

بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی تیر نانوکامپوزیتی با روش شبیه‌سازی چند مقیاسه

مجید جمال امید^۱، مهدی شایان‌مهر^۲، سعید شکراللهی^۳

۱ و ۳ دانشیار، مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران

۲ دانشجوی دکتری مهندسی هوافضا، مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، mahdishayanmehr@mut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۶/۰۶

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۷/۰۴

چکیده

هدف از این مقاله بررسی رفتار ارتعاشات آزاد عرضی غیرخطی المان حجمی معرف نانوکامپوزیت متشکل از رزین و نانولوله کربنی براساس تئوری ون کارمن به‌منظور پیش‌بینی رفتار ارتعاشات آزاد تیر نانوکامپوزیتی است. برای این منظور؛ تخست رفتار مکانیکی المان حجمی با روش چند مقیاسه به‌منظور استخراج رفتار ارتعاشی آن تعیین شده است. در این راستا المان‌های حجمی مختلفی با نسبت‌های طولی گوناگون نانولوله در نظر گرفته شده است که هر یک بیانگر گونه‌ای از توزیع نانولوله در فاز ماکرو می‌باشند. در ادامه با مدلسازی المان محدود و حل تحلیلی، فرکانس طبیعی المان حجمی بررسی شده است. برای صحت‌سنجی بیشتر نتایج، تحلیل مودال روی نانولوله مجزا انجام و با کارهای گذشته مقایسه شده است. سپس معادله ارتعاشاتی المان حجمی استخراج و رفتار ارتعاشات آزاد غیرخطی المان معرف ناشی از عاملیت غیرخطی هندسی بر اساس تئوری ون کارمن در شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. نمودارهای فرکانس طبیعی براساس شرایط توزیع نانوذرات در محیط رزین نشان داد که توزیع مناسب سبب افزایش فرکانس نوسان خطی و غیرخطی المان می‌شود. همچنین براساس نمودارهای فرکانس غیرخطی تحت شرایط مرزی مختلف ملاحظه شد شرایط مرزی سیستم بر میزان غیرخطی بودن رفتار تأثیر زیادی دارد. نتایج نشان داد با افزایش دامنه نوسان در شرایطی که سیستم قید کمتری دارد (مفصل - گیردار)، انحراف فرکانس غیرخطی حدود ۲۰ درصد از حالت مقیدتر (حالت دوسر درگیر) بیشتر است.

واژگان کلیدی

ارتعاشات آزاد عرضی، نانوکامپوزیت، نانولوله کربنی، شبیه‌سازی چند مقیاسه، فرکانس نوسان غیرخطی

۱. مقدمه

مواد مرکب با زمینه پلیمری، مواد پیشرفته‌ای هستند که طی سال‌های اخیر کاربرد گسترده‌ای در صنایع مختلف پیدا کرده‌اند. در این مواد، پلیمر دارای مدول برشی و استحکام کمتری در مقایسه با الیاف تقویت‌کننده می‌باشد. نانوکامپوزیت‌های کربن معمولاً از زمینه پلیمر و تقویت‌کننده نانولوله کربنی تشکیل شده‌اند. افزودن نانولوله‌های کربنی به زمینه سبب افزایش سفتی، چقرمگی و استحکام برشی بین لایه‌های کامپوزیت‌ها می‌شود [۱]. عمده کاربرد سازه‌های نانوکامپوزیت‌ها در مصارف نظامی و هواپیماهای تجاری است که در طراحی آنها کاهش وزن در کنار دستیابی به حداکثر استحکام نقش بسیار عمده‌ای دارد. نانوکامپوزیت‌های متشکل از نانولوله کربنی و رزین شامل چند فاز می‌باشند. فاز اول (مقیاس نانو) شامل نانولوله کربنی به‌طور مجزاست. اندازه بسیار کوچک و مدول یانگ بالای نانولوله‌ها از خواص ویژه آنهاست که عامل مهمی در استفاده از آنها در رزوناتورها و نوسانگرها می‌باشد [۲]. در این راستا بررسی فرکانس‌ها و شکل مودهای ارتعاشی نانولوله‌ها از اهمیت خاصی برخوردار است. بدین منظور تئوری‌های غیرمحمولی [۳-۵] و مدل‌های مکانیک پیوسته جهت مدلسازی ارتعاشی آنها مورد استفاده قرار گرفته است [۶-۹]. در ادامه همین فاز اتصال نانولوله کربنی به رزین می‌باشد. در واقع این قسمت دربرگیرنده یک نانولوله کربنی است که روی بستری از پیوندهای اتمی قرار گرفته است. در بررسی ارتعاشاتی نانولوله‌ها، رزین اطراف به‌صورت یک بستر الاستیک مدل می‌گردد؛ به‌طوری‌که نانولوله روی آن قرار گرفته است [۱۰]. نانولوله نیز به‌صورت یک تیر با خواص معادل مدلسازی می‌گردد [۱۱-۱۴].

مهمترین بخش در مطالعات رفتار ارتعاشاتی به‌دست آوردن معادلات حاکم بر سیستم است. ردی در مطالعه خود با استفاده از تئوری تیرهای مختلف مانند اولر برنولی، تیموشنکو، ردی و لوینسون، معادله ارتعاشی حاکم بر نانولوله را معرفی نمود [۱۵]. فاز بعدی (مقیاس میکرو) که مورد بررسی قرار می‌گیرد، شامل المان حجمی معرف^۱ است. این فاز دربرگیرنده یک المان رزین است که محتوی نانولوله کربنی است. به‌طور کلی با استفاده از روابط موجود در میکرو مکانیک، با بررسی خواص مکانیکی المان حجمی معرف می‌توان به خواص نانوکامپوزیت مورد نظر رسید. نحوه مدلسازی، همچنین متدهای حل مختلفی در استخراج خواص مکانیکی ارائه شده است. یکی از مسائل مهم در بررسی رفتار مکانیکی المان

حجمی معرف، مطالعه اتصال بین نانولوله کربنی و رزین دربرگیرنده آن است که به‌عنوان فاز واسط^۲ مطرح می‌شود. مطالعات بسیار محدودی فاز واسط را در قالب برهم‌کنش غیرپیوندی یا نیروهای ضعیف واندرالس در نظر گرفته‌اند. اما اغلب پژوهشگران، اتصال بین نانولوله و رزین اطراف آن را از نوع کامل و بی‌نقص تلقی کرده‌اند [۱۶]. در این مورد نیز برخی از محققین نشان داده‌اند که برای مدلسازی المان حجمی معرف می‌توان به‌طور کامل از ناحیه اتصالات نانولوله کربنی به رزین اطراف صرف‌نظر نمود [۹، ۱۴ و ۱۷]. برای مدلسازی دقیق اتصالات فاز واسط، برخی از محققان از روش چند مقیاسه مبتنی بر روش المان محدود استفاده کرده‌اند [۱۸-۱۹]. ذاکری و همکاران در این حوزه با استفاده از المان فینر ناحیه اتصالات را مدل نمودند [۲۰]. ایرانی و اثباتی نیز اتصال نانولوله کربنی عامل دار را با المان‌های مشابه مدلسازی و تحلیل کرده‌اند [۲۱]. رفتار مکانیکی المان حجمی معرف توسط محققان متعددی مورد بررسی قرار گرفته است [۲۳-۱۶]؛ در حالی‌که در خصوص بررسی رفتار ارتعاشاتی المان حجمی تحقیقات کمی انجام شده است. فریدون و همکاران به مدلسازی المان محدود المان حجمی شامل معرف نانولوله و رزین پرداخته‌اند و در شرایط مرزی مختلف فرکانس طبیعی این المان را محاسبه نموده‌اند. همچنین رفتار ارتعاشی این المان با اجرای آنالیز مودال که مربوط به ناحیه خطی است مورد بررسی قرار گرفته است [۲۲]. در آخرین فاز و در مقیاس مسو و ماکرو محققان به بررسی رفتار ارتعاشاتی تیر متشکل از رزین و نانوذرات، به‌طور خاص نانولوله کربنی پرداخته‌اند. در این حوزه تحقیقات انجام‌شده به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند. در دسته نخست عده‌ای از محققان به بررسی رفتار ارتعاشاتی تیر نانوکامپوزیتی و یا تیر کامپوزیتی تقویت‌شده با نانوذرات در محیط آزمایشگاهی پرداخته‌اند. این تحقیقات شامل بررسی فرکانس طبیعی، شکل مود، بررسی ارتعاشات اجباری و بررسی میرایی داخلی این سیستم‌ها می‌باشد [۲۴-۲۵]. دسته دوم تحقیقات شامل تحلیل رفتار ارتعاشاتی نانوکامپوزیت‌های تابعی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی^۳ است [۲۶]. در این تحقیقات یک تیر و یا یک صفحه متشکل از رزین که دربرگیرنده نانوذرات با پخش‌شدگی تابعی (برای مثال پخش‌شدگی تک‌جهته و مستقیم در داخل کامپوزیت^۴) است، با روابط تیرهای اولیر برنولی و یا

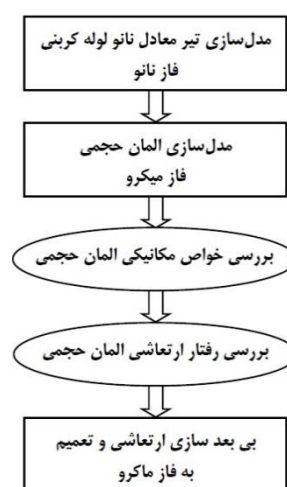
چند مقیاسه به‌دست آید. یک المان حجمی از یک نانولوله کربنی، رزین و ناحیه اتصالات تشکیل شده است. در تحقیق حاضر، اتصال نانولوله به رزین، براساس یافته‌های محققان پیشین به ازای حدود ۲ درصد حجمی نانولوله، کامل فرض شده است [۹، ۱۴ و ۱۷]. المان حجمی معرف، کلیه خواص مکانیکی سیستم را در فاز ماکرو پیش‌بینی می‌کند [۲۰]. در ادامه به‌منظور بررسی رفتار ارتعاشاتی المان‌های حجمی، مدول یانگ میانگین معادل متناسب با هر المان بسته به طول نانولوله و دیگر پارامترها استفاده شده است. برای بررسی ارتعاشات عرضی المان حجمی نیاز است که مدول الاستیسیته طولی آن محاسبه گردد. در تحقیق حاضر مدول نانولوله و رزین به‌ترتیب برابر با ۱ TPa و ۳/۵ GPa در نظر گرفته شده است [۱۲]. همچنین توزیع نانوذرات در محیط رزین از جمله مهمترین چالش‌های پیش روی محققان است. دست‌یافتن به توزیعی با کیفیت مناسب از مهمترین اهداف پروژه‌های آزمایشگاهی به‌حساب می‌آید. وقتی توزیع نانو ذرات مناسب باشد، المان‌های موجود در نانوکامپوزیت بهترین خواص مکانیکی را دارا می‌باشند. در این مقاله، این حالت با فرض کامل بودن طول نانولوله در رزین در نظر گرفته شده است. با کاهش کیفیت شرایط توزیع، کیفیت نانوکامپوزیت و بر اثر آن خواص مکانیکی افت پیدا می‌کند. در مقاله حاضر این افت خواص با کوتاه‌تر کردن نانولوله محصور در رزین نشان داده شده است. بر این اساس، مدول الاستیک المان حجمی معرف متناسب نحوه توزیع، در نسبت طول‌های مختلف نانولوله کربنی به طول المان مطابق با جدول ۱ محاسبه شده است. گفتنی است برای حفظ ماهیت مدل اصلی در مقیاس ماکرو کلیه المان‌های حجمی در نظر گرفته شده دارای درصد حجمی نانولوله کربنی یکسانی می‌باشند. که این مقدار برای توزیع کاملاً یکنواخت تقریباً برابر با ۲ درصد در نظر گرفته شده است.

جدول ۱. مدول الاستیک طولی المان حجمی (۲ درصد حجمی نانولوله) [۱۲]

حالت	توزیع	نسبت L_{CNT}/L_{RVE}	مدول الاستیک GPa
۱	کاملاً همگن	۱	۹/۰
۲	همگن	۰/۸	۷/۲
۳	پراکندگی متوسط	۰/۶	۵/۵
۴	ضعیف	۰/۴	۴/۸

تیموشنکو مدل شده است. پس از محاسبه مدول الاستیک نمونه مد نظر در جهات مختلف و یا محاسبه مدول میانگین، فرکانس‌های طبیعی سیستم و ارتعاشات آزاد آن بررسی شده‌اند [۲۹-۲۷].

با توجه به بررسی تحقیقات گذشته ملاحظه شد که در مقیاس میکرو تحقیقات بسیار اندکی بر رفتار ارتعاشاتی المان حجمی حاوی نانولوله کربنی انجام شده است. همچنین تمرکز اکثر تحقیقات روی بررسی خواص مکانیکی این ناحیه می‌باشد. از منظر دیگر سازه‌های هوافضایی مهمترین نوع سازه‌ها هستند که پتانسیل ورود به محدوده‌های نوسانی غیرخطی را دارند، لذا در مقاله حاضر هدف بررسی ارتعاشات آزاد یک المان حجمی حاوی نانولوله کربنی به‌منظور استخراج فرکانس‌های طبیعی (ناحیه خطی) و تعیین رفتار غیرخطی المان براساس روش تحلیلی می‌باشد. در این راستا ابتدا معادله ارتعاشات خمشی المان حجمی با در نظر گرفتن آن به‌عنوان یک تیر اویلر برنولی و براساس تئوری ون‌کارمن^۵ استخراج شده و سپس به حل معادله غیرخطی آن براساس تئوری بالانس هارمونیک پرداخته می‌شود. در ادامه فرکانس طبیعی خطی و فرکانس نوسان غیرخطی سیستم برحسب دامنه تحریک اولیه‌ای المان و تأثیر شرایط مرزی المان و نحوه توزیع نانوذرات بر فرکانس سیستم مورد بررسی قرار می‌گیرد. مراحل انجام تحقیق در شکل ۱ آورده شده است.



شکل ۱. فرایند انجام پژوهش

۲. بیان مسئله و فرضیات حاکم

برای بررسی رفتار ارتعاشاتی المان حجمی معرف در گام نخست نیاز است تا مدول الاستیک المان با توجه به روش شبیه‌سازی

۲-۱. استخراج معادله حاکم در فاز میکرو

در این بخش برای بررسی و تحلیل رفتار ارتعاشی عرضی المان حجمی تحت تأثیر عامل غیرخطی هندسی (جابه‌جایی بزرگ)، در ابتدا لازم است معادلات حاکم بر رفتار خمشی المان حجمی با در نظر گرفتن آن به‌عنوان یک تیر معادل استخراج گردد. لذا معادلات لازم برای تحلیل رفتار خمشی المان براساس معادله کرنش-جابه‌جایی غیرخطی ون‌کارمن بسط داده شده است [۲۶]. برای المان هدف جابه‌جایی عرضی و محوری به‌ترتیب با $w(x, t)$ و $u(x, t)$ در نظر گرفته شده و بیانگر جابه‌جایی صفحه میانی^۶ می‌باشند.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (۱)$$

بر اساس رابطه الاستیک خطی اجزای تشکیل‌دهنده ماده^۷ رابطه تنش با توجه به رابطه ۱ به‌صورت زیر قابل بیان است [۲۶].

$$\sigma_{xx} = Q_{11}(z) \left[\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]; \quad (۲)$$

$$Q_{11}(z) = Q_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2} = cte$$

که در آن E مدول یانگ معادل المان و ν ضریب پواسون المان است که این پارامتر ثابت و برابر با 0.33 در نظر گرفته شده است. در ادامه با توجه به روابط ۱ و ۲، انرژی پتانسیل و جنبشی المان و همچنین کار نیروهای ناپایستار محاسبه می‌شود.

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_{xx} \sigma_{xx} dz dx = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(z) \left[\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dz dx \quad (۳)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dz dx \quad (۴)$$

$$w_{n.c} = \int_0^l F(x, t) W(x, t) dx \quad (۵)$$

با استفاده از اصل همپلتونین داریم:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(V - T + w_{n.c}) dt = 0 \rightarrow \quad (۶)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta V - \delta T + \delta w_{n.c}) dt = 0$$

به‌منظور استفاده از معادله فوق، تغییرات انرژی پتانسیل، جنبشی و کار در ادامه تعریف شده است. تغییرات انرژی پتانسیل:

$$\begin{aligned} \delta V &= \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(z) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] dz dx \\ &= \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) A_{11} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} B_{11} \right] \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx \\ &+ \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) A_{11} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} B_{11} \right] \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} dx \\ &+ \int_0^l \left[- \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) B_{11} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} D_{11} \right] \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} dx \end{aligned} \quad (۷)$$

$$A_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(z) dz;$$

$$B_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot Q_{11}(z) dz; \quad (۸)$$

$$D_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \cdot Q_{11}(z) dz$$

$$N_x = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) A_{11} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} B_{11}; \quad (۹)$$

$$M_x = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) B_{11} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} D_{11}$$

رابطه ۷ به‌صورت زیر قابل بیان است.

$$\delta V = \int_0^l \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u - \frac{\partial}{\partial x} \left[N_x \frac{\partial w}{\partial x} \right] \delta w - \frac{\partial^2}{\partial x^2} M_x \delta w \right) dx \quad (۱۰)$$

تغییرات انرژی جنبشی:

$$\delta T = \int_0^l \left(I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) dx; \quad (۱۱)$$

با استفاده از معادله ۲ و ۸، معادله فوق به فرم کلاسیک زیر ساده می‌شود:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + \rho A \frac{d^2 w}{dt^2} - N \frac{d^2 w}{dx^2} = p(x, t) \quad (19)$$

برای بررسی رفتار ارتعاشات آزاد، $p(x, t)$ را برابر صفر قرار می‌دهیم. در ادامه تابع تغییر مکان به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$w(x, t) = \varphi(x)q(t) \quad (20)$$

که در آن با توجه به شرط مرزی تکیه‌گاه ساده، از شکل مود اول تیر خطی با تکیه‌گاه ساده، برای تابع $\varphi(x)$ استفاده شده است. در جدول ۲ این تابع برای شرایط مرزی مختلف آورده شده است [۳۰]. با جایگذاری معادله ۲۰ در معادله ۱۹، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\ddot{q}(t) + a_1 q(t) + a_2 q^3(t) = 0 \quad (21)$$

$$a_1 = \frac{EI\beta^4}{\rho A l^4} \quad (22)$$

$$a_2 = \frac{EI\pi^4}{4\rho l^4} \quad (23)$$

پارامتر β برای شرایط مرزی مختلف مطابق جدول ۲ انتخاب می‌گردد.

۲-۲. حل معادله استخراج شده حاکم در فاز میکرو

برای حل معادله ارتعاشاتی حاکم بر سیستم از روش بالانس هارمونیک استفاده شده است. در این روش با فرض پاسخ سیستم به صورت $q(t) = Q \sin(\Omega t)$ (مربوط به پاسخ سیستم است) و جایگذاری در رابطه ۲۱ رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\left(\frac{3}{4} a_2 Q^3 - Q\Omega^2 + a_1 Q \right) \sin(\Omega t) - \frac{1}{4} a_2 Q^3 \sin(3\Omega t) = 0 \quad (24)$$

با صفر قرار دادن ضریب $\sin(\Omega t)$ ، داریم:

$$\frac{3}{4} a_2 Q^3 - Q\Omega^2 + Q a_1 = 0 \quad (25)$$

بر اساس رابطه ۲۵، فرکانس غیرخطی سیستم (ω) برحسب دامنه نوسان استخراج می‌شود:

$$\omega = \frac{\sqrt{4a_1 + 3a_2 Q^2}}{2} \quad (26)$$

همچنین با توجه به رابطه ۲۵، فرکانس طبیعی خطی سیستم قابل محاسبه می‌باشد.

$$I_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz$$

تغییرات کار ناپایستار:

$$\delta w_{n.c} = \int_0^l F \delta w dx \quad (12)$$

با استفاده از روابط ۶ تا ۱۲ رابطه زیر منتج می‌شود.

$$\begin{cases} -\frac{\partial N_x}{\partial x} + I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} M_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[N_x \frac{\partial w}{\partial x} \right] - I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -F \end{cases} \quad (13)$$

با صرف نظر از ارتعاشات محوری ترم اول معادله

$$\begin{aligned} -\frac{\partial N_x}{\partial x} = 0 &\rightarrow N_x = cte = N_{x0}; \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) A_{11} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} B_{11} &= N_{x0} \end{aligned} \quad (14)$$

در رابطه فوق، $\partial u / \partial x$ برابر است با:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{A_{11}} \left(N_{x0} + B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (15)$$

المان حجمی به صورت یک المان مکعب مستطیل شکل در نظر گرفته شده است؛ به طوری که از محیط اطراف خود تأثیر می‌پذیرد. در ادامه به منظور بررسی این تأثیر، المان محصور در داخل نانوکامپوزیت تحت شرایط مرزی دوسرگیردار (C-C)، دوسر مفصل (P-P) و گیردار - مفصل (C-P) مدل شده است. با توجه به شرایط حاکم داریم:

$$u(0) = u(L) = 0;$$

$$\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = u|_0^l = 0 = \quad (16)$$

$$\int_0^l \left(\frac{1}{A_{11}} \left(N_{x0} + B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) dx$$

$$N_{x0} = \frac{A_{11}}{l} \int_0^l \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{B_{11}}{A_{11}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx \quad (17)$$

با توجه به رابطه فوق و جایگزین کردن معادله ۱۵ در معادله ۹ و سپس قرار دادن M_x در معادله ۱۳، معادله حاکم به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ - \left(\frac{A_{11}}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = F(x, t) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\omega_n = \sqrt{a_1} = \sqrt{\frac{EI(\beta_1 L)^4}{\rho A L^4}} \quad (27)$$

در روابط فوق ω فرکانس غیرخطی، ω_n فرکانس طبیعی خطی و Q دامنه نوسان سیستم می‌باشند. همچنین I ممان اینرسی، ρ چگالی، L طول و A سطح مقطع المان می‌باشند.

۳. بحث و نتیجه گیری

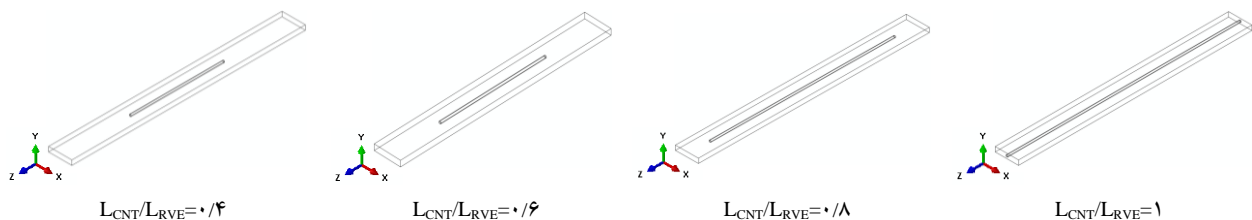
بم منظور بررسی رفتار ارتعاشی عرضی المان حجمی، المانی شامل یک نانولوله با نسبت‌های مختلف طولی از $0/4$ تا 1 که در وسط المان در راستای طولی قرار گرفته، در نظر گرفته شده است (شکل ۲). در شکل ۳ نمایی از المان حاوی نانولوله و مشخصات هندسی المان نمایش داده شده است.

قبل از تحلیل ارتعاشاتی المان مورد نظر لازم است خواص مکانیکی و هندسی المان مورد بررسی قرار گیرید. اطلاعات مربوط به مدول الاستیسته تحلیلی در جدول ۱ آورده شده است. نسبت پواسون رزین و نانولوله برابر با $0/3$ و چگالی رزین و نانولوله به ترتیب برابر 1150 kg/m^3 و 2500 kg/m^3 در نظر گرفته شده است. همچنین در مدلسازی تحلیلی از چگالی معادل

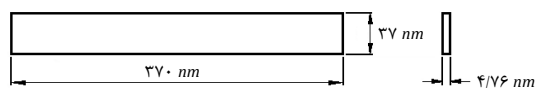
استفاده شده است. با توجه به اینکه در حوزه بررسی رفتار ارتعاشاتی المان حجمی تاکنون تحقیقی در این سطح انجام نشده است، برای صحت‌سنجی روابط استخراج شده از نتایج موجود مربوط به فرکانس طبیعی (خطی) یک نانولوله منفرد استفاده شده است. نتایج حاصل از بررسی فرکانس طبیعی اول بی بعد ارتعاشات آزاد خطی عرضی نانولوله کربنی (0 و 10) با ضریب منطری 20 تحت شرایط مرزی دوسر مفصل در جدول ۳ آورده شده است. در ادامه رفتار ارتعاشی المان حجمی با نتایج شبیه‌سازی عددی مورد ارزیابی قرار گرفته است. جهت شبیه‌سازی عددی از نرم افزار المان محدود آباکوس استفاده شده است. در فرایند مدلسازی از مش شش ضلعی از نوع Sweep Medial Axis به تعداد چهارصد تا هشتصد هزار، بسته به نسبت طولی نانولوله استفاده شده است. نمایشی از شبیه‌سازی و مش‌بندی المان در شکل ۴ آورده شده است. در جدول ۴ نتایج فرکانس طبیعی المان مورد نظر با دو روش تحلیلی و المان محدود ارائه شده است. مقایسه نتایج میزان اختلاف در بیشترین حالت را حدود 5 درصد نشان می‌دهد که این امر حاکی از صحت محاسبات انجام شده در ناحیه خطی است.

جدول ۲. توابع مورد استفاده برای شرایط مرزی مختلف [۳۰]

$\varphi(x)$	شرایط مرزی
$\sinh(\beta_1 x) - \sin(\beta_1 x) + \alpha_1 [\cosh(\beta_1 x) - \cos(\beta_1 x)];$ $\alpha_1 = \frac{\sinh(\beta_1 x) - \sin(\beta_1 x)}{\cos(\beta_1 x) - \cosh(\beta_1 x)}; \quad \beta_1 L = 4/3$	C-C
$\sin(\beta_1 x) - \sinh(\beta_1 x) + \alpha_1 [\cosh(\beta_1 x) - \cos(\beta_1 x)];$ $\alpha_1 = \frac{\sin(\beta_1 x) - \sinh(\beta_1 x)}{\cos(\beta_1 x) - \cosh(\beta_1 x)}; \quad \beta_1 L = 3/9266$	C-P
$\sin(\beta_1 x); \quad \beta_1 = \frac{\pi}{L}$	P-P



شکل ۲. المان حجمی حاوی نانولوله با نسبت طول‌های مختلف



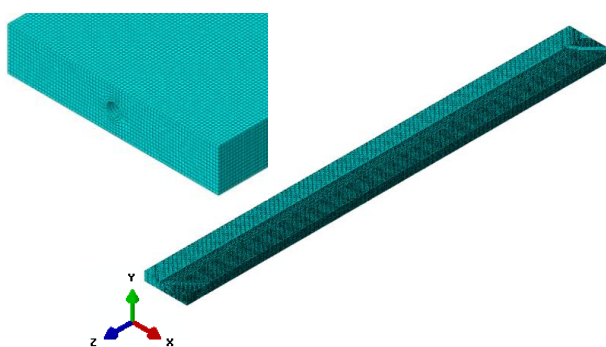
شکل ۳. مشخصات هندسی المان حجمی

جدول ۳. سه فرکانس طبیعی اول بی بعد مربوط به ارتعاشات آزاد عرضی نانولوله کربنی (۰ و ۱۰) با ضریب منطری ۲۰ تحت شرایط دوسر مفصل

ت تحقیق حاضر	مرجع [۳]	مرجع [۴]	مرجع [۵]
۹/۸۶۹۶۵۱	۹/۸۶۹۶	۹/۸۳۸۱	۹/۸۳۵۶
۳۹/۴۷۸۶	۳۹/۴۷۸	۳۸/۹۶۴	۳۸/۹۱۸
۸۸/۸۲۶۸۶	۸۸/۸۲۶	۸۵/۷۴۸	۸۶/۰۷۲

جدول ۴. نتایج فرکانس طبیعی المان حجمی مورد بررسی

نسبت L_{CNT}/L_{RVE}				روش حل	شرایط مرزی
۱/۰	۰/۸	۰/۶	۰/۴		
فرکانس طبیعی المان (GHz)					
۰/۶۲۸	۰/۵۶۱	۰/۴۹۱	۰/۴۵۸	تحلیلی	C-C
۰/۶۲۲	۰/۵۵۵	۰/۴۸۰	۰/۴۵۲	عددی	
۰/۴۳۱	۰/۳۸۶	۰/۳۷۷	۰/۳۱۵	تحلیلی	C-P
۰/۴۴۱	۰/۳۷۷	۰/۳۸۷	۰/۳۲۱	عددی	
۰/۲۷۷	۰/۲۴۷	۰/۲۱۶	۰/۲۰۲	تحلیلی	P-P
۰/۲۶۳	۰/۲۴۱	۰/۲۲۰	۰/۱۹۸	عددی	
۰/۰۹۸	۰/۰۸۸	۰/۰۷۷	۰/۰۷۲	تحلیلی	C-F
۰/۰۹۶	۰/۰۸۳	۰/۰۷۵	۰/۰۶۷	عددی	



شکل ۴. نمایش شبیه‌سازی و مش‌بندی المان در محیط نرم‌افزار المان محدود آباکوس

نمودار تغییرات فرکانس غیرخطی نوسان برحسب دامنه نوسان برای نسبت‌های طولی مختلف (شرایط توزیع مختلف) تحت شرایط مرزی دوسر درگیر در شکل ۶ آورده شده است. همچنین نمودار فرکانس نوسان غیر خطی بی‌بعد برحسب دامنه بی‌بعد نوسان در شکل ۷ ارائه شده است. پارامترهای بی‌بعد برای

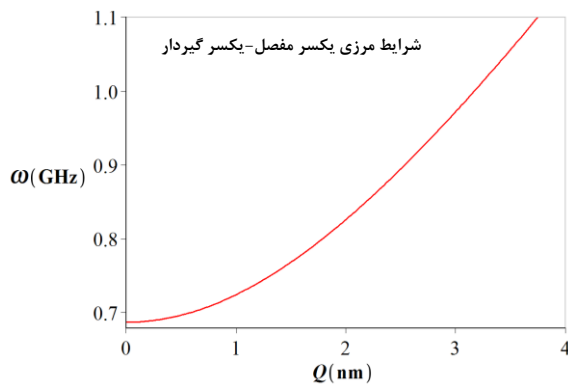
در ادامه فرکانس نوسان غیرخطی سیستم برحسب دامنه با توجه به روابط ۲۶ و ۲۷ بررسی شده است. نمودار فرکانس حالت غیرخطی برحسب دامنه نوسان برای شرایط مختلف مرزی و برای نسبت طولی $L_{CNT}/L_{RVE}=1$ در شکل ۵ نمازش داده شده است. به‌منظور مشخص شدن روند تغییرات فرکانس غیرخطی نوسان،

محاسبه فرکانس نوسان غیرخطی سیستم برحسب دامنه از رابطه زیر به دست آمده است:

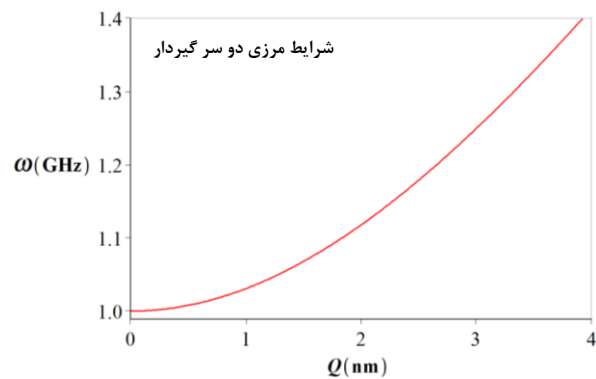
$$v = \frac{\omega}{\omega_n}; \quad \delta = \frac{Q}{\sqrt{I/A}} \quad (28)$$

که در آن v فرکانس نوسان غیرخطی بی‌بعد و δ دامنه بی‌بعد نوسان است. نتایج بررسی‌ها بیانگر آن است که شرایط مرزی المان حجمی بر رفتار ارتعاشاتی آن بسیار تأثیرگذار است؛ بدین معنا که هرچه المان حجمی مقیدتر باشد، رفتار سیستم به حالت

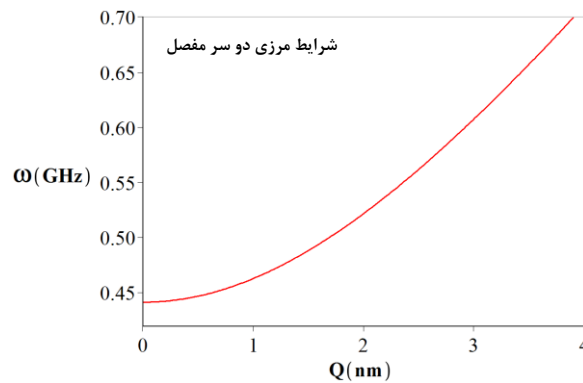
خطی نزدیکتر است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در رفتار خطی با افزایش دامنه، فرکانس تغییر نمی‌کند و در حالتی که سیستم بیشتر مقیدتر شده است درصد افزایش فرکانس نوسان غیرخطی نسبت به فرکانس خطی کمتر از حالتی است که قید سیستم کمتر است. این مطلب در شکل‌های ۶ و ۷ نشان داده شده که بر این اساس المان حجمی با شرایط مرزی دوسرگیردار نزدیکترین رفتار به حالت خطی را از خود نشان می‌دهد. در واقع قید بیشتر مانع از بروز شرایط غیرخطی هندسی در تیر مورد نظر می‌گردد.



ب) شرایط مرزی یکسر مفصل - یکسر گیردار

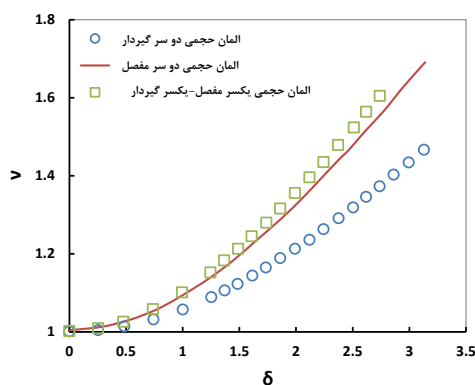


الف) شرایط مرزی دوسر گیردار

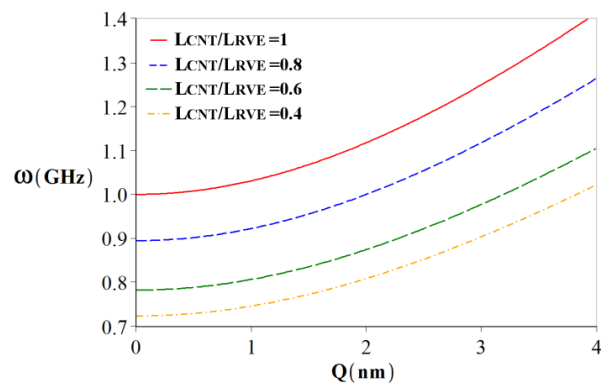


ج) شرایط مرزی دو سر مفصل

شکل ۵. فرکانس نوسان غیرخطی المان حجمی تحت شرایط مرزی مختلف ($L_{CNT}/L_{RVE}=1$)



شکل ۷. فرکانس بی‌بعد حالت غیرخطی برحسب دامنه بی‌بعد نوسان



شکل ۶. فرکانس نوسان غیرخطی المان حجمی برای نسبت طول‌های مختلف نانولوله تحت شرایط مرزی دوسر در گیر

۴. نتیجه‌گیری

با استفاده از روابط تحلیلی استخراج و نتایج حاصل با تحقیقات گذشته مقایسه و ارزیابی شده است. در فاز بعد، پس از استخراج معادله ارتعاشاتی المان حجمی و فرکانس طبیعی (خطی)، فرکانس نوسان غیرخطی سیستم برحسب دامنه نوسان المان و تأثیر شرایط مرزی المان بر فرکانس نوسان سیستم با استفاده از روابط تحلیلی استخراج شده مورد بررسی قرار گرفت. نمودار فرکانس طبیعی برحسب دامنه نوسان و همچنین نمودار فرکانس‌های بی‌بعد برحسب دامنه بی‌بعد نوسان نشان داد که شرایط مرزی سیستم و نحوه توزیع نانوذررات در محیط رزین بر میزان غیرخطی بودن رفتار تأثیر زیادی دارد. به طوری که در شرایطی که سیستم قید کمتری دارد (مفصل - گیردار) میزان فرکانس غیرخطی آن حدود ۲۰ درصد از حالت مقیدتر (دوسر درگیر) بیشتر است در این حالت تغییر بیشتری در مقدار فرکانس نوسان غیرخطی نسبت به فرکانس طبیعی (محدوده خطی) ایجاد شده که سبب می‌شود المان رفتار غیرخطی‌تری را از خود بروز دهد. همچنین نتایج نشان داد که بهبود شرایط توزیع نانولوله کربنی در محیط رزین سبب افزایش فرکانس نوسان سیستم می‌گردد.

در این مقاله ارتعاشات عرضی آزاد غیرخطی یک المان حجمی معرف در شرایط مختلف تکیه‌گاهی به‌منظور پیش‌بینی خواص مدل نانوکامپوزیتی در فاز ماکرو با روش شبیه‌سازی چند مقیاسه مورد بحث و بررسی قرار گرفته شد. در ادامه نتایج تحقیق در دو قسمت مربوط به فرکانس طبیعی در ناحیه خطی و فرکانس نوسان غیرخطی ارائه شده است. در ابتدا خواص مکانیکی مورد نیاز برای تحلیل ارتعاشاتی براساس نحوه توزیع نانولوله در محیط رزین استخراج گردید. پس از مدلسازی المان محدود مدل‌ها، تحلیل خطی فرکانس طبیعی مربوط به المان‌های حجمی مورد نظر به صورت عددی و تحلیلی در شرایط مرزی مختلف انجام گرفت. نتایج این بخش نشان داد که نسبت طول‌های بالاتر نانولوله که بیانگر توزیع یکنواخت‌تر نانولوله‌ها در محیط رزین می‌باشند، فرکانس طبیعی بالاتری دارند. در این حوزه نتایج تحلیلی فرکانس‌های طبیعی المان‌های حجمی با نتایج شبیه‌سازی عددی مقایسه و انطباق مناسبی بین نتایج مشاهده شده است. همچنین برای صحت‌سنجی بیشتر، فرکانس طبیعی نانولوله مجزا

۵. مأخذ

- [1] M. C. Weisenberger, R. Andrew, Carbon nanotube polymer composites, *Solid State & Materials Science*, Vol. 8, No. 1, pp. 31-37, 2004.
- [2] R. F. Gibson, E. O. Ayorinde, Y. F. Wen, Vibrations of carbon nanotubes and their composites: A review, *Composites Science and Technology*, Vol. 67, No. 1, pp. 1-28, 2007.
- [3] M. Simsek, Vibration analysis of a single-walled carbon nanotube under action of a moving harmonic load based on nonlocal elasticity theory, *Physica E*, Vol. 43, No. 1, pp. 182-191, 2010.
- [4] M. Aydogdu, A general nonlocal beam theory: Its application to nanobeam bending, buckling and vibration, *Physica E*, Vol. 41, No. 9, pp. 1651-1655, 2009.
- [5] P. Soltani, A. Kassaei, M. M. Taherian, A. Farshidianfar, Vibration of wavy single-walled carbon nanotubes based on nonlocal Euler Bernoulli and Timoshenko models, *International Journal of Advanced Structural Engineering*, Vol. 4, No. 3, pp. 1-10, 2012.
- [6] J. N. Lü, H. B. Chen, P. Lü, P. Q. Zhang, Research of natural frequency of single-walled carbon nanotube, *Chinese Journal of Chemical Physics*, Vol. 20, No. 5, pp. 525-530, 2007.
- [7] S. K. Georgantzinos, N. K. Anifantis, Vibration analysis of multi-walled carbon nanotubes using a spring-mass based finite element model, *Computational Materials Science*, Vol. 47, No. 1, pp. 168-177, 2009.
- [8] S. Brischetto, A continuum elastic three-dimensional model for natural frequencies of single-walled carbon nanotubes, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 61, pp. 222-228, 2014.
- [9] M. Jamal-Omidi, M. ShayanMehri, R. Mosalmani, Investigating the effect of interphase and surrounding resin on carbon nanotube free vibration behavior, *Physica E*, Vol. 68, pp. 42-52, 2015.
- [10] Z. Hong, D. Qing-tian, L. Shao-hua, Vibration of a single-walled carbon nanotube embedded elastic medium under a moving internal

- nanoparticle, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 10-11, pp. 6940-6951, 2013.
- [11] T. Murmu, S. Adhikari, Nonlocal elasticity based vibration of initially pre-stressed coupled nanobeam systems, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 34, pp. 52-62, 2012.
- [12] K. I. Tserpes, A. Chanteli, Parametric numerical evaluation of the effective elastic properties of carbon, nanotube-reinforced polymers, *Composite Structures*, Vol. 99, pp. 366-374, 2013.
- [13] R. Rafiee, Analysis of nonlinear vibrations of a carbon nanotube using perturbation technique, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 3, pp. 60-67, 2012. (in Persian فارسی)
- [14] M. R. Ayatollahi, S. Shadlou, M. M. Shokrieh, Multiscale modeling for mechanical properties of carbon nanotube reinforced nanocomposites subjected to different types of loading, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 9, pp. 2250-2259, 2011.
- [15] J. N. Reddy, Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 45, No. 2-8, pp. 288-307, 2007.
- [16] R. F. Gibson, *Principles of Composite Material Mechanics*, Second Edition, pp. 97-134, CRC Press, 2007.
- [17] A. Al Masud, A. K. M. Masud, Effect of interphase characteristic and property on axial modulus of carbon nanotube based composites, *Journal of Mechanical Engineering ME*, Vol. 41, No. 1, pp. 15-24, 2010.
- [18] K. I. Tserpes, P. Papanikos, G., N. Labeas, Sp. G. Pantelakis, Multi-scale modeling of tensile behavior of carbon nanotube-reinforced composites, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 49, No. 1, pp. 51-60, 2008.
- [19] M. J. S. Zuberi, V. Esat, Investigating the mechanical properties of single walled carbon nanotube reinforced epoxy composite through finite element modeling, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 71, pp. 1-9, 2015.
- [20] M. Zakeri, M. Shayanmehr, M. M. Shokrieh, Interface modeling of nanotube reinforced nanocomposites by using multi-scale modeling method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 5, pp. 1-11, 2013. (in Persian فارسی)
- [21] A. H. Esbati, S. Irani, Mechanical properties and fracture analysis of functionalized carbon nanotube embedded by polymer matrix, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 55, pp. 120-130, 2016.
- [22] A. Fereidoon, R. Rafiee, R. Maleki Moghadam, A modal analysis of carbon-nanotube-reinforced polymer by using a multcale finite-element method, *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 49, No. 3, pp. 325-332, 2013.
- [23] P. Joshi, S. H. Upadhyay, Evaluation of elastic properties of multi walled carbon nanotube reinforced composite, *Computational Materials Science*, Vol. 81, pp. 332-338, 2014.
- [24] S. C. Her, C. Y. Lai, Dynamic behavior of nanocomposites reinforced with multi-walled carbon nanotubes (MWCNTs), *Materials*, Vol. 6, No. 6, pp. 2274-2284, 2013.
- [25] C. DeValve, R. Pitchumani, Experimental investigation of the damping enhancement in fiber-reinforced composites with carbon nanotubes, *Carbon*, Vol. 63, pp. 71-83, 2013.
- [26] R. Moradi-Dastjerd, M. Foroutan, A. Pourasghar, Dynamic analysis of functionally graded nanocomposite cylinders reinforced by carbon nanotube by a mesh-free method, *Materials & Design*, Vol. 44, pp. 256-266, 2013.
- [27] L. L. Ke, J. Yang, S. Kitipornchai, Nonlinear free vibration of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams, *Composite Structures*, Vol. 92, No. 3, pp. 676-683, 2010.
- [28] P. Zhu, Z. X. Lei, K. M. Liew, Static and free vibration analyses of carbon nanotube-reinforced composite plates using finite element method with first order shear deformation plate theory, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 4, pp. 1450-1460, 2013.
- [29] Z. X. Lei, K. M. Liew, J. L. Yu, Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using the element-free kp-Ritz method in thermal environment, *Composite Structures*, Vol. 106, pp. 128-138, 2013.
- [30] S. S. Rao, *Mechanical Vibration*, Florida: Pearson Prentice Hall, 2005.

-
1. representative volume element (RVE)
 2. interphase
 3. functionally graded carbon nanotube-reinforced composites
 4. uniformly distributed carbon nanotube-reinforced composite
 5. Von Kármán nonlinear strain-displacement relationships
 6. mid plane
 7. linear elastic constitutive law
 8. clamped-clamped (C-C)
 9. pinned-pinned (P-P)
 10. clamped-pinned (C-P)