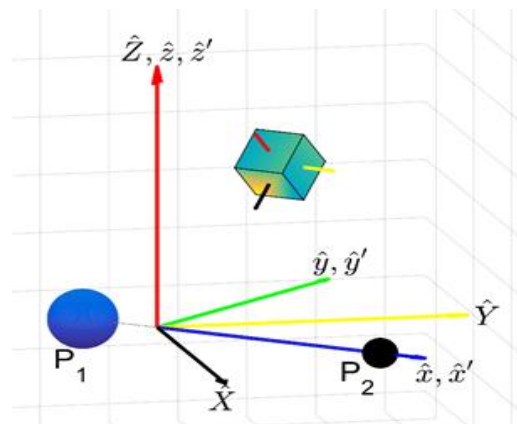
چارچوب مختصات اینرشیال، همراه با جرم‌های اصلی نمی‌چرخد، اما دستگاه‌های مختصات چرخشی و چرخشی تپشی همراه با جرم‌های اصلی حول مرکز جرم سیستم به سرعت دورانی ثابت Ω می‌چرخند، محور \hat{z} دستگاه مختصات چرخشی و محور \hat{z}' دستگاه مختصات چرخشی تپشی، همواره منطبق بر محور \hat{Z} دستگاه مختصات اینرشیال هستند، محور \hat{x} دستگاه مختصات چرخشی و محور \hat{x}' دستگاه مختصات چرخشی تپشی، همواره از جرم M_1 به جرم M_2 کشیده شده‌اند، تفاوت دو دستگاه مختصات چرخشی و چرخشی تپشی در این است که فاصله دو جرم اصلی در دستگاه مختصات چرخشی تپشی همواره ثابت است و تغییر نمی‌کند، درحالی‌که فاصله آن‌ها در دستگاه مختصات چرخشی در طول زمان ثابت نمی‌ماند، و به‌صورت دوره‌ای تغییر می‌کند. درواقع اندازه واحدها روی محور \hat{x}' در طول زمان به‌صورت تپشی نسبت به چارچوب اینرشیال و چارچوب چرخشی کم و زیاد می‌شوند. محور \hat{y} دستگاه مختصات چرخشی و محور \hat{y}' دستگاه مختصات

میدان گرانشی دو جرم اصلی است. در این مدل، حرکت فضایی متأثر از جاذبه اجرام اصلی است، درحالی‌که بر حرکت آن‌ها تأثیری نمی‌گذارد. همچنین، فرض شده که جرم‌های اصلی در مدارهای بیضوی حول مرکز جرم سیستم در حال گردش هستند.



شکل ۱- نمایش شماتیک حرکت اجرام اصلی در مسئله سه‌جرمی محدودشده بیضوی (جرم اصلی کوچک‌تر و نقاط لاگرانژی ۱ و ۲ در چهار زمان متفاوت نشان داده شده‌اند).

به طبع در این مدل فاصله بین جرم‌های اصلی با یکدیگر، فاصله بین نقاط لاگرانژی و جرم‌های اصلی در طول زمان تغییر می‌کند (شکل ۱). این فرضیه‌ها، دینامیک مسئله را پیچیده‌تر و به محیط واقعی نزدیک‌تر می‌کند. در ادامه دستگاه‌های مختصات مربوطه تعریف شده‌اند.



شکل ۲- نمایش چارچوب‌های مختصات در مسئله سه‌جرمی محدودشده بیضوی



چرخشی تپشی، طوری هستند که دستگاه مختصات راست‌گرد در هر دو مورد تشکیل شود. مرکز دستگاه مختصات بدنه، مرکز جرم فضاپیما یا M_p است و محورهای آن $(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3)$ منطبق بر محورهای اصلی اینرسی بدنه هستند.

قبل از استخراج معادلات حرکت مداری، پارامترهای درگیر در مسئله بی‌بعد می‌شوند. سیستم با کمیت‌های زیر به‌عنوان واحد، بی‌بعد می‌شود: مجموع جرم سیستم m ، فاصله بین مرکز جرم جرم‌های اصلی، فرکانس زاویه‌ای سیستم جرم‌های اصلی و ثابت جهانی گرانش. طول، سرعت و زمان با روابط زیر قابل تبدیل هستند:

$$\begin{aligned} l' &= Ll \\ v' &= \frac{L}{T} v \\ t' &= \frac{T}{2\pi} t \end{aligned} \quad (1)$$

در معادله بالا، کمیت‌های بدون علامت پرایم (l')، کمیت‌های بدون بعد (نرمال شده) هستند و کمیت‌های با علامت پرایم، کمیت‌های بعددار هستند. L ، فاصله دارای بعد بین جرم‌های اصلی است، دوره مداری سیستم جرم‌های اصلی است. پس از بی‌بعد سازی سیستم، تنها پارامترهایی که سیستم را در مسئله بیضوی تعریف می‌کنند، خروج از مرکز سیستم e ، و نسبت جرمی سیستم μ هستند. نسبت جرم سیستم عبارت است از، نسبت جرم دومین جرم اصلی (کوچک‌تر)، m_2 ، به مجموع جرم سیستم؛ این پارامتر همچنین موقعیت جرم‌های اصلی را نسبت به همدیگر مشخص می‌کند.

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (2)$$

معادلات حرکت فضاپیما در مسئله سه‌جرمی محدودشده بیضوی نسبت به چارچوب چرخشی به‌صورت زیر است [۶]:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = U_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = U_y \\ \ddot{z} = U_z \end{cases} \quad (3)$$

در معادله بالا، مشتق نسبت به انحراف واقعی سیستم جرم‌های اصلی گرفته شده است، U ، تابع پتانسیل سیستم است و U_a ، نشان‌دهنده مشتق تابع پتانسیل نسبت به متغیر a است. تابع پتانسیل برای این مسئله به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U = \frac{1}{1 + e \cos t} \left[\frac{1}{2} (x^2 + y^2 - z^2 e \cos t) + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right] \quad (4)$$

که در آن، r_1 و r_2 به ترتیب فاصله فضاپیما از جرم‌های اصلی m_1 و m_2 هستند، که نسبت به چارچوب چرخشی بیان می‌شوند، به‌عبارت‌دیگر r_1 و r_2 به ترتیب اندازه بردارهای $r_1 = [x + \mu; y; z]$ و $r_2 = [x + \mu - 1; y; z]$ هستند.

در محل‌های خاص از ساختار فضایی تعریف‌شده در فریم چرخشی تپشی، برآیند نیروهای گرانشی اعمال‌شده به فضاپیما و نیروهای گریز از مرکز فضاپیما، همدیگر را خنثی می‌کنند و فضاپیمایی که در این محل‌ها قرار می‌گیرد، تعادل خود را حفظ خواهد کرد. موقعیت این نقاط تعادل با استفاده از بردار ρ_{eq} شناسایی می‌شود، این بردار را می‌توان به‌صورت $\nabla U(\rho_{eq}) = 0$ تعریف کرد. نقاط لاگرانژی اغلب به دو دسته اصلی تقسیم می‌شوند: دسته اول، نقاط هم‌راستا هستند، که روی محور واصل بین جرم‌های اصلی قرار دارند. به‌طور خاص، نقطه تعادل مابین جرم‌های اصلی، L_1 نام‌گذاری شده است، نقطه تعادل بعد از جرم اصلی کوچک‌تر L_2 و نقطه تعادل قبل از جرم اصلی بزرگ‌تر L_3 نام دارد. دسته دوم نقاط تعادل (L_4 و L_5)، رأس سوم متساوی‌الاضلاع‌هایی هستند که در رئوس دیگر این مثلث‌ها، جرم‌های اصلی قرار دارند. دسته دوم نقاط تعادل را نقاط لاگرانژی کران برابر می‌نامیم.

مدارهای دوره‌ای در مسئله بیضوی، با استفاده از الگوریتم‌های تصحیح مربوطه قابل استخراج هستند، مهم‌ترین چالش در استفاده از این الگوریتم‌ها دقت حدس اولیه الگوریتم است. همان‌طور که پیش‌ازاین نیز اشاره شد، برای اینکه یک مدار در مسئله دایروی دوره‌ای شود، بردار حالت شش پارامتری مداری باید بعد از دوره‌ای مداری تکرار شود، به طبع، مسئله دایروی بی‌نهایت مدار دوره‌ای دارد که در قالب گروه‌ها با دوره‌های مداری مختلف در هر گروه، دسته‌بندی می‌شوند. این پیوستگی در مدارهای دوره‌ای برای مسئله بیضوی وجود ندارد، به سبب وجود وابستگی صریح به زمان در معادلات حرکت، شرایط دوره‌ای شدن مدار در این مسئله، متفاوت است، در واقع، تکرار تنها شش پارامتر مداری کافی نیست، بلکه، کل دینامیک سیستم که شامل حرکت جرم‌های اصلی نیز است، باید تکرار شود. به همین دلیل مسئله بیضوی تنها تعداد محدودی مدار دوره‌ای دارد. از آنجاکه وابستگی به زمان مسئله، به سبب حرکت جرم‌های اصلی است، مدارهای دوره‌ای در مسئله بیضوی همواره دوره مداری بخش‌پذیر با دوره مداری جرم‌های اصلی دارند. همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد، دوره مداری جرم‌های اصلی در واحد بی‌بعد، 2π است، بنابراین، دوره مدارها در مسئله بیضوی $T = 2\pi N$ است که $N \in \mathbb{N}^+$ است. این مدارها در مسئله دایروی با عنوان تشدید مداری شناخته می‌شوند.

تشدیدهای مداری در سیستم‌های سه جرمی ارائه شده در جدول ۱، حدس‌های اولیه برای مدارهای دوره‌ای در مسئله بیضوی در چارچوب همان سیستم‌ها هستند. برای مدارهای هاله‌ای تشدید مداری ۱:۳ و ۲:۵ در نقاط لاگرانژی ۱ و ۲ برای هر دو سیستم وجود دارد. پایداری این نقاط برای سیستم زمین-ماه بیشتر است و تشدیدهای ۲:۷ و ۱:۲ برای این سیستم علاوه بر تشدیدهای

قبلی وجود دارد. تشدید مداری ۱:۱ برای نقطه لاگرانژی ۱، مشاهده شده و تشدیدهای مداری با دوره مشابه در نقطه لاگرانژی ۳، وجود دارد. در مورد مدارهای لیپانوفی و دورگرد می‌توان گفت، تشدید مداری ۲:۳ برای مدارهای لیپانوف در نقاط لاگرانژی ۱ و ۲ در همه سیستم‌ها وجود دارد و تشدید مداری ۱:۲ هم برای مدارهای لیپانوف و هم مدارهای دورگرد در همین نقاط مشاهده شده است. شکل ۳، تشدیدهای مداری معمول را در سیستم‌های مختلف حول نقاط لاگرانژی ۱ و ۲ نشان می‌دهد. این مدارات حدس‌های اولیه مورد استفاده در ادامه پژوهش هستند.

۲-۲. ماتریس انتقال حالت

ماتریس انتقال حالت معادلات مداری مسئله بیضوی، در الگوریتم تصحیح برای یافتن شرایط اولیه دقیق برای مدارهای دوره‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد. با در نظر گرفتن بردار حالت، $X = [x; y; z; \dot{x}; \dot{y}; \dot{z}]$ ، معادلات تغییرات مربوط به مسئله به صورت زیر است [۱۴]، [۱۶]:

$$\delta \dot{X} = A(x, t) \delta X \quad (۵)$$

که در آن، $A(t)$ ، ماتریس ژاکوبین سیستم معادلات مداری مسئله بیضوی است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A(x, t) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ U_{xx} & 2\Omega_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (۶)$$

ماتریس معادله بالا، یک ماتریس 6×6 است که از چهار ماتریس 3×3 تشکیل شده است. ماتریس صفر، ماتریس همانی، ماتریس مشتقات جزئی دوم U و ماتریس 2Ω که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$2\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۷)$$

در نهایت، ماتریس انتقال حالت $\Phi(t, t_0)$ ، با حل دستگاه معادلات زیر محاسبه می‌شود.





$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0) \\ \Phi(t_0, t_0) = I \end{cases} \quad (8)$$

مدارهای دوره‌ای در مسئله بیضوی با شروع از مدارهای دوره‌ای در مسئله دایروی و با روش تصحیح دیفرانسیلی به دست می‌آیند. با ارجاع به روش آینه‌ای [۱۸]، الگوریتم تصحیح دیفرانسیلی برای به دست آوردن دو عبور متوالی از صفحه (\hat{X}, \hat{Z}) استفاده شده است. در واقع از یک الگوریتم هدف‌گیری زمان ثابت استفاده شده است، این الگوریتم برای به دست آوردن مدارهای دوره‌ای در مسئله دایروی توسط هاول [۱۹] و در مسئله بیضوی توسط فراری [۱۴] استفاده شده است. حدس اولیه که در الگوریتم استفاده می‌شود، در صفحه (\hat{X}, \hat{Z}) ، در زمانی که جرم‌های اصلی در اوج یا حضیض هستند، قرار دارد. الگوریتم‌های تصحیح، عبورهای بعدی از صفحه (\hat{X}, \hat{Z}) را هدف قرار می‌دهند، این عبورها در π یا ضریبی از π رخ می‌دهند. در این زمان‌ها جرم‌های اصلی دوباره در اوج یا حضیض هستند. زمان بین دو عبور متوالی از صفحه (\hat{X}, \hat{Z}) ، نصف دوره مداری است. در برخی موارد، یافتن نصف مدار دوره‌ای کافی است، مدار دوره‌ای با انتگرال‌گیری از همان شرایط اولیه برای یک دوره به دست می‌آید. با ارجاع به [۱۱]، [۱۴]، [۱۹]، [۲۰]، بردار متغیرهای حالت در این پژوهش به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\mathcal{X} = [x_0; z_0; \dot{y}_0] \quad (9)$$

که در آن، زیروند صفر (0)، نشان‌دهنده شرایط در زمان اولیه t_0 است که در انحراف واقعی صفر جرم‌های اصلی رخ می‌دهد. در پایان مسیر (حداقل یک نصفه مداری)، شرایط معادله محدودکننده باید ارضا شود. معادله محدودکننده طوری تعریف می‌شود که مدار دو عبور از صفحه (\hat{X}, \hat{Z}) داشته باشد.

$$F(\mathcal{X}) = [y_h; \dot{x}_h; \dot{z}_h] \quad (10)$$

که در آن، زیروند h نشان‌دهنده حالت بعد از نیمه مدار است. حال، هدف، یافتن پاسخی است که بردار حالت شرایط معادله محدودکننده را برقرار کند، پاسخ را می‌توان از روش چند متغیره نیوتن محاسبه کرد [۱۴]، [۱۶]، [۲۱]:

$$\mathcal{X}_{k+1} = \mathcal{X}_k - J(\mathcal{X}_k, t)^{-1} F(\mathcal{X}_k) \quad (11)$$

که در آن، زیروند k ، نشان‌دهنده حالت کنونی و زیروند $k+1$ ، نشان‌دهنده حالت بعدی است. ماتریس ژاکوبین مسئله با محاسبه مشتق المان‌های معادله محدودکننده نسبت به المان‌های بردار حالت به دست می‌آید.

۳. نتایج و بحث

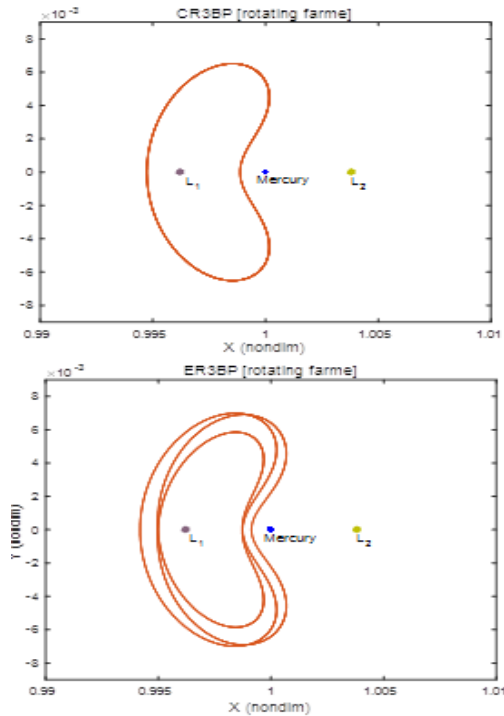
این قسمت یافته‌های اصلی پژوهش را در رابطه با حرکت‌های دوره‌ای مداری در مسئله سه‌جرمی محدود شده بیضوی بیان می‌کند.

جدول ۱- پارامترهای سیستم‌های سه‌جرمی

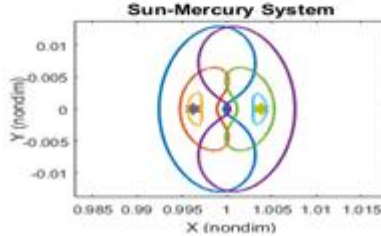
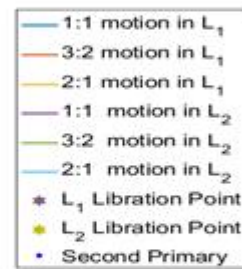
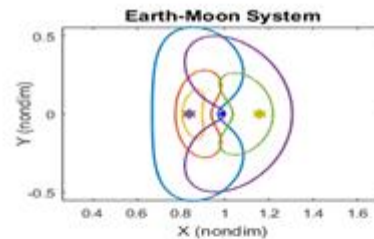
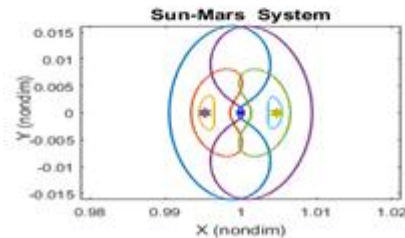
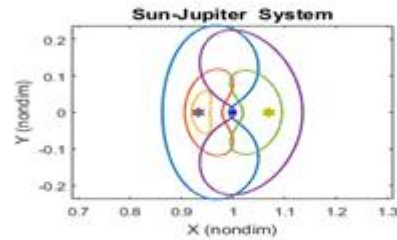
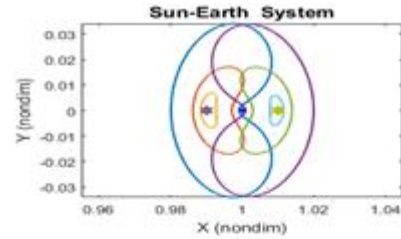
System	μ (ndim)	e (ndim)	L (km or AU)
Sun-Mercury	1.660 e-7	0.2 056	0.387 AU
Sun-Earth	3.00 e-6	0.0 167	1 AU
Sun-Mars	3.227 e-7	0.0 933	1.523 AU
Sun-Jupiter	9.536 e-4	0.0 483	5.202 AU
Earth-Moon	1.215 e-2	0.0 549	384400 km

برای استخراج مدارهای دوره‌ای در مسئله بیضوی حدس‌های اولیه که تشدیدهای مداری در مسئله دایروی هستند (شکل ۳) با استفاده از الگوریتم پیشنهادی، اصلاح شده‌اند. به طبع خروجی الگوریتم اصلاح، مدارهای دوره‌ای صفحه‌ای در مسئله بیضوی هستند. تفاوت بین تشدیدهای مداری همسان در دو مسئله دایروی و بیضوی نسبت به فریم چرخشی در شکل ۴ نشان داده شده است. فاصله بین جرم‌های اصلی در مسئله بیضوی ثابت نیست و از طرفی، دلیل اصلی تغییر ساختار مدارها برهم‌کنش گرانشی اجرام

اصلی است؛ شکل ۵ این تغییر شکل را نسبت به فرم چرخشی تپشی نشان می‌دهد.



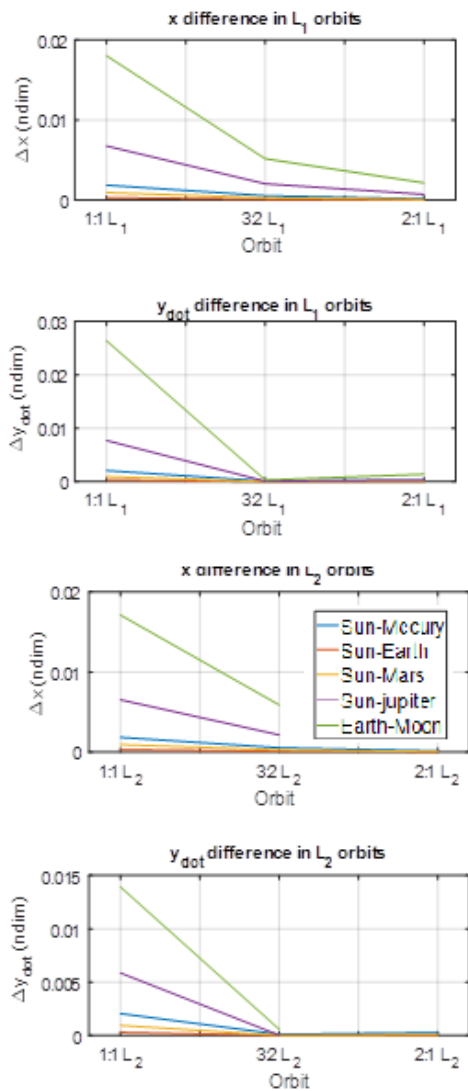
شکل ۴- تشدید مداری ۳:۲ در سیستم زمین-عطارد برای دو مدل بیضوی (سمت راست) و دایروی (سمت چپ) نسبت به فریم چرخشی



شکل ۳- تشدیدهای مداری معمول در مدل دایروی برای سیستم‌های مختلف نسبت به فریم چرخشی

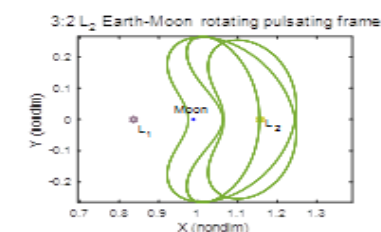
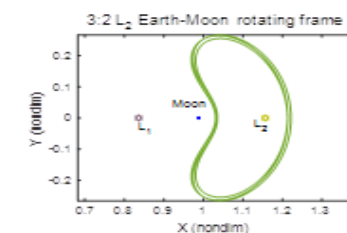
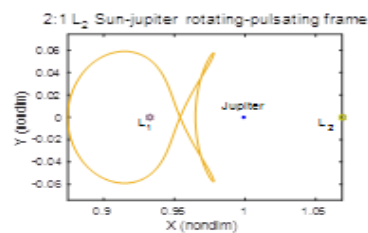
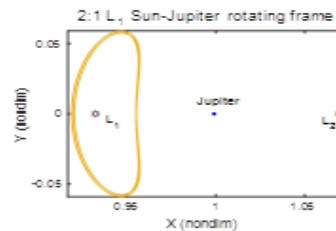
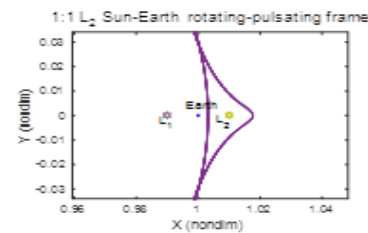
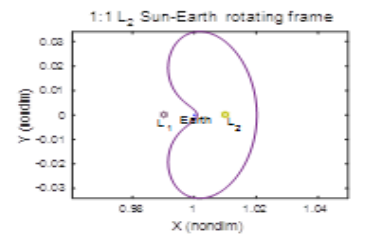
همان‌طور که در شکل ۴ نشان داده شده است، در فریم چرخشی ساختار مدار در مدل بیضوی نسبت به مدل دایروی، به دلیل وجود خروج از مرکز اجرام اصلی، تغییر می‌کند. اگر موقعیت اجرام اصلی را متغیر (فریم چرخشی-تپشی) در نظر بگیریم، ساختار مدار به‌طور اساسی تغییر می‌کند (شکل ۵). انواع مختلفی از حرکات دوره‌ای مداری در اطراف نقاط لاگرانژی در مدل بیضوی وجود دارد، باین‌حال، هیچ خانواده مداری مانند آنچه برای مدل دایروی وجود داشت، وجود ندارد. در مدل دایروی برای هر دو مدار با دوره‌های مشخص در اطراف یکی از نقاط لاگرانژی، تعداد نامحدودی از مدارها با دوره‌های مداری بین آن‌ها وجود دارد، درحالی‌که در مدل بیضوی مدارهای دوره‌ای فقط با دوره‌های مداری خاص وجود دارد.

آنچه در شکل ۵ ارائه شده، تفاوت اساسی ساختار مدارها در دو فریم مرجع این پژوهش را نشان می‌دهد.



شکل ۶- تفاوت بین شرایط اولیه مدارهای دوره‌ای در دو مدل دایروی و بیضوی

با توجه به این‌که فاصله مابین اجرام اصلی در حالت واقعی و مسئله بیضوی در طول زمان ثابت نیست، مدارهای دوره‌ای از جمله مدارهای لیپانوفی نسبت به فریم چرخشی تپشی نمایش داده می‌شوند. در بررسی‌های صورت گرفته در این پژوهش مشخص شد، هرچه خروج از مرکز یک سیستم بالاتر باشد، مدارهای لیپانوفی در راستای محور x' کشیده‌تر می‌شوند و از پایداری آن‌ها در اغلب موارد کاسته می‌شود [۱۴]. هرچند که به‌صورت نمایشی، تفاوت ساختار مدارهای همسان در دو مدل متفاوت، مشخص است، اما



شکل ۵- مدارهای مختلف در مدل بیضوی برای سیستم‌های متنوع نسبت به فریم چرخشی (بالا) و فریم چرخشی تپشی (پایین)

شیوه بهتر نشان دادن این تمایز با روش‌های عددی است که در ادامه به آن اشاره شده است.

تفاوت بین مدارها در مدل دایروی و بیضوی به صورت عددی بررسی شده است و نتایج مقایسه در شکل ۶ آمده است. نتایج این بررسی نشان می‌دهد که به ازای تشدیدهای مداری که در مدل دایروی برای همه سیستم‌ها رخ می‌دهد، مدارهای دوره‌ای در مدل بیضوی وجود دارد. از سوی دیگر، درجایی که تشدید مداری خاص در سیستم به خصوص در مدل دایروی وجود نداشته باشد، تلاش برای یافتن مدار دوره‌ای مربوطه در مدل بیضوی بی‌نتیجه است. از آنجاکه در مسئله بیضوی، مدارهای لیپانوفی با x و y مشخص می‌شوند، تفاوت بین این مقادیر در دو مدل یادشده می‌تواند نشان‌دهنده تغییر ساختار حرکت‌های دوره‌ای مداری به سبب خروج از مرکز باشد.

نسبت جرم تأثیر قابل توجهی بر شکل مدار در مدل بیضوی دارد، بنابراین نمی‌توان از این مسئله در زمان بررسی اثر خروج از مرکز چشم‌پوشی کرد. برای بررسی اثر خروج از مرکز، سیستم‌هایی با نسبت جرم نزدیک و مقادیر گریز از مرکز متفاوت با یکدیگر مقایسه شده‌اند. به عنوان مثال، تفاوت نسبت جرمی خورشید-زمین و خورشید-عطارد $(ndim)$ 2.834×10^{-7} است، در حالی که تفاوت بین پارامتر خروج از مرکز آن‌ها $(ndim)$ 0.189 است، بنابراین با مقایسه مدارهای این دو سیستم در مدل بیضوی، تأثیر خروج از مرکز بر ساختار مدارها قابل مشاهده است. مطابق شکل ۶، تفاوت بین x و y در سیستم‌هایی با نسبت جرمی بزرگ‌تر، بیشتر است و این خود تأثیر نسبت جرمی را بر شرایط اولیه مداری نشان می‌دهد. از سوی دیگر، سیستم خورشید-عطارد، اگرچه کمترین نسبت جرمی را دارد، اما تفاوت بین x و y در این سیستم بیشتر از سیستم‌های خورشید-مریخ و خورشید-زمین

است. این نشان‌دهنده تأثیر خروج از مرکز بر ساختار مدارهای لیپانوفی است. در واقع، مقدار خروج از مرکز بالای این سیستم باعث شده است که علی‌رغم نسبت جرمی پایین آن مدارهای لیپانوفی تغییر شکل اساسی داشته باشند. در مقابل، در سیستمی مانند خورشید-مریخ تفاوت ساختار مدار به سبب مقدار خروج از مرکز کوچک‌تر، در مقایسه با سیستم خورشید-عطارد بسیار کمتر است.

۴. نتیجه‌گیری

در این تحقیق، ابتدا برخی مدارهای دوره‌ای صفحه‌ای در مدل بیضوی از طریق الگوریتم تصحیح شناسایی شده و تأثیر پارامترهای مختلف سیستم بررسی شد. نتایج این بررسی نشان می‌دهد که پارامترهای اصلی تأثیرگذار بر ساختار مدارهای دوره‌ای در مسئله بیضوی نسبت جرمی و خروج از مرکز اجرام اصلی است. همچنین مشخص شد که خروج از مرکز اجرام اصلی در سیستم‌ها با نسبت جرمی نزدیک، به شدت ساختار مدارها را تحت تأثیر قرار می‌دهد که این تغییر ساختار با مقدار خروج از مرکز نسبت مستقیم دارد. مدارهای دوره‌ای طبیعی اطلاعات ارزشمندی هستند که کنترل مداری فضاپیماها را تسهیل می‌کنند. فرض مسئله‌ای که در این مقاله در نظر گرفته شده است، به شرایط مأموریت واقعی نزدیک‌تر است، بنابراین، این نتایج می‌توانند برای طراحی مأموریت‌های فضایی استفاده شوند. تحقیقات بیشتر می‌تواند با در نظر گرفتن ابعاد فضاپیما برای یافتن پاسخ‌های دوره‌ای مرتبط با مدار و وضعیت در مدل بیضوی صورت گیرد.

۵. مأخذ

[1] G. Gomez, Dynamics and mission design near libration points. Singapore; River Edge, NJ: World Scientific, 2001.



- <https://doi.org/10.1016/j.physd.2005.10.009>.
- [11] S. Sabzy, K. Daneshjou, and M. Bakhtiari, "Periodic attitude motions along planar orbits in the elliptic restricted three-body problem," *Adv. Sp. Res.*, 2021, doi: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2021.01.019>.
- [12] D. Koh and R. Anderson, "Periodic Orbit-Attitude Solutions in the Planar Elliptic Restricted Three-Body Problem," *J. Guid. Control. Dyn.*, vol. 41, pp. 1–14, Dec. 2017, doi: [10.2514/1.G002885](https://doi.org/10.2514/1.G002885).
- [13] J. Parker and R. Anderson, *Low-Energy Lunar Trajectory Design*. 2014.
- [14] F. Ferrari and M. Lavagna, "Periodic motion around libration points in the Elliptic Restricted Three-Body Problem," *Nonlinear Dyn.*, vol. 93, no. 2, pp. 453–462, 2018, doi: [10.1007/s11071-018-4203-4](https://doi.org/10.1007/s11071-018-4203-4).
- [15] W.-H. Chen, C.-C. Wang, C.-I. Hung, C.-C. Yang, and R.-C. Juang, "Modeling and simulation for the design of thermal-concentrated solar thermoelectric generator," *Energy*, vol. 64, pp. 287–297, 2014, doi: <https://doi.org/10.1016/j.energy.2013.10.073>.
- [16] R. Neelakantan and R. V Ramanan, "Design of multi-revolution orbits in the framework of elliptic restricted three-body problem using differential evolution," *J. Astrophys. Astron.*, vol. 42, no. 1, p. 5, 2021, doi: [10.1007/s12036-020-09651-w](https://doi.org/10.1007/s12036-020-09651-w).
- [17] M. J. Idrisi and M. S. Ullah, "Out-of-plane equilibrium points in the elliptic restricted three-body problem under albedo effect," *New Astron.*, vol. 89, p. 101629, 2021, doi: <https://doi.org/10.1016/j.newast.2021.101629>.
- [18] A. E. Roy and M. W. Ovenden, "On the Occurrence of Commensurable Mean Motions in the Solar System: The Mirror Theorem," *Mon. Not. R. Astron.*
- [2] W. S. Koon, M. W. Lo, J. E. Marsden, and S. D. Ross, "Dynamical systems, the three-body problem and space mission design," 2000.
- [3] D. C. Folta, N. Bosanac, D. Guzzetti, and K. C. Howell, "An Earth-Moon system trajectory design reference catalog," *Acta Astronaut.*, vol. 110, pp. 341–353, 2015.
- [4] J. Simo and C. R. McInnes, "Solar sail orbits at the Earth–Moon libration points," *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 14, no. 12, pp. 4191–4196, 2009, doi: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2009.03.032>.
- [5] E. E. Zotos, "Classifying orbits in the restricted three-body problem," *Nonlinear Dyn.*, vol. 82, no. 3, pp. 1233–1250, 2015, doi: [10.1007/s11071-015-2229-4](https://doi.org/10.1007/s11071-015-2229-4).
- [6] K. Oshima, "Continuation and stationkeeping analyses on planar retrograde periodic orbits around the Earth," *Adv. Sp. Res.*, 2021, doi: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2021.12.020>.
- [7] G. Katsiaris, "The Three-Dimensional Elliptic Problem BT - Recent Advances in Dynamical Astronomy," 1973, pp. 118–134.
- [8] G. Macris, G. A. Katsiaris, and C. L. Goudas, "Doubly-symmetric motions in the elliptic problem," *Astrophys. Space Sci.*, vol. 33, no. 2, pp. 333–340, 1975, doi: [10.1007/BF00640102](https://doi.org/10.1007/BF00640102).
- [9] M. Ollé and J. Pacha, "The 3D elliptic restricted three-body problem: Periodic orbits which bifurcate from limiting restricted problems: Complex instability," *Astron. Astrophys.*, vol. 351, p. 1149, Nov. 1999.
- [10] J. F. Palacián, P. Yanguas, S. Fernández, and M. A. Nicotra, "Searching for periodic orbits of the spatial elliptic restricted three-body problem by double averaging," *Phys. D Nonlinear Phenom.*, vol. 213, no. 1, pp. 15–24, 2006, doi: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2005.10.009>.



Soc. Mon. Not. R. Astron. Soc., vol. 115, no. 3, pp. 296–309, 1955.

[19]K. Connor Howell, “Three-dimensional, periodic, ‘halo’ orbits,” *Celest. Mech.*, vol. 32, no. 1, pp. 53–71, 1984, doi: 10.1007/BF01358403.

[20]E. Abbasali, A. Kosari, and M. Bakhtiari, “Effects of oblateness of the primaries on natural periodic orbit-attitude behaviour of satellites in three body problem,” *Adv. Sp. Res.*, vol. 68, no. 11, pp. 4379–4397, 2021, doi: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2021.08.026>.

[21]L. Bucci, M. Lavagna, D. Guzzetti, and K. Howell, “Periodic orbit-attitude solutions along planar orbits in a perturbed circular restricted three-body problem for the Earth-Moon system,” *Acta Astronaut.*, vol. 147, Mar. 2018, doi: 10.1016/j.actaastro.2018.03.042.

۱۶۳

سال ۱۱ - شماره ۲

پاییز و زمستان ۱۴۰۱

نشریه علمی

دانش و فناوری هوا فضا



بررسی تأثیر خروج از مرکز و نسبت جرمی جرم‌های اصلی بر
ساختار مدارهای لیبانوفی