

# تحلیل ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی هدفمند معیوب با رویه‌های پیزوالکتریک با استفاده از تئوری هایپربولیک جدید

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۲/۱۷

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۶/۳۱

محمدحسین حبیبی<sup>۱</sup>، مصطفی لیوانی<sup>۲</sup>، محمد مسکینی<sup>۳</sup>

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده تحصیلات تکمیلی، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

۲- استادیار، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران. m.livani@ssau.ac.ir

۳- مربی، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

## چکیده

در این پژوهش اثر معیوب بودن ماده بر پاسخ ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی هدفمند با رویه‌های پیزوالکتریک مورد مطالعه قرار می‌گیرد. یک تابع تغییر شکل برشی هایپربولیک جدید در این مقاله ارائه شده است. خواص مواد هدفمند با توزیع تابع تغییرات خواص در راستای ضخامت تغییر می‌کند. ساختار این مواد در طی فرایند تولید نمی‌تواند کاملاً مطابق با الگوی مدنظر باشد که این موضوع به تولید ماده هدفمند معیوب منجر می‌شود. از این رو در این پژوهش، یک مدل سالم و دو نوع مدل معیوب برای تابع تغییرات خواص در نظر گرفته شده است. معادلات دیفرانسیل حاکم با استفاده از اصل همپلتون و روش ناویر حل شده است. اثرات پارامترهای مهم هندسی و مکانیکی شامل نسبت ضخامت به طول، نسبت طول به عرض، نسبت ضخامت هسته هدفمند به لایه پیزوالکتریک و اثر پتانسیل الکتریکی بر پاسخ فرکانس طبیعی ورق ساندویچی با هسته هدفمند معیوب و رویه‌های پیزوالکتریک بررسی شده است. برای اعتبارسنجی، نتایج تحلیلی به دست آمده در این پژوهش با نتایج ارائه شده در مقاله‌ها مقایسه شده است، که در این مقایسه تطابق خوبی حاصل گردید که نشان از صحیح بودن تئوری جدید، روند استخراج و حل معادلات است.

واژه‌های کلیدی: ارتعاشات آزاد، مواد هدفمند معیوب، پیزوالکتریک، تئوری هایپربولیک جدید، اصل همپلتون

## Free vibration analysis of FG sandwich panel with piezoelectric face sheets using new hyperbolic theory

Mohammad Hossein Habibi<sup>1</sup>, Mostafa Livani<sup>2</sup>, Mohammad Meskini<sup>3</sup>

1 Master Student, Department of Graduate Studies, Shahid Sattari Aeronautical University of Science and Technology, Tehran

2 Assistant Professor, Department of Aerospace Engineering, Shahid Sattari Aeronautical University of Science and Technology, Tehran, m.livani@ssau.ac.ir

3 Instructor, Department of Aerospace Engineering, Shahid Sattari Aeronautical University of Science and Technology, Tehran

### Abstract

In this study, the effect of material imperfection on the free vibration response of FG sandwich panel with piezoelectric face sheets is studied. A new hyperbolic shear deformation function is presented in this paper. The properties of the FG core varied along the thickness according to power law. The material composition in production process cannot be completely in accordance with the expected pattern, which leads to the production of imperfect FG material. Hence in this research, one perfect model and two types of imperfect models have been considered. The governing differential equations are derived using the Hamilton's principle and solved using the Navier method. The effects of important geometric and mechanical parameters of perfect model and two types of imperfect model including thickness to length ratio, length to width ratio, FGM core to piezoelectric layer thickness ratio and electrical potential on natural frequency response of imperfect FG sandwich panel with piezoelectric face sheets are investigated. To verification, the analytical results obtained in this study are compared with the results presented in the literature, and in this comparison, a good agreement was obtained, which shows the correctness theory, deriving and solving equations.

**Keywords:** Free Vibration, Imperfect FGM, Piezoelectric, New hyperbolic theory, Hamilton's Principal

۲۰۵

سال ۱۱- شماره ۱

بهار و تابستان ۱۴۰۱

نشریه علمی دانش و

فناوری هوافضا



امروزه استفاده از سازه‌های ساندویچی به علت نسبت مقاومت به وزن بالا، در انواع مصارف مهندسی از جمله صنعت هوافضا و خودروسازی و... بسیار رایج شده است.

ماده هدفمند<sup>۱</sup> ماده‌ای است ناهمگن، با گرادیان حساب‌شده که ترکیبات، ساختار و خواص مهندسی آن در یک راستای معین تولید شده و در آن خواص ماده با مکان تغییر می‌کند. همین گرادیان سبب می‌شود تا این مواد هدفمند ویژگی‌های مهندسی بهتری نسبت به ماده همگن ساخته‌شده با همان ترکیبات ارائه دهد که خواص یا عملکرد آن در یک یا چند راستا به‌طور پیوسته<sup>۲</sup> یا تدریجی<sup>۳</sup> تغییر می‌کند. ساختار این مواد در طی فرایند تولید نمی‌تواند کاملاً مطابق با الگوی مدنظر باشد که این موضوع به تولید ماده هدفمند معیوب منجر می‌شود.

یکی از ویژگی‌های غیرمعمولی که برخی سرامیک‌ها و پلیمرها از خود نشان می‌دهند، پدیده پیزوالکتریک است. پیزوالکتریک توانایی برخی مواد برای تبدیل انرژی مکانیکی به انرژی الکتریکی و تبدیل انرژی الکتریکی به انرژی مکانیکی است. موادی که این پدیده را از خود بروز می‌دهند، مواد پیزوالکتریک نامیده می‌شوند. با توجه به این موضوع که در این پژوهش هدف این است که در نتایج به‌دست‌آمده جوانب مختلف در آن در نظر گرفته‌شده باشد، در ابتدا پژوهش‌های انجام‌شده دربارهٔ ورق‌های ساندویچی بررسی می‌شود.

مسکینی و عارفی [۱] ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با هسته هدفمند متخلخل و رویه‌های پیزوالکتریک را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی هایپربولیک تجزیه و تحلیل کردند. آن‌ها

معادلات حاکم را با استفاده از اصل همیلتون استخراج و سپس معادلات به‌دست‌آمده را با استفاده از روش ناویر حل کردند. لیوانی [۲] خمش صفحات قطاع دایره‌ای هدفمند چندجهته را با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی و روش تعمیم‌یافته مربعات دیفرانسیلی مورد مطالعه قرار داده است. کیم و همکاران [۳] به بررسی ارتعاشات آزاد و کمانش دینامیکی صفحات هدفمند با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی گالرکین پرداختند. آن‌ها در پژوهش خود تأثیر پارامترهای هندسی و دما را مورد بررسی قرار دادند. علی میرزایی و همکاران [۴] به آنالیز غیرخطی عددی با استفاده از روش عددی المان محدود پدیده‌های ارتعاشات آزاد، کمانش و خمش یک تیر کامپوزیتی هدفمند معیوب پرداختند. حبیبی و همکاران [۵] پدیده‌های کمانش و ارتعاشات آزاد یک استوانه ساندویچی با هسته مرکب چندلایه متخلخل و رویه‌های هوشمند را با استفاده از روش تحلیلی بررسی کردند. آن‌ها معادلات حاکم را با استفاده از اصل همیلتون<sup>۴</sup> استخراج کردند. بوازا و زنگور [۶] کمانش ترمومکانیکی یک تیر ساندویچی مرکب با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی هایپربولیک را بررسی کردند. آن‌ها در پژوهش خود اثرات دما، غلظت رطوبت، نسبت طول به ضخامت و ضریب انبساط حرارتی را مورد مطالعه قرار دادند. رحیمی و همکاران [۷] ارتعاشات آزاد تیر مدرج تابعی دارای ترک عرضی بر اساس نظریه مرتبه بالای ردی با شرایط مرزی دوسرگیردار را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها برای استخراج پاسخ فرم بسته برای فرکانس طبیعی تیر مدرج تابعی دارای ترک عرضی از روش ریتز استفاده کردند. کومار و همکاران [۸] به ارائه یک حل دقیق برای تحلیل ارتعاشات آزاد صفحه

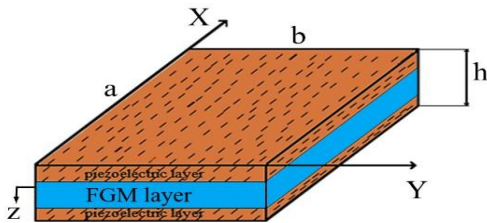


همیلتون استخراج می‌شوند.

## ۲. به دست آوردن معادلات حاکم

در این بخش، در ابتدا مدل هندسی مورد مطالعه، سپس تئوری مورد استفاده ارائه می‌شود. بعد از آن روابط تنش- کرنش بیان می‌شود و در انتهای این بخش، معادلات حاکم بر ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با هسته هدفمند معیوب و رویه‌های پیزوالکتریک بر مبنای تئوری مرتبه بالای هایپربولیک استخراج خواهد شد.

هندس مدل مورد مطالعه در این مقاله عبارت است از ورق ساندویچی با هسته هدفمند معیوب و رویه‌های پیزوالکتریک تشکیل شده است. همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است ضخامت  $h$  از دولایه پیزوالکتریک و یک لایه هسته هدفمند تشکیل شده است. همچنین ورق دارای طول  $a$  و عرض  $b$  است.



شکل ۱. هندسه ورق ساندویچی مورد مطالعه

در این مقاله تئوری تغییر شکل برشی هایپربولیک ارائه شده برای مدل‌سازی میدان جابه‌جایی به صورت زیر است [۱]:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} \\
 &\quad - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 v(x, y, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} \\
 &\quad - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y}
 \end{aligned} \quad (1)$$

$$w(x, y, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t)$$

جایی که  $u(x, y, t)$  و  $v(x, y, t)$  توابع مجهول برای

هدفمند با ضخامت متغیر، با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای هایپربولیک و روش گالرکین-ولاسوف پرداختند. وان دو و لی هیونگ [۹] به تحلیل و بررسی ارتعاشات آزاد صفحات هدفمند با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای ایزو ژئومتریک شبه سه‌بعدی اصلاح‌شده پرداختند و معادلات حاکم را از طریق اصل همیلتون به دست آوردند. تای و همکاران [۱۰] به تحلیل ارتعاشات آزاد، کمانش و خمش صفحات چندلایه هدفمند تقویت‌شده با استفاده از فرمولاسیون NURBS پرداختند. آن‌ها در این پژوهش از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا برای استخراج معادلات حاکم استفاده کردند. سیوالک و بالتاکیولو [۱۱] به بررسی و تحلیل ارتعاشات آزاد صفحات چندلایه هدفمند و لمینت از دو روش عددی و تحلیلی پرداختند. در روش تحلیلی از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تئوری پوسته مخروطی لاووس برای به دست آوردن معادلات حاکم استفاده کردند.

با بررسی پژوهش‌های یادشده در خصوص روش‌های تحلیلی تحلیل ارتعاشات مواد هدفمند مشاهده شد که نیاز به بسط یک تئوری جدید که در عین ساده بودن، بتواند اثرات مخرب پدیده ارتعاشات آزاد را بر مواد هدفمند معیوب به خوبی ارزیابی کند، بیش‌ازپیش احساس شد. در این راستا در این مقاله، تابع جدیدی ارائه خواهد شد که با استفاده از آن بتوان رفتار ارتعاشاتی ورق‌های ساندویچی با هسته هدفمند معیوب و رویه‌های پیزوالکتریک را به خوبی ارزیابی کند. در این مقاله تحلیل ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با هسته هدفمند معیوب و رویه‌های پیزوالکتریک با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی هایپربولیک انجام می‌شود. معادلات حاکم بر مبنای اصل



جابه‌جایی‌های درون صفحه‌ای و  $w(x,y,t)$  تابع مجهول برای جابه‌جایی عرضی صفحه می‌باشند.

با بررسی توابع ارائه‌شده در پژوهش‌های مختلف و مقایسه نتایج حاصل از آن‌ها، در این مقاله برای اولین بار برای توابع  $f(z)$  و  $g(z)$  روابطی به صورت زیر ارائه شده است:

$$f(z) = \tanh\left(\left(\frac{z}{h}\right) 2 \times \left(\frac{z}{h}\right)^3\right) \quad (2)$$

$$g(z) = 1 - f'(z)$$

تابع  $f(z)$  در نظر گرفته در این پژوهش نسبت به سایر توابع در نظر گرفته شده در پژوهش‌های انجام‌شده نشان داده شده در جدول ۱ بسیار ساده‌تر است که این موضوع به بالا رفتن سرعت حل منجر می‌شود.

جدول ۱. توابع مختلف  $f(z)$  در نظر گرفته شده در پژوهش‌های مختلف

مراجع	$f(z)$
[۱۲]	$\tanh\left(\frac{z}{h} - \frac{z^3}{h^3} - r \frac{z^5}{h^5}\right); [r = 0.8]$
[۱۵]	$\frac{\pi h}{\pi^4 + h^4} \left[ \left\{ \pi^2 \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) + h^2 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right\} \exp\left(\frac{hz}{\pi}\right) - h^2 \right]$
[۱۶]	$h \sinh \frac{z}{h} - \frac{4z^3}{3h^2} \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$
[۱۷]	$3.7z \left[ 1.27 \operatorname{sech}^{0.65}\left(\frac{z}{h}\right) - 1 \right]$

روابط مربوط به جابه‌جایی الکتریکی رویه‌های پیزوالکتریک به صورت زیر است [۱]:

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{26} \\ e_{13} & e_{32} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (3)$$

جایی که  $e_{ij}$  ضرایب پیزوالکتریک،  $E_i$  مؤلفه‌های میدان الکتریکی و  $\varepsilon_{ij}$  ضرایب دی‌الکتریک می‌باشند.

اجزای میدان الکتریکی به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱]:

$$E_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4)$$

$$E_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$$

جایی که  $\psi$  پتانسیل الکتریکی می‌باشد، به صورت زیر تعریف می‌شود [۱]:

$$\psi = -\frac{2z}{h\pi i} \psi_0 - \psi(x,y,t) \cos\left(\frac{\pi z}{h\pi i}\right) \quad (5)$$

$$\hat{z} = z + \frac{h\pi i}{2} + \frac{h_e}{2}, \hat{z} = z - \frac{h\pi i}{2} - \frac{h_e}{2}$$

جایی که  $\psi_0$  پتانسیل الکتریکی اولیه می‌باشد.

با جایگذاری رابطه (۵) در رابطه (۴) میدان جابه‌جایی به صورت رابطه (۶) بازنویسی می‌شود [۱]:

$$E_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)$$

$$E_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (6)$$

$$E_z = -\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{2}{h_p} - \psi \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$$

در این بخش الگوهای صفحات FG کامل و معیوب مورد استفاده در این مقاله ارائه می‌شود. برای این منظور برای صفحه FG کامل، تغییرات

در شکل ۳ به صورت گرافیکی این تغییرات نشان داده شده است.

در مدل دوم فرض می‌شود تغییرات مدول الاستیک در راستای ضخامت به صورت زیر تغییر کند [۱۲]:

$$E_1(z) = E_2 + (E_1 - E_2) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k ;$$

$$0 \leq z \leq 0.5h$$

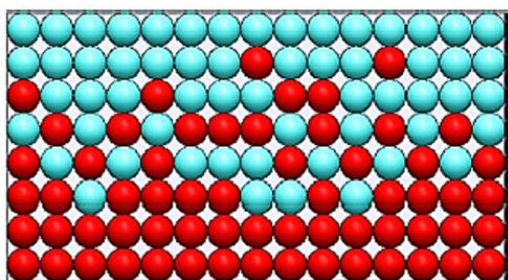
$$E_2(z) = E_2 + (E_1 - E_2) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k ; -\beta$$

$$\leq z \leq 0$$

$$E_3(z) = E_2 ; -0.5 \leq z \leq -\beta, -0.5$$

$$\leq \frac{\beta}{h} \leq 0$$

در شکل ۴ به صورت گرافیکی این تغییرات نشان داده شده است.



شکل ۴. توزیع مدل معیوب نوع دوم [۱۲]

برای استخراج معادلات حاکم بر ارتعاش آزاد ورق ساندویچی از اصل همیلتون استفاده می‌شود [۱]:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U - \delta T) dt = 0 \quad (10)$$

که در آن  $\delta U$  تغییرات انرژی کرنشی و  $\delta T$  تغییرات انرژی جنبشی است.

انرژی کرنشی ورق را می‌توان برحسب کلیه تنش‌ها و کرنش‌های وارد بر ورق به صورت زیر محاسبه نمود [۱]:

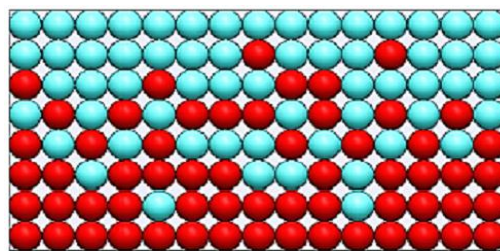
$$\delta U = \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz})$$

خواص مکانیکی از جمله مدول الاستیک در راستای ضخامت فرض می‌شود، به صورت زیر تغییر می‌کند [۱۲]:

$$E(z) = E_2 + (E_1 - E_2) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k \quad (7)$$

$$-0.5h \leq z \leq 0.5h$$

در شکل ۲ به صورت گرافیکی این تغییرات نشان داده شده است.



شکل ۲. توزیع مدل سالم [۱۲]

برای مدل‌سازی صفحه FG معیوب از دو مدل استفاده می‌شود، در مدل اول فرض می‌شود تغییرات مدول الاستیک در راستای ضخامت به صورت زیر تغییر کند [۱۲]:

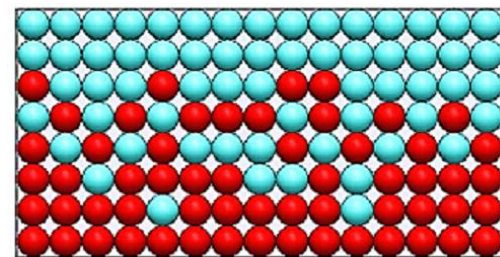
$$E_1(z) = E_2 + (E_1 - E_2) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k ;$$

$$-0.5h \leq z \leq 0$$

$$E_2(z) = E_2 + (E_1 - E_2) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k ; \quad (8)$$

$$0 \leq z \leq \alpha$$

جایی که  $E_1$  مدول الاستیک در ناحیه  $-0.5h \leq z \leq 0$  و  $E_2$  مدول الاستیک در ناحیه  $0 \leq z \leq \alpha$  و  $E_3$  مدول الاستیک در ناحیه  $\alpha \leq z \leq 0.5h$  می‌باشند.



شکل ۳. توزیع مدل معیوب نوع اول [۱۲]

$$+ \left( N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - M_y^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} - M_y^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} \right) +$$

$$\left( N_{xy} \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} - 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} \right.$$

$$\left. - 2M_{xy}^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial y} \right)$$

$$+ \left( S_{xz} \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + S_{xz} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} \right)$$

$$+ \left( S_{yz} \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} + S_{yz} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial y} \right)$$

$$+ \left( -P_x \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} - P_y \frac{\partial \delta \psi}{\partial y} + R_z \delta \psi \right) \Big] dA$$

رابطه (۱۴) به صورت زیر گسترش داده می‌شود:

$$\delta U = \int_A \left[ \left( -\frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u_0 - \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} \delta w_b - \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} \delta w_s \right) \right.$$

$$+ \left( -\frac{\partial N_y}{\partial y} \delta v_0 - \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} \delta w_b - \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} \delta w_s \right) +$$

$$\left( -\frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \delta u_0 - \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \delta v_0 - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} \delta w_b \right.$$

$$\left. - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} \delta w_s \right) +$$

$$\left( -\frac{\partial S_{xz}}{\partial x} \delta w_s - \frac{\partial S_{xz}}{\partial x} \delta \varphi \right) +$$

$$\left( -\frac{\partial S_{yz}}{\partial y} \delta w_s - \frac{\partial S_{yz}}{\partial y} \delta \varphi \right) +$$

$$\left( \frac{\partial P_x}{\partial x} \delta \psi + \frac{\partial P_y}{\partial y} \delta \psi + R_z \delta \psi \right) \Big] dA \quad (15)$$

روابط جابه‌جایی در رابطه (۱۲) قرار داده می‌شود:

$+ \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} - D_x \delta E_x - D_y \delta E_y - D_z \delta E_z) dV$   
انرژی جنبشی ورق به صورت زیر تعریف می‌شود [۱]:

$$\delta T = \int_V \rho \vec{v} \cdot \delta \vec{v} dV \Rightarrow$$

$$\delta T = \int_V \rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right] dV \quad (12)$$

برای استخراج معادلات حاکم بر مسئله لازم است تا کلیه کرنش‌ها و جابه‌جایی‌های موجود در رابطه‌ی (۱۲) با مجهولات مفروض در میدان‌های جابه‌جایی جایگذاری شود [۱]:

$$\delta U = \int_A \int_z \left[ \sigma_x \left( \frac{\delta u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} \right) \right.$$

$$+ \sigma_y \left( \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} - f(z) \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} \right) +$$

$$\tau_{xy} \left( \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} - 2f(z) \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial y} \right) \quad (13)$$

$$+ \tau_{xz} \left( g(z) \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + g(z) \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} \right) +$$

$$\tau_{yz} \left( g(z) \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} + g(z) \frac{\partial \delta \varphi}{\partial y} \right) -$$

$$\left( D_x \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \cos \left( \frac{\pi \hat{z}}{h} \right) \right)$$

$$- \left( D_y \frac{\partial \delta \psi}{\partial y} \cos \left( \frac{\pi \hat{z}}{h} \right) \right)$$

$$- D_z \left( -\frac{\pi}{h_p} \delta \psi \sin \left( \frac{\pi \hat{z}}{h} \right) \right) \Big] dz dA$$

رابطه داده شده پیوست ۳ در رابطه (۱۳) جایگذاری می‌شود:

$$\delta U = \int_A \left[ \left( N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_x^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - M_x^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} \right) \right.$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} \delta w_b - \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} \delta w_s \\
& \quad - g(z) \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} \delta \varphi - \\
& \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \delta w_b - \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \delta w_s \\
& \quad - g(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \delta \varphi \\
& -g(z) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \delta w_b - g(z) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \delta w_s \\
& -g(z)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \delta \varphi \Big] dz dA
\end{aligned}$$

رابطه داده شده پیوست ۲ در رابطه (۱۷) جایگذاری می‌شود:

$$\begin{aligned}
\delta T = \int_A & (-I_1 \ddot{u} \delta u_0 - I_2 \ddot{u}_{,x} \delta w_b \\
& - I_4 \ddot{u}_{,x} \delta w_s + \\
& I_2 \ddot{w}_{b,x} \delta u_0 + I_3 \ddot{w}_{b,xx} \delta w_b \\
& \quad + I_5 \ddot{w}_{b,xx} \delta w_s + \\
& I_4 \ddot{w}_{s,x} \delta u_0 + I_5 \ddot{w}_{s,xx} \delta w_b \\
& \quad + I_6 \ddot{w}_{s,xx} \delta w_s - \\
& I_1 \ddot{v} \delta v_0 - I_2 \ddot{v}_{,y} \delta w_b - I_4 \ddot{v}_{,y} \delta w_s \\
& \quad + I_2 \ddot{w}_{b,y} \delta v_0 + \\
& I_3 \ddot{w}_{b,yy} \delta w_b + I_5 \ddot{w}_{b,yy} \delta w_s \\
& \quad + I_4 \ddot{w}_{s,y} \delta v_0 + \\
& I_5 \ddot{w}_{s,yy} \delta w_b + I_6 \ddot{w}_{s,yy} \delta w_s \\
& \quad - I_1 \ddot{w}_b \delta w_b - \\
& I_1 \ddot{w}_b \delta w_s - I_7 \ddot{w}_b \delta \varphi - I_1 \ddot{w}_s \delta w_b \\
& \quad - I_1 \ddot{w}_s \delta w_s - \\
& I_7 \ddot{w}_s \delta \varphi - I_7 \ddot{\varphi} \delta w_b - I_7 \ddot{\varphi} \delta w_s \\
& \quad - I_8 \ddot{\varphi} \delta \varphi) dA
\end{aligned} \tag{۱۸}$$

با جایگذاری انرژی کرنشی و انرژی جنبشی

در اصل همیلتون، رابطه (۱۹) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\delta u: & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\
\delta v: & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\
\delta w_b: & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^2}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} \\
& \quad - N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\
& - N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\
& \quad - N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} = 0
\end{aligned} \tag{۱۹}$$

$$\begin{aligned}
\delta T = \int_V \rho & \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial t} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial t} \right) \right. \\
& \left. \left( \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial t} - f(z) \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial t} \right) \right. \\
& \quad + \\
& \left. \left( \frac{\partial v_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y \partial t} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y \partial t} \right) \right. \\
& \left. \left( \frac{\partial \delta v_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y \partial t} - f(z) \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y \partial t} \right) + \right. \\
& \left. \left( \frac{\partial w_b}{\partial t} + \frac{\partial w_s}{\partial t} + g(z) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right. \\
& \left. \left( \frac{\partial \delta w_b}{\partial t} + \frac{\partial \delta w_s}{\partial t} + g(z) \frac{\partial \delta \varphi}{\partial t} \right) \right] dV
\end{aligned} \tag{۱۶}$$

رابطه (۱۶) به صورت زیر گسترش داده می‌شود:

$$\begin{aligned}
\delta T = \iint_A & \int_z \rho \left[ \frac{-\partial^2 u_0}{\partial t^2} \delta u_0 \right. \\
& \quad \left. - z \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} \delta w_b \right. \\
& \quad \left. - f(z) \frac{\partial u_0}{\partial x \partial t^2} \delta w_s + z \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} \delta u_0 \right. \\
& \quad \left. + z^2 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} \delta w_b \right. \\
& \quad \left. + z f(z) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} \delta w_s \right. \\
& \quad \left. + f(z) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial t^2} \delta u_0 \right. \\
& \quad \left. + z f(z) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} \delta w_b \right. \\
& \quad \left. + f(z)^2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} \delta w_s - \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \delta v_0 - \right. \\
& \quad \left. z \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \delta w_b - f(z) \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \delta w_s + \right. \\
& \quad \left. z \frac{\partial^3 w_b}{\partial y \partial t^2} \delta v_0 + z^2 \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^2 \partial t^2} \delta w_b + \right. \\
& \quad \left. z f(z) \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^2 \partial t^2} \delta w_s \right. \\
& \quad \left. + f(z) \frac{\partial^4 w_s}{\partial y \partial t^2} \delta v_0 \right. \\
& \quad \left. + z f(z) \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^2 \partial t^2} \delta w_b \right. \\
& \quad \left. + f(z)^2 \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^2 \partial t^2} \delta w_s \right.
\end{aligned} \tag{۱۷}$$



$$\begin{aligned}
& D_{12} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - F_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - F_{22} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} - \\
& (2F_{12} + 4F_{66}) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \\
& N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} = \\
& I_1 \ddot{w}_b + I_1 \ddot{w}_s + I_2 \ddot{u}_{0,x} + I_2 \ddot{v}_{0,y} \\
& \quad - I_3 \ddot{w}_{b,xx} - \\
& I_3 \ddot{w}_{b,yy} - I_5 \ddot{w}_{s,xx} - I_5 \ddot{w}_{s,yy} + I_7 \ddot{\varphi} \\
& \delta w_s: E_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (E_{12} + 2E_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} \\
& + (E_{12} + 2E_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + E_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - \\
& F_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - F_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - (2F_{12} \\
& + 4F_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - G_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - \\
& (2G_{12} + 4G_{66}) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} + K_{13}^4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \\
& + K_{23}^4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - L_{51}^3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - L_{62}^3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \\
& G_{22} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + H_{44} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + H_{55} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \\
& H_{44} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + H_{55} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - \\
& N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} = \\
& I_1 \ddot{w}_b + I_1 \ddot{w}_s + I_4 \ddot{u}_{0,x} + I_4 \ddot{v}_{0,y} - \\
& I_5 \ddot{w}_{b,xx} - I_5 \ddot{w}_{b,yy} - \\
& I_6 \ddot{w}_{s,xx} - I_6 \ddot{w}_{s,yy} - I_7 \ddot{\varphi} \\
& \delta \varphi: H_{44} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + H_{55} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + H_{44} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\
& \quad + \\
& H_{55} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - L_{51}^3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + L_{62}^3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \\
& I_7 \ddot{w}_b - I_7 \ddot{w}_s + I_8 \ddot{\varphi} \\
& \delta \psi: K_{31}^1 \frac{\partial u}{\partial x} - K_{31}^2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + K_{32}^1 \frac{\partial v}{\partial y} - \\
& K_{32}^2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + (-K_{32}^4 + L_{26}^3) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \\
& (L_{15}^3 - K_{31}^4) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + L_{15}^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\
& \quad + L_{26}^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \\
& L_{11}^5 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + L_{22}^5 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - K_{33}^5 \psi - J_{33}^1 = 0
\end{aligned} \tag{۲۳}$$

$$\begin{aligned}
& \delta u: A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \\
& + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - \\
& (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} - \\
& (E_{12} + 2E_{66}) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} - E_{11} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} \\
& \quad + K_{13}^1 \frac{\partial \psi}{\partial x} \\
& = I_1 \ddot{u} - I_2 \ddot{w}_{b,x} - I_4 \ddot{w}_{s,x} \\
& \delta v: (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \\
& + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{12} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y \partial x^2} \\
& \quad - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y \partial x^2} \\
& - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} - (E_{12} + 2E_{66}) \frac{\partial^3 w_s}{\partial y \partial x^2} \\
& - E_{22} \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} + K_{23}^1 \frac{\partial \psi}{\partial y} \\
& = I_1 \ddot{v} - I_2 \ddot{w}_{b,y} - I_4 \ddot{w}_{s,y} \\
& \delta w_b: B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} \\
& \quad + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \\
& (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\
& - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - \\
& (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} -
\end{aligned} \tag{۲۴}$$

$$\begin{aligned}
& \delta w_s: \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial x} + \\
& \frac{\partial S_{yz}}{\partial y} - N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\
& \quad - N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - \\
& N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} = 0 \\
& \delta \varphi: \frac{\partial S_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}}{\partial y} = 0 \\
& \delta \psi: \frac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial y} + R_z = 0
\end{aligned}$$

در نهایت معادلات حاکم به صورت رابطه‌های (۲۰) تا (۲۵) به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
& \delta u: A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \\
& + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - \\
& (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} - \\
& (E_{12} + 2E_{66}) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} - E_{11} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} \\
& \quad + K_{13}^1 \frac{\partial \psi}{\partial x} \\
& = I_1 \ddot{u} - I_2 \ddot{w}_{b,x} - I_4 \ddot{w}_{s,x} \\
& \delta v: (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \\
& + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{12} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y \partial x^2} \\
& \quad - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y \partial x^2} \\
& - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} - (E_{12} + 2E_{66}) \frac{\partial^3 w_s}{\partial y \partial x^2} \\
& - E_{22} \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} + K_{23}^1 \frac{\partial \psi}{\partial y} \\
& = I_1 \ddot{v} - I_2 \ddot{w}_{b,y} - I_4 \ddot{w}_{s,y} \\
& \delta w_b: B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} \\
& \quad + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \\
& (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\
& - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - \\
& (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} -
\end{aligned} \tag{۲۰}$$

$$\begin{aligned}
& - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} - (E_{12} + 2E_{66}) \frac{\partial^3 w_s}{\partial y \partial x^2} \\
& - E_{22} \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} + K_{23}^1 \frac{\partial \psi}{\partial y} \\
& = I_1 \ddot{v} - I_2 \ddot{w}_{b,y} - I_4 \ddot{w}_{s,y} \\
& \delta w_b: B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} \\
& \quad + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \\
& (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\
& - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - \\
& (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} -
\end{aligned} \tag{۲۱}$$

$$\begin{aligned}
& - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} - (E_{12} + 2E_{66}) \frac{\partial^3 w_s}{\partial y \partial x^2} \\
& - E_{22} \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} + K_{23}^1 \frac{\partial \psi}{\partial y} \\
& = I_1 \ddot{v} - I_2 \ddot{w}_{b,y} - I_4 \ddot{w}_{s,y} \\
& \delta w_b: B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} \\
& \quad + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \\
& (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\
& - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - \\
& (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} -
\end{aligned} \tag{۲۲}$$





### ۳. حل معادلات حاکم

با استفاده از روش ناور، معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله برای شرایط مرزی ساده به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱]:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ W_b \\ W_s \\ \varphi \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Ue^{i\omega t} \cos \lambda x \sin \mu y \\ Ve^{i\omega t} \sin \lambda x \cos \mu y \\ W_b e^{i\omega t} \sin \lambda x \sin \mu y \\ W_s e^{i\omega t} \sin \lambda x \sin \mu y \\ \varphi e^{i\omega t} \sin \lambda x \sin \mu y \\ \psi e^{i\omega t} \sin \lambda x \sin \mu y \end{Bmatrix}; \quad (26)$$

$$\lambda = \frac{n\pi}{a}, \mu = \frac{m\pi}{b}$$

که در آن  $U, V, W_b, W_s, \varphi, \psi$  مجهولات معادلات می‌باشند.

ماتریس ضرایب جابه‌جایی را می‌توان به صورت

زیر بیان کرد:

$$[K]_{6 \times 6} - \omega^2 [M]_{6 \times 6} = 0 \quad (27)$$

### ۴. نتایج و بحث

در این بخش نتایج حاصل از تحلیل ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با هسته هدفمند و رویه‌های پیزوالکتریک ارائه خواهد شد. در ابتدا نتایج به‌دست‌آمده از تحلیل حاضر با نتایج دیگر مراجع اعتبارسنجی می‌شود و سپس نتایج به‌دست‌آمده از ارتعاشات ورق ساندویچی با هسته هدفمند معیوب به همراه رویه‌های پیزوالکتریک مورد مطالعه و بررسی قرار خواهند گرفت.

#### ۴-۱. اعتبارسنجی

در این بخش نتایج حاصل از تحلیل ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با هسته هدفمند به همراه رویه‌های پیزوالکتریک با نتایج دیگر پژوهش‌ها مقایسه خواهد شد.

در جدول‌های ۲ و ۳ مشخصات هندسی و مکانیکی به ترتیب هسته هدفمند و رویه‌های پیزوالکتریک ارائه می‌شود.

### جدول ۲. مشخصات هندسی و مکانیکی هسته

هدفمند

a/b	ضریب پواسون	مدول الاستیسته
۰/۵	۰/۳	$2.0 \times 10^9$
		$7.0 \times 10^9$

### جدول ۳. مشخصات مکانیکی رویه‌های پیزوالکتریک

چگالی	$\frac{Kg}{m^3}$
$5.55 \times 10^3$	
ضرایب	$\frac{C}{m^2}$
$e_{13} = -2.2, e_{23} = -2.2, e_{26} = 5.8, e_{15} = 5.8$	
پیزوالکتریک	$\frac{C}{Vm}$
$\epsilon_{11} = 5.64 \times 10^{-9}, \epsilon_{22} = 5.64 \times 10^{-9}, \epsilon_{33} = 6.35 \times 10^{-9}$	
ضرایب دی‌الکتریک	GPa
$c_{11} = 226, c_{22} = 226, c_{33} = 216, c_{12} = 125, c_{13} = 124, c_{23} = 124, c_{44} = 44.2, c_{55} = 44.2, c_{66} = 50.5$	

به‌منظور اعتبارسنجی روش ارائه‌شده، نتایج بی‌بعد شده حاصل از تحلیل ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با استفاده از تئوری حاضر با نتایج تحلیلی ارائه‌شده مراجع [۱]، [۱۳] و [۱۴] مقایسه می‌شوند.

#### جدول ۴. مقایسه نتایج حاصل از ارتعاشات آزاد ورق

ساندویچی تئوری حاضر با نتایج مراجع [۱]، [۱۳] و

[۱۴]

a/h	فرکانس		
۲۰	۱۰	۵	حاضر
۰/۱۶۱	۰/۰۴۳	۰/۰۱۱	مرجع [۱]
۰/۱۷۶	۰/۰۴۷	۰/۰۱۲	مرجع [۱۳]
۰/۱۶۲	۰/۰۴۴	۰/۰۱۱	مرجع [۱۴]
۰/۱۶۴	۰/۰۴۵	۰/۰۱۱	

در جدول ۴ فرکانس‌های طبیعی اول ساندویچی با هسته هدفمند به همراه رویه‌های پیزوالکتریک با استفاده از تئوری جدید با نتایج به‌دست‌آمده توسط مراجع [۱]، [۱۳] و [۱۴]

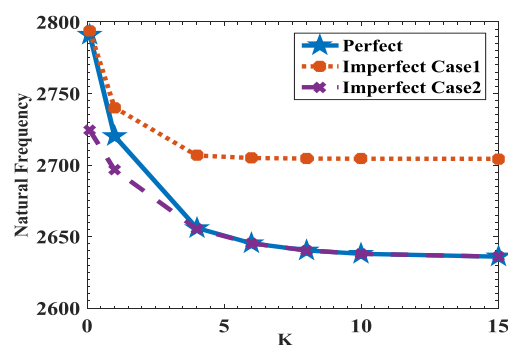




مقایسه گردیده است. همان‌طور که در جدول ۴ مشاهده می‌شود نتایج به دست آمده از تئوری حاضر با نتایج حاصل مراجع [۱]، [۱۳] و [۱۴] تطابق خوبی دارد که این تطابق نیز می‌تواند نشان‌دهنده صحت تئوری مورد مطالعه در این پژوهش باشد.

#### ۲-۴. بررسی اثر تابع تغییرات خواص مواد بر روی فرکانس طبیعی ورق ساندویچی

در این بخش اثر توان تابع تغییرات خواص در ورق هدفمند (K) بر پاسخ ارتعاشات آزاد ورق هدفمند کامل و معیوب مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در شکل ۵ تغییرات فرکانس‌های طبیعی ورق هدفمند کامل، معیوب مدل اول و معیوب مدل دوم برای مقادیر مختلف K آورده شده است. در شکل ۵ مشهود است که با افزایش مقدار تابع تغییرات خواص مواد مقدار فرکانس طبیعی ورق ساندویچی برای کلیه حالت‌ها به شدت کاهش یافته و برای مقادیر بزرگ K تغییرات فرکانس طبیعی ناچیز است.

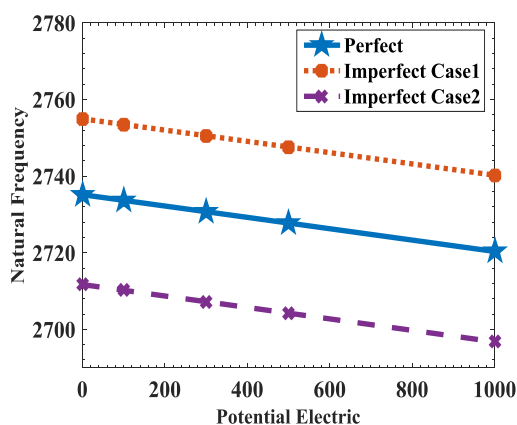


شکل ۵. اثر تابع تغییرات خواص مواد بر ورق ساندویچی

#### ۳-۴. بررسی اثر پتانسیل الکتریکی لایه پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی ورق ساندویچی

در این بخش اثر تغییرات پتانسیل الکتریکی

لایه پیزوالکتریک (V)، بر پاسخ ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با هسته هدفمند کامل و معیوب به همراه رویه‌های پیزوالکتریک مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در شکل ۶ تغییرات فرکانس‌های طبیعی ورق هدفمند کامل، معیوب مدل اول و معیوب مدل دوم برای مقادیر مختلف تغییرات پتانسیل الکتریکی لایه پیزوالکتریک (V) آورده شده است.

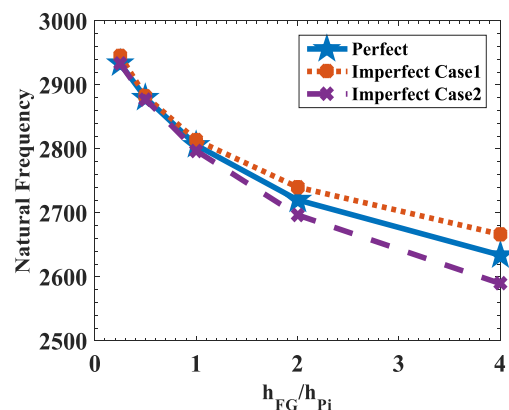


شکل ۶. بررسی اثر تغییرات پتانسیل الکتریکی لایه پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی ورق ساندویچی

همان‌طور که شکل ۶ نشان می‌دهد با افزایش مقدار پتانسیل الکتریکی لایه پیزوالکتریک، مقدار فرکانس طبیعی ورق ساندویچی برای هر سه حالت مدل کامل، معیوب مدل اول و معیوب مدل دوم به سرعت کاهش می‌یابد. همان‌طور که مشاهده می‌شود بیشترین مقدار فرکانس طبیعی برای حالت معیوب مدل اول و کمترین مقدار فرکانس طبیعی برای حالت معیوب مدل دوم می‌باشد. علت اینکه بیشترین فرکانس مخصوص حالت معیوب مدل اول است این است که در معیوب مدل اول خواص ماده به سمت فولاد نزدیک‌تر می‌شود و در معیوب مدل دوم خواص ماده به سمت آلومینیوم نزدیک‌تر می‌شود.

#### ۴-۴. بررسی اثر نسبت ضخامت لایه هدفمند به لایه پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی ورق ساندویچی

در این بخش اثر تغییرات نسبت ضخامت لایه هدفمند به لایه پیزوالکتریک ورق ساندویچی  $(h_{FG}/h_{pi})$  بر پاسخ ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی هدفمند کامل و معیوب به همراه رویه‌های پیزوالکتریک مورد مطالعه قرار می‌گیرد.



شکل ۷. بررسی اثر نسبت ضخامت لایه هدفمند به لایه پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی ورق ساندویچی

در شکل ۷ تغییرات فرکانس‌های طبیعی ورق هدفمند کامل، معیوب مدل اول و معیوب مدل دوم برای مقادیر مختلف تغییرات نسبت ضخامت لایه هدفمند به لایه پیزوالکتریک ورق ساندویچی  $(h_{FG}/h_{pi})$  آورده شده است. همان‌طور که شکل ۷ نشان می‌دهد با افزایش نسبت ضخامت لایه هدفمند به لایه پیزوالکتریک مقدار فرکانس طبیعی ورق ساندویچی به سرعت کاهش می‌یابد. همچنین می‌توان مشاهده کرد که در نسبت ضخامت لایه هدفمند به لایه پیزوالکتریک  $0.25$  مقدار فرکانس طبیعی در هر سه حالت کامل و معیوب مدل اول و معیوب مدل دوم بسیار به یکدیگر نزدیک هستند، ولی با افزایش نسبت

ضخامت لایه هدفمند به لایه پیزوالکتریک باعث افزایش اختلاف در فرکانس طبیعی حالت کامل و معیوب مدل و معیوب مدل دوم می‌شود.

#### ۴-۵. بررسی اثر نسبت طول به ضخامت کل ورق بر فرکانس طبیعی ورق ساندویچی

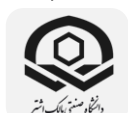
در این بخش اثر تغییرات نسبت طول به ضخامت کل ورق ساندویچی  $(a/h)$  بر پاسخ ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با هسته هدفمند کامل و معیوب به همراه رویه‌های پیزوالکتریک مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در شکل ۸ تغییرات فرکانس‌های طبیعی ورق هدفمند کامل، معیوب مدل اول و معیوب مدل دوم برای مقادیر مختلف تغییرات نسبت طول به ضخامت کل ورق ساندویچی  $(a/h)$  آورده شده است.

همان‌طور که در شکل ۸ مشاهده می‌شود با افزایش نسبت طول به ضخامت کل ورق ساندویچی، فرکانس طبیعی ورق ساندویچی به سرعت کاهش می‌یابد.

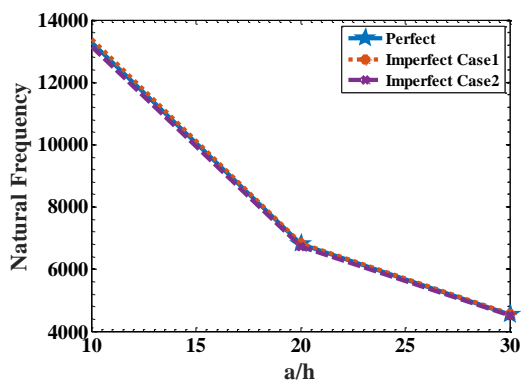
#### ۴-۶. بررسی اثر نسبت طول به عرض ورق بر فرکانس طبیعی ورق ساندویچی

در این بخش اثر تغییرات نسبت طول به عرض ورق ساندویچی  $(a/b)$  بر پاسخ ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی هدفمند کامل و معیوب به همراه رویه‌های پیزوالکتریک مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در شکل ۹ تغییرات فرکانس‌های طبیعی ورق هدفمند کامل، معیوب مدل اول و معیوب مدل دوم برای مقادیر مختلف تغییرات نسبت طول به عرض ورق ساندویچی  $(a/b)$  آورده شده است.

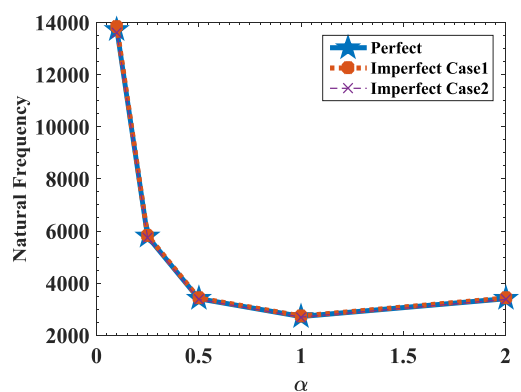
همان‌طور که شکل ۹ نشان می‌دهد با افزایش مقدار نسبت طول به عرض ورق ساندویچی از  $0.1$  تا  $1$ ، فرکانس طبیعی با سرعت زیادی کاهش و با



افزایش مقدار نسبت طول به عرض ورق ساندویچی از مقدار ۱ تا ۲ فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد.



شکل ۸. بررسی اثر نسبت طول به ضخامت کل ورق بر فرکانس طبیعی ورق ساندویچی



شکل ۹. بررسی اثر نسبت طول به عرض ورق بر فرکانس طبیعی ورق ساندویچی

## ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، تحلیل ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با هسته هدفمند و رویه‌های پیزوالکتریک با استفاده از تئوری هایپربولیک جدید ارائه شده انجام شد و نتایج حاصله با مراجع [۱]، [۱۳] و [۱۴] اعتبارسنجی گردید. می‌توان ادعا نمود که در این تحقیق یک تئوری جدید مرتبه بالا برای تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های ساندویچی تخت ارائه شده است.

پس از بررسی و جمع‌بندی نتایج حاصل از

تحلیل ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با هسته هدفمند و رویه‌های پیزوالکتریک، می‌توان موارد زیر را نتیجه‌گیری کرد:

➤ تئوری مرتبه بالای ورق ساندویچی جدید مورد استفاده در این مقاله می‌تواند با دقت خوبی رفتار دینامیکی ورق ساندویچی تخت را پیش‌بینی کند؛

➤ با افزایش نسبت طول به عرض ورق ساندویچی تخت از ۰.۱ تا ۱، فرکانس طبیعی با سرعت زیادی کاهش و با افزایش نسبت طول به عرض ورق ساندویچی از مقدار ۱ تا ۲ فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد؛

➤ با افزایش نسبت طول به ضخامت کل ورق ساندویچی فرکانس طبیعی به سرعت کاهش می‌یابد؛

➤ با افزایش نسبت ضخامت لایه هدفمند به ضخامت لایه پیزوالکتریک، فرکانس طبیعی ورق ساندویچی به سرعت کاهش می‌یابد؛

➤ با افزایش توان تابع تغییرات خواص هسته هدفمند (K)، فرکانس طبیعی ورق ساندویچی به شدت کاهش یافته و در مقدار ۱۰ تا ۱۵ شیب تقریباً به صورت یکنواخت شده است؛

➤ با افزایش پتانسیل الکتریکی لایه پیزوالکتریک (V)، فرکانس طبیعی ورق ساندویچی به سرعت کاهش می‌یابد. همچنین بیشترین مقدار فرکانس طبیعی برای حالت معیوب مدل اول و کمترین مقدار فرکانس طبیعی برای حالت معیوب مدل دوم می‌باشد. علت اینکه بیشترین فرکانس مخصوص حالت معیوب مدل اول است این است که در معیوب مدل اول خواص ماده به سمت فولاد نزدیک‌تر می‌شود و در معیوب مدل دوم خواص ماده به سمت آلومینیوم نزدیک‌تر می‌شود.

- [8] V. Kumar, S. J. Singh, V. H. Saran, S. P. Harsha, Exact solution for free vibration analysis of linearly varying thickness FGM plate using Galerkin-Vlasov's method, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*, Vol. 235, No. 4, pp. 880-897, 2021.
- [9] V. Do, V. Nguyen, C. H. Lee, Free vibration analysis of FGM plates with complex cutouts by using quasi-3D isogeometric approach, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 159, pp. 213-233, 2019.
- [10] C. H. Thai, A. J. M. Ferreira, T. D. Tran, P. Phung-Van, Free vibration, buckling and bending analyses of multilayer functionally graded graphene nanoplatelets reinforced composite plates using the NURBS formulation, *Composite Structures*, Vol. 220, pp. 749-759, 2019.
- [11] O. Civalek, A. K. Baltacıoglu, Free vibration analysis of laminated and FGM composite annular sector plates, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 157, pp. 182-194, 2019.
- [12] M. Malikan, V. A. Eremeyev, A new hyperbolic-polynomial higher-order elasticity theory for mechanics of thick FGM beams with imperfection in the material composition, *Composite Structures*, Vol. 249, 2020.
- [13] A. Benachour, H. D. Tahar, H. A. Atmane, A. Tounsi, M. S. Ahmed, A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 42, pp. 1386-1394, 2011.
- [14] Z. Belabed, M. S. A. Houari, A. Tounsi, S. R. Mahmoud, O. A. Bég, An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 60, pp. 274-283, 2014.
- [15] F. Zohra Zaoui, D. Ouinas, A. Tounsi, [1] M. Arefi, M. Meskini, Application of hyperbolic shear deformation theory to free vibration analysis of functionally graded porous plate with piezoelectric face-sheets, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 71, No. 5, pp. 459-467, 2019.
- [2] M. Livani, Three dimensional bending analysis of multi-directional functionally graded annular sector thick plates, *Aerospace Knowledge and Technology Journal*, Vol. 9, No. 1, pp. 113-124, 2020. (in Persian فارسی)
- [3] S. E. Kim, N. D. Duc, V. H. Nam, N. V. Sy, Nonlinear vibration and dynamic buckling of eccentrically oblique stiffened FGM plates resting on elastic foundations in thermal environment, *Thin-Walled Structures*, Vol. 142, pp. 287-296, 2019.
- [4] S. Alimirzaei, M. Mohammadimehr, A. Tounsi, Nonlinear analysis of viscoelastic micro-composite beam with geometrical imperfection using FEM: MSGT electro-magneto-elastic bending, buckling and vibration solutions, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 71, No. 5, pp. 485-502, 2019.
- [5] M. Habibi, A. R. Mohammadi, H. Safarpour, M. Ghadiri, Effect of porosity on buckling and vibrational characteristics of the imperfect GPLRC composite nanoshell, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, Vol. 46, No. 6, pp. 1-30, 2019.
- [6] M. Bouazza, A. M. Zenkour, Hygro-thermo-mechanical buckling of laminated beam using hyperbolic refined shear deformation theory, *Composite Structures*, Vol. 252, 2020.
- [7] A.R. Rahimi, M. Livani, A. Negahban Boron, Free vibration analysis of functionally graded material beams with transverse crack, *Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 51, No. 1, pp. 277-



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{13} \\ 0 & 0 & e_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{51} & 0 & 0 \\ 0 & e_{62} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

۳. منتهجهای تنش برای ورق ساندویچی  
به صورت زیر تعریف می شوند [۱]:

$$\begin{aligned} \int \sigma_i dz &= N_i; (i = x, y, xy) \\ \int \sigma_i z dz &= M_i^b; (i = x, y, xy) \\ \int \sigma_i f(z) dz &= M_i^s; (i = x, y, xy) \\ \int \tau_{ij} g(z) dz &= S_{ij}; (i, j = xz, yz) \\ \int D_i \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) dz &= P_i; (i = x, y) \\ \int D_i \frac{\pi}{h_p} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) dz &= R_i; (i = z) \end{aligned}$$

۴. ثوابت مورد استفاده در این مقاله  
به صورت زیر تعریف می شود [۱]:

$$\begin{aligned} \{A_i, B_i, D_i, E_i, F_i, G_i, H_i\} &= \\ \int (1, z, z^2, f(z), zf(z), f(z)^2, g(z)^2) c_i dz, \\ \{I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8\} &= \\ \int (1, z, z^2, f(z), zf(z), f(z)^2, g(z), g(z)^2) \rho(z) dz, \\ L_{ij}^3 &= \int \cos\left(\frac{\pi z}{h_{pi}}\right) \cdot g(z) \cdot e_{ij} dz, \\ L_{ij}^5 &= \int \left(\cos\left(\frac{\pi z}{h_{pi}}\right)\right)^2 \cdot e_{ij} dz, \\ K_{ij}^1 &= \int \left(\frac{\pi}{h_{pi}} \sin\left(\frac{\pi z}{h_{pi}}\right)\right) \cdot e_{ij} dz, \\ K_{ij}^2 &= \int \left(\frac{\pi}{h_{pi}} \sin\left(\frac{\pi z}{h_{pi}}\right)\right) \cdot z \cdot e_{ij} dz, \\ K_{ij}^4 &= \int \left(\frac{\pi}{h_{pi}} \sin\left(\frac{\pi z}{h_{pi}}\right)\right) \cdot f(z) \cdot e_{ij} dz, \\ K_{ij}^5 &= \int \left(\frac{\pi}{h_{pi}} \sin\left(\frac{\pi z}{h_{pi}}\right)\right)^2 \cdot e_{ij} dz. \end{aligned}$$

۵. درایه های ماتریس [K] به صورت زیر  
است:

$$\begin{aligned} K_{11} &= -A_{11}\lambda^2 - A_{66}\mu^2 \\ K_{12} &= -A_{12}\lambda\mu - A_{66}\lambda\mu \\ K_{13} &= B_{11}\lambda^3 + B_{12}\lambda\mu^2 + 2B_{66}\lambda\mu^2 \\ K_{14} &= E_{12}\lambda\mu^2 + 2E_{66}\lambda\mu^2 + E_{11}\lambda^3 \\ K_{15} &= 0 \end{aligned}$$

New 2D and quasi-3D shear deformation theories for free vibration of functionally graded plates on elastic foundations. *Composites Part B: Engineering*, Vol. 159, pp. 231-247, 2019.

[16] A. M. Zenkour, A simple four-unknown refined theory for bending analysis of functionally graded plates, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, pp. 9041-9051, 2013.

[17] S. S. Akavci, A. H. Tanrikulu, Static and free vibration analysis of functionally graded plates based on a new quasi-3D and 2D shear deformation theories. *Composites Part B: Engineering*, Vol. 83, pp. 203-215, 2015.

## ۷. پیوست

۱. روابط کرنش - جابه جایی را می توان  
به صورت زیر بیان کرد [۱]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \\ &\quad - 2f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = g(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = g(z) \frac{\partial w_s}{\partial y}. \end{aligned}$$

۲. روابط تنش کرنش برای لایه های  
پیزوالکتریک به صورت زیر تعریف می شود [۱]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{pi} & C_{12}^{pi} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{pi} & C_{22}^{pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33}^{pi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^{pi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^{pi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} -$$



طول پوسته ساندویچی	A	$K_{16} = K_{13}^1 \lambda$
عرض پوسته ساندویچی	B	$K_{21} = -A_{12} \lambda \mu - A_{66} \lambda \mu$
اندیس مربوط تنش برشی	S	$K_{22} = -A_{66} \lambda^2 - A_{22} \mu^2$
مدول الاستیک	E	$K_{23} = 2B_{66} \lambda^2 \mu + B_{12} \lambda^2 \mu + B_{22} \mu^3$
ضریب پواسون	v	$K_{24} = 2E_{66} \lambda^2 \mu + E_{12} \lambda^2 \mu + E_{22} \mu^3$
توان تابع تغییرات خواص مواد FG	K	$K_{25} = 0$
تغییرات انرژی کرنشی	$\delta U$	$K_{26} = K_{23}^1 \mu$
تغییرات انرژی جنبشی	$\delta T$	$K_{31} = B_{11} \lambda^3 + B_{12} \lambda \mu^2 + 2B_{66} \lambda \mu^2$
ضرایب دیالکتریک	$c_{ij}$	$K_{32} = B_{11} \lambda^2 \mu + 2B_{66} \lambda^2 \mu + B_{22} \mu^3$
		$K_{33} = -D_{11} \lambda^4 - D_{22} \mu^4 - 2D_{12} \lambda^2 \mu^2$
		$-4D_{66} \lambda^2 \mu^2$
		$K_{34} = -F_{11} \lambda^4 - F_{22} \mu^4 - 2F_{12} \lambda^2 \mu^2$
		$-4F_{66} \lambda^2 \mu^2$
		$K_{35} = 0$
		$K_{36} = -K_{23}^2 \mu^2 - K_{13}^2 \lambda^2$
		$K_{41} = E_{11} \lambda^3 + E_{12} \lambda \mu^2 + 2E_{66} \lambda \mu^2$
		$K_{42} = E_{12} \lambda^2 \mu + 2E_{66} \lambda^2 \mu + E_{22} \mu^3$

### پی نوشت

- 1- FGM
- 2- Contentiously
- 3- Step-Wisely
- 4- Hamilton's Principal

### فهرست علائم

ضخامت لایه پیزوالکتریک	$h_{pi}$
ضخامت هسته	$h_c$
ضخامت کل ورق ساندویچی	$h$
توابع مجهول برای جابه جایی های	$u(x,y,t),$
درون صفحه ای	$v(x,y,t)$
تابع مجهول برای جابه جایی عرضی	$w(x,y,t)$
صفحه	
پتانسیل الکتریکی اولیه	$\psi_0$
پتانسیل الکتریکی	$\psi$
ضرایب پیزوالکتریک	$\epsilon_{ij}, e_{ij}$
مؤلفه های میدان الکتریکی	$E_{ij}$
مؤلفه برشی جابه جایی عرضی تیر	$w_s$
مؤلفه خمشی جابه جایی عرضی تیر	$w_b$

