اثر تغییرات معادلهٔ عمومی دینامیک سیال بر لایهٔ اختلاط بدون برش دوبعدی آشفته

حسین اتحادی[۱]، مانی فتحعلی[۲]، مسعود میرزایی[۳]

۱ دانشجوی دکتری، دانشکدهٔ مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ettehadi@email.kntu.ac.ir

۲ استادیار، دانشکدهٔ مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

۳ استاد، دانشکدهٔ مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۲/۳۱

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۷/۰۴

چکیده

در این پژوهش با محاسبهٔ پارامترهای آماری نظیر ممان‌های سوم و چهارم، اثر تغییرات آلفا بر دینامیک بین دو جریان مغشوش مطالعه شده است. پارامتر آلفا متغیری است که رابطهٔ بین تابع جریان و ورتیسیته در فضای فوریه را مشخص می‌کند. این مبحث از جریان آشفته اصطلاحاً آلفا توربولانس نامیده می‌شود. برای تحلیل رفتار معادلات، از شبیه‌سازی عددی معادلات عمومی دینامیک سیال تراکم ناپذیر، با روش عددی شبه طیفی استفاده شده است. نتایج حاکی از آن است که رفتار میدان چرخش در دو حالت α بزرگتر از ۲ و کوچکتر از ۲ تفاوت زیادی با هم دارند. از اینرو α برابر با ۲ به‌عنوان آلفای بحرانی در نظر گرفته شده است. در α کوچکتر از ۲، اندرکنش‌های محلی بر سیستم حاکم است و با کاهش آلفا میزان ناهمسانی و اختلاط افزایش می‌یابد. در حالت α بزرگتر از ۲، اندرکنش‌های حاکم بر میدان جریان غیرمحلی می‌باشند و با افزایش آلفا میزان ناهمسانی کاهش می‌یابد. همچنین نشان داده شده است که در حالت محلی (آلفاهای کوچک)، فیزیک جریان شامل گردابه‌های ریزمقیاس می‌باشد، در حالی‌که در آلفاهای بزرگ دینامیک غیرمحلی شده و گردابه‌ها رشته‌ای‌تر می‌شوند.

واژگان کلیدی

لایهٔ اختلاط، آلفاتوربولانس، روش شبه‌طیفی، معادلهٔ عمومی دینامیک سیال، ناهمسانی

۱. مقدمه

آلفا توربولانس مبحثی از آشفتگی است که در آن به بررسی رفتار معادلهٔ عمومی دینامیک سیال دوبعدی، در محدودهٔ اینرسی اسپکتروم پرداخته می‌شود [۱]. معادلات عمومی دینامیک سیال مجموعه معادلاتی هستند که همگی دارای ترم‌ها و پارامترهای مشترک می‌باشند و تنها وجه تمایز آنها، در مقدار ثابت آلفاست. این مبحث برای نخستین‌بار توسط پیر هامبرت به‌عنوان ابزاری برای مطالعهٔ غیرمحلی بودن توربولانس دوبعدی مطرح شد [۲]. معادلهٔ عمومی ورتیسیته به ازای آلفاهای متفاوت، پدیده‌های

فیزیکی متفاوتی را بیان می‌کند. آلفا توربولانس‌های بسیاری هستند که در واقع هر کدام از آنها مدل‌های فیزیکی خاصی در طبیعت می‌باشند. به‌طور کلی از بررسی سیستم‌های دوبعدی عمومی دو هدف مورد نظر است. هدف اول فهمیدن و درک فیزیک سیستم دوبعدی سیال و هدف دوم روشن‌شدن غرابت یا اتحاد تئوری‌های موجود با معادلات اویلر یا ناویر استوکس سابق می‌باشد. آلفا توربولانس دوبعدی به‌خاطر کاربردهای فروان در مسائل فیزیک و همچنین محاسبات آسان‌تر و سریع‌تر نسبت به مسائل سه‌بعدی، مسئلهٔ بسیار پرکاربردی است. نظریه‌های طیف خود متشابه محلی در محدودهٔ اینرسی اسپکتروم، که بر پایهٔ تئوری کولموگروف نهاده شده‌اند، بهانه‌ای برای شروع چنین مطالعاتی شدند. در پژوهش‌های قبلی آثار کلی تغییرات آلفا بر غیرمحلی شدن میدان بررسی شده است. اما در این پژوهش برای نخستین‌بار اثر تغییرات آلفا بر میدان اختلاط بدون برش مورد واکاوی قرار گرفته است. معادلهٔ عمومی دینامیک سیال به‌صورت تئوری و به‌وسیلهٔ حل‌های عددی، شبیه‌سازی شده است. دینامیک مسئله توسط معادلهٔ غیرخطی جابه‌جایی برای اسکالر θ شرح داده می‌شود. این سیستم‌ها به‌طور فعالانه‌ای در دههٔ گذشته مورد توجه قرار گرفته‌اند.

۱-۱. آلفا توربولانس

رابطهٔ دینامیک حاکم بر کمیت اسکالر θ که در میدان سرعت با تابع جریان Ψ قرار دارد به‌صورت زیر است:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+J(\Psi,\theta)=\vartheta\nabla^2\theta+f \qquad (۱)$$

در این رابطه، که به معادلهٔ عمومی دینامیک سیال مشهور است، θ ورتیسیتهٔ عمومی، Ψ تابع جریان، f نیروهای حجمی و ϑ لزجت سینماتیک می‌باشد. همچنین در رابطهٔ فوق J ژاکوبین دوبعدی است که به‌صورت ذیل تعریف می‌گردد:

$$J(A,B)=\partial_x A\partial_y B-\partial_x B\partial_y A \qquad (۲)$$

در واقع ژاکوبین دوبعدی همان ترم جابه‌جایی می‌باشد که در آن میدان سرعت به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$V=(-\Psi_y,\Psi_x) \qquad (۳)$$

پدیده‌های زیادی در طبیعت وجود دارند که در آن جابه‌جایی دو اسکالر غیرعامل θ و Ψ مستقل از تابع جریان می‌باشند. اما در هیدرودینامیک دوبعدی، θ و Ψ توسط رابطهٔ ۴ به‌هم وابسته شده‌اند. این رابطه سبب غیرخطی بودن معادلهٔ ۱ می‌شود. رابطهٔ بین θ و Ψ در هیدرودینامیک دوبعدی در فضای فیزیکی و در فضای فوریه به‌ترتیب عبارت است از (Δ لاپلاسین کسری است):

$$\theta=(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\Psi \qquad (۴)$$

$$\widehat{\Psi}(k)=|k|^{-\alpha}\hat{\theta}(k) \qquad (۵)$$

رابطهٔ ۵ رابطهٔ بنیادی آلفا توربولانس می‌باشد که از انتقال رابطهٔ ۴ به فضای فوریه به‌دست آمده است. تغییرات ترم آلفا، سبب ایجاد تغییرات اساسی در دینامیک جریان می‌شود. معادلهٔ عمومی ۱ به ازای $\alpha=1$ به معادلهٔ SQG یا جریان‌های زمینگرد سطحی[۱] تبدیل می‌شود که در واقع مدل ساده‌شدهٔ امواج لبه، در لایهٔ بین استراتوسفر و تروپسفر (تروپوپاز) می‌باشد. همچنین می‌توان از معادلهٔ SQG برای تشریح دینامیک جابه‌جایی هوا در نزدیکی سطح زمین استفاده نمود [۹]. وقتی آلفا مقدار ۲ را اختیار کند، معادلهٔ ۱ به معادلهٔ مشهور ناویر استوکس[۲] تبدیل می‌گردد که البته نسبت به سایر آلفاها شناخته‌شده‌تر می‌باشد. ناویر استوکس به‌طور وسیع در دینامیک سیالات مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این حالت معادلهٔ ۴ بیانگر رابطهٔ مشهور پواسون $\omega=-\nabla^2\Psi$ می‌باشد. درواقع آلفا مرتبهٔ مشتق معادلهٔ پواسون را بیان می‌کند. همچنین معادلهٔ عمومی ۱ به ازای $\alpha=3$ به معادلهٔ RSF یا جریان‌های کم‌عمق چرخشی[۳] تبدیل می‌شود [۳].

۱-۲. محلی و غیرمحلی بودن دینامیک سیال

چنانچه در یک سیستم، کوچکترین تحریکی ایجاد و این تحریک سریعاً به تمام نقاط سیستم منتقل شود، آن سیستم را غیرمحلی[۴] می‌نامند و چنانچه هر گونه تحریکی سریعاً در همان نقطه خنثی شود و کوچکترین اثری بر سایر نقاط سیستم نگذارد، آن سیستم را محلی[۵] می‌نامند. برای درک بیشتر می‌توان مقداری قیر مذاب و آب را به‌صورت جداگانه در نظر گرفت. چنانچه جسم خارجی وارد دو سیستم شود، مشاهده می‌شود که در مورد قیر مذاب، حرکات سیستم سریعاً خنثی می‌شوند و به سایر نقاط انتقال نمی‌یابند، در حالی‌که در سیستم آب، حرکات سریعاً به سایر نقاط منتشر می‌گردند. علت این پدیده این است که دینامیک حاکم بر آب غیرمحلی و دینامیک حاکم بر قیر مذاب محلی می‌باشد.

۱-۳. تأثیر تغییرات آلفا بر محلی یا غیرمحلی بودن

در سیستم‌های ورتیسیته عمومی دو ثابت بسیار مهم وجود دارند که به تحلیل این سیستم‌ها کمک شایانی می‌کنند. اگر متغیر

اتفاقی X دارای میانگین $\bar{X}$ باشد، رابطهٔ انرژی عمومی و انستروفی عمومی به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$E_\alpha = -\frac{1}{2}\,\overline{\Psi\theta} \qquad Q_\alpha = \frac{1}{2}\,\overline{\theta^2} \tag{۶}$$

با توجه به منبع [۸] طیف انستروفی وابسته به عدد موج k می‌باشد، رابطهٔ اسپکتروم انستروفی با آلفا در محدودهٔ اینرسی عدد موج به‌صورت زیر بیان‌شده است:

$$Q \propto \begin{cases} k^{-(-7-2\alpha)/3}\,, & (0<\alpha<2), \\ k^{-1}lnk, & (\alpha=2), \\ k^{-1}\,, & (\alpha>2). \end{cases} \tag{۷}$$

همان‌گونه که مشاهده می‌شود، $\alpha = 2$ نقطهٔ گذار[۶] می‌باشد. از این نقطه به بعد رفتار کمیت θ تغییر می‌کند. در واقع شیب طیف در فضای عدد موج مشخص می‌کند که انتقال انستروفی به‌صورت محلی یا به‌صورت غیرمحلی اتفاق می‌افتد. با توجه به رابطهٔ ۷ رفتار اسپکتروم انستروفی در $\alpha > 2$ مخصوص اسکالرهای غیرعامل می‌باشد. توجه شود که اسکالر غیرعامل، نفوذ یک اسکالر (مثلاً یک آلودگی مثل رنگ) در جریان سیال است؛ به‌طوری‌که بر دینامیک سیال هیچ اثری نداشته باشد. در واقع با توجه به مقدار آلفا، عامل یا غیرعامل بودن کمیت θ در مقیاس‌های کوچک تعیین می‌شود. بنابراین هرچه مقدار آلفا از عدد ۲ بیشتر شود، دینامیک سیال غیر محلی‌تر می‌گردد و بالعکس هرچه از مقدار ۲ به سمت صفر برود، دینامیک سیال محلی‌تر می‌گردد.

۱-۴. تأثیر تغییرات آلفا بر فیزیک جریان

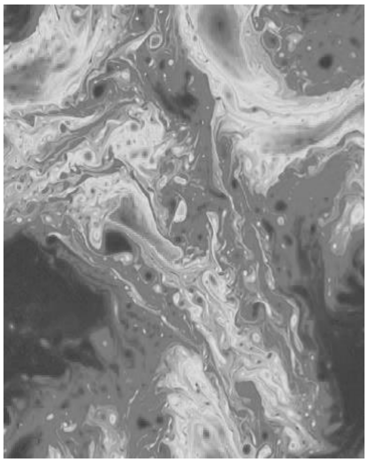
برای تحلیل مشخصه‌های جریان در آلفا توربولانس، یک میدان اولیهٔ یکسان به ازای آلفاهای متفاوت حل شده است. در شکل‌های ۱ تا ۳، میدان جریان توسعه‌یافتهٔ θ در آلفاهای متفاوت نشان داده شده است. در $\alpha = 1$ همان‌طور که گفته شد رفتار میدان کاملاً محلی می‌باشد. همان‌طور که در شکل ۱ دیده می‌شود، میدان توسط گردابه‌های ریزمقیاس احاطه شده است. به‌طور کلی در آلفاهای کوچک ساختارهای ریزمقیاس فراوانی وجود دارند، با توجه به رابطهٔ ۷، برای این ساختارها $Q(k) \propto k^{-5/3}$ می‌باشد. برخلاف آلفاهای کوچک، در آلفاهای بزرگ (در اینجا $\alpha = 3$)، میدان توسط ساختارهای رشته‌ای نازک و روان[۷] بزرگ‌مقیاس احاطه شده است. این رفتار به‌علت طبیعت غیرمحلی بودن دینامیک جابجایی سیال در آلفاهای بزرگ می‌باشد. همان‌طور که در رابطهٔ ۷ اشاره شد، در $\alpha = 3$، رابطهٔ $Q(k) \propto k^{-1}$ برقرار است. در $\alpha = 2$ رفتار میدان تا حد زیادی شبیه حالت $\alpha = 3$ می‌باشد، با این تفاوت که تعداد اندکی گردابه‌های رشته‌ای در آن مشاهده می‌شود. علت وجود این گردابه‌ها، تصحیح لگاریتمی رابطهٔ ۷ می‌باشد.

۲. بیان مسئله

یکی از ساده‌ترین جریان‌های ناهمگن، لایهٔ اختلاط بدون برش است که از دو ناحیهٔ همگن باانرژی و یا طول گردابه‌های متفاوت تشکیل شده که توسط لایهٔ میانی گذرا با هم در حال اندرکنش می‌باشند. چون هیچ‌گونه سرعت نسبی بین دو ناحیه وجود ندارد، به این نوع اندرکنش، لایهٔ اختلاط بدون برش گفته می‌شود [۹]. در این پژوهش به مطالعهٔ اثر تغییرات اندازهٔ آلفا جریان روی شدت آشفتگی در لایهٔ اختلاط بدون برش پرداخته شده است. هندسهٔ جریان از ترکیب دو ناحیه با نسبت انرژی، E_2/E_1، با طول‌های انتگرالی متفاوت، تشکیل شده است. ناحیهٔ همگن وسط به‌عنوان مرجع ثابت نگاه داشته و با اندیس ۲ نمایش داده می‌شود و ناحیهٔ کناری با اندیس ۱ نمایش داده می‌شود. منظور از لایهٔ اختلاط، محدودهٔ گذرا از ناحیهٔ ۱ به ۲ است. منظور از نسبت انرژی جنبشی و نسبت طول انتگرالی، نسبت پارامترهای ناحیهٔ ۲ بخش بر ناحیهٔ ۱ است. باگذشت زمان اثر ناهمگنی در طول مشخصه بر توسعهٔ میدان در لایهٔ اختلاط مشاهده می‌شود [۸]. تمامی پارامترهای مذکور ثابت در نظر گرفته شده‌اند، در هر شبیه‌سازی فقط عدد آلفا تغییر می‌کند. در شکل ۴ نمای شماتیک مسئله نمایش داده شده است.

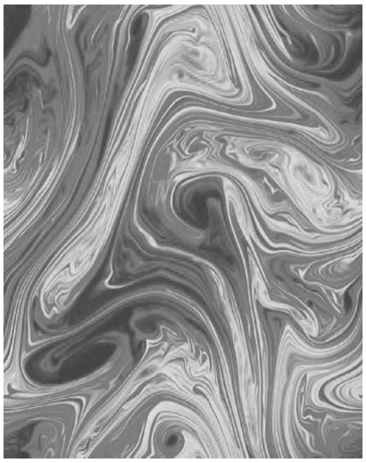
۳. روش شبیه‌سازی و حل مسئله

برای حل معادلات عمومی دینامیک سیال احتیاج به‌شرط اولیه می‌باشد. شرط اولیه این مسئله شامل اغتشاشات اولیه میدان چرخش می‌باشد که برای به‌دست آوردن آن به طی سه مرحله نیاز است. ابتدا با انتخاب طیف انرژی اولیه، میدان چرخش را از آن استخراج کرده و سپس با توسعه این میدان همگن به ترکیب دو نمونه آن با طول انتگرالی متفاوت پرداخته و میدان نهایی حاصل می‌شود. برای آماده‌سازی شرط اولیه، طیف انرژی جنبشی اولیه‌ای در نظر گرفته شده است که در ادامه میدان اغتشاشات چرخش از میدان سرعت به‌دست‌آمده، استخراج می‌شود. این روش در مراجع [۶]، [۱۱] و [۱۳] مورد استفاده گرفته است.



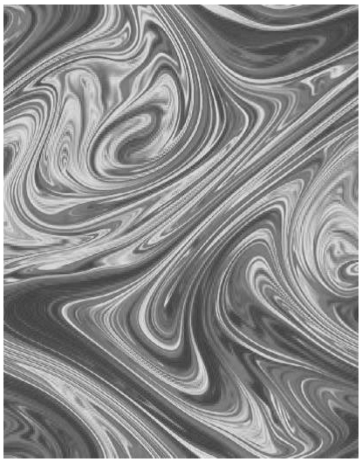
شکل ۱. تصویر میدان ورتیسیتهٔ عمومی

θ در $\alpha = 1$ [۴]



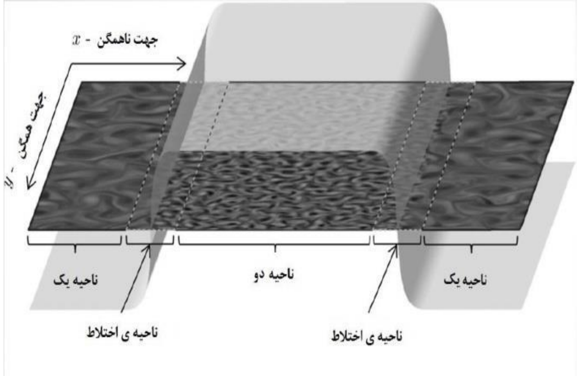
شکل ۲. تصویر میدان ورتیسیتهٔ عمومی

θ در $\alpha = 2$ [۴]



شکل ۳ .تصویر میدان ورتیسیتهٔ عمومی

θ در $\alpha = 3$ [۴]



شکل ۴ .شماتیک میدان اولیهٔ جریان شامل دو لایهٔ اختلاط بدون برش

$$E(k,0) = \frac{Q}{k_p}\left(\frac{k}{k_p}\right)^7 e^{-3.5\left(\frac{k}{kp}\right)^2} \quad (۸)$$

در این رابطه k_p عدد موج مربوط به بیشینهٔ طیف انرژی جنبشی می‌باشد. این پارامتر تعیین‌کنندهٔ طول انتگرالی مورد نظر است به‌طوری‌که هرچه k_p بزرگتر باشد، طول انتگرالی محاسبه‌شده از میدان ناشی از طیف متناظر کوچکتر خواهد بود. می‌توان نشان دادکه [۳]:

$$l = \sqrt{\frac{7}{8}}k_p^{-1} \quad (۹)$$

چون مدت‌زمانی طول خواهد کشید که میدان از شرایط اولیه و حالت گذرا به آشفتگی کاملاً توسعه‌یافته برسد و فازهای میدان به‌صورت فیزیکی شوند (طیف انرژی به طیف انرژی واقعی نزدیک و شکل گردابه‌ها، طبیعی شوند)، نیاز است میدان حاصله برای رسیدن به شرایط مطلوب و رسیدن به طول انتگرالی مورد نظر برای ناحیهٔ ۱ و ۲، در یک پیش‌محاسبهٔ عددی توسعه داده شود. هنگام پیش‌محاسبه شیب برای اعداد موج کوچک به خط k^3 نزدیک می‌شود که با تئوری بچلر همخوانی دارد. پس از انجام پیش‌محاسبه، شیب طیف انرژی در ناحیه اینرسی، به شیب میدان توسعه‌یافته فیزیکی، یعنی شیب بین k^{-4} تا k^{-3} نزدیکتر می‌شود [۵]. ابتدا میدان حاصل از شرایط اولیه را با طول انتگرالی کوچکتر از مقدار مورد نظر به‌صورت جداگانه بین ۵ تا ۱۰ ثابت زمان حل کرده تا میدان به طول انتگرالی مورد نظر برسد. سپس آن را تا سطح انرژی موردنیاز نرمالایز کرده و میدان چرخش θ به‌دست می‌آید. با دو بار انجام این مرحله برای دو میدان انتگرالی متفاوت، دو میدان چرخش، θ_2 , θ_1 برای تولید میدان نهایی آماده می‌شود. در این شبیه‌سازی میدان با وضوح ۵۱۲×۵۱۲ حل می‌شود. طول کل میدان را با L و طول انتگرالی ناحیه یک و دو با l_1 و l_2 نشان داده می‌شود. نسبت طول انتگرالی میدان مرجع به طول میدان، l_2/L، برابر ۲۰۰ و رینولدز آن، Re_2، برابر با ۹۰ می‌باشد. نسبت انرژی ناحیه دو به ناحیه یک، ۷/۸۰، نسبت طولی ناحیه دو به ناحیه یک، ۱/۱۳ و آلفا متغیر مسئله است. ثابت زمانی

گردابه‌های ناحیه ۲ در لحظهٔ اولیه به‌عنوان مقیاس زمانی انتخاب شده است.

٤. روش شبه‌طیفی و اعتبارسنجی آن

برای اندازه‌گیری دقت زمانی و میزان پایداری روش‌های عددی در حل معادلات ورتیسیتهٔ عمومی می‌توان از حل تحلیلی گردابه‌های تیلور - گرین استفاده کرد [۸]. شرط اولیهٔ چرخش و جواب تحلیلی معادلهٔ چرخش برای این گردابه‌ها به‌صورت رابطهٔ ۱۰ است.

$$\theta_a(t) = \theta_0 \exp(-2a^2 vt), \quad \theta_0 = 2\sin(ax)\sin(ay) \qquad (۱۰)$$

مقدار خطای بی‌بعد شده به‌صورت رابطهٔ ۱۱ تعریف و اندازه‌گیری می‌شود.

$$SMSE = \frac{\langle(|\theta_a| - |\theta_n|)\rangle}{\langle\theta_a^2\rangle} \qquad (۱۱)$$

شرایط حل مسئله به‌صورت زیر فرض شده است:

$$L_x = 2\pi, L_y = 2\pi \quad a = 4, v = 5\times10^{-4} \quad dt = 0.16, N_x = 128, N_y = 128 \qquad (۱۲)$$

که L_y, L_x طول و عرض میدان و N_y, N_x وضوح محاسبات و dt بازهٔ زمانی است. میدان چرخش به‌صورت شکل ۶ خواهد شد. در شکل ۷ نمودار میانگین مربعات خطا مقیاس شده، $SMSE$ مشاهده می‌شود. چنانکه ملاحظه می‌شود، شبیه‌سازی با پایداری بالا و دقت بالا در مقیاس زمانی همراه است.

۵. نتایج

۵-۱. بررسی شکل میدان

از جمله پارامترهایی که روی لایهٔ اختلاط تأثیر می‌گذارد، توان استهلاک انرژی و انستروفی است. برای آلفاهای بزرگ‌تر، سهم ورتیسیتی‌ها با k های بزرگ‌تر در طیف انرژی کمتر می‌شود. به‌عبارت دیگر سهم انرژی جنبشی گردابه‌های کوچکتر در طیف انرژی جنبشی کاهش می‌یابد و در نتیجه سهم انرژی جنبشی گردابه‌های بزرگ‌تر بیشتر می‌شود. در نتیجه میدان جریان، استهلاک انرژی جنبشی کمتری خواهد داشت. زیرا استهلاک میدان توسط گردابه‌های کوچک صورت می‌گیرد. مشابه همین روند برای توان استهلاک انستروفی مشاهده می‌شود. پس از حل میدان اولیه به روش عددی شبه‌طیفی، به ازای هر آلفا، میدان توسعه‌یافتهٔ خاصی حاصل می‌شود. در شکل ۸، نمای میدان توسعه‌یافته حاصل از حل میدان اولیه یکسان، برای آلفاهای متفاوت نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در $\alpha = 1/4, \alpha = 1$ لایهٔ اختلاط به مرزها رسیده است. در سایر آلفاها شدت اختلاط در بازهٔ زمانی یکسان به‌مراتب کمتر از بقیه است.

۵-۲. اسکیونس[۸] و کورتوسیس[۹] سرعت

معادلات ورتیسیتهٔ عمومی دارای رفتاری غیرخطی است و میدان جریان آشفته دارای رفتاری اتفاقی می‌باشد. به‌عنوان مثال سرعت یک نقطه از میدان با زمان به‌صورت یک سیگنال اتفاقی ظاهر می‌شود. اما میدان جریان به‌صورت آماری می‌تواند رفتار قابل پیش‌بینی داشته باشد. اسکیونس و کورتوسیس، دو پارامتر آماری پرکاربرد در جریان آشفته است که برای متغیر اتفاقی X که دارای میانگین $\bar{X}$ صفر باشد به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$S = \frac{\overline{X^3}}{(\overline{X^2})^{3/2}} \qquad (۱۳)$$

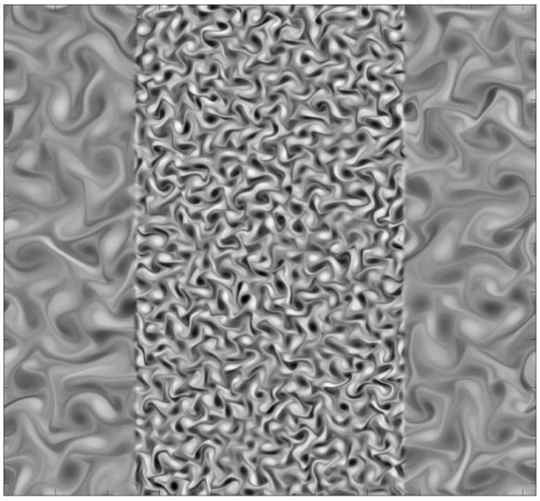
$$K = \frac{\overline{X^4}}{(\overline{X^2})^2} \qquad (۱۴)$$

برای توزیع نرمال، اندازهٔ اسکیونس صفر و کورتوسیس ۳ است. داشتن مقدار غیر صفر برای اسکیونس به معنی فاصله گرفتن از توزیع نرمال است. همچنین اگر مقدار کورتوسیس بیشتر از ۳ باشد؛ یعنی سیگنال متناوب شده است [۱۱،۱۵]. در جریان آشفته اگر سیگنال سرعت یک نقطه از میدان را با زمان رسم نماییم و سپس چگالی توزیع احتمال آن را به‌دست آوریم، این چگالی توزیع احتمال بسیار شبیه به توزیع نرمال می‌شود. بنابراین ممان سوم بی‌بعد سرعت، موسم به اسکیونس، برای میدان نرمال سرعت صفر خواهد شد. اسکیونس و کورتوسیس مؤلفهٔ افقی سرعت به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [۱۵].

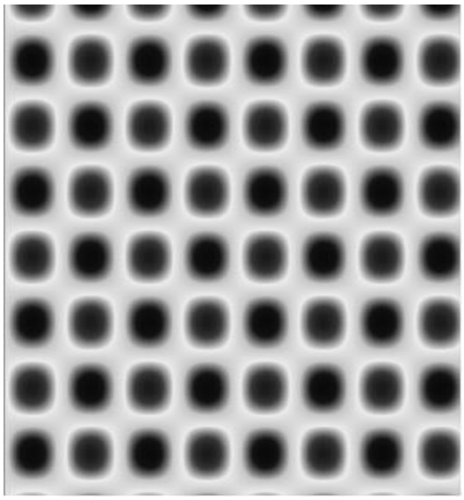
$$S = \frac{\overline{u^3}}{(\overline{u^2})^{3/2}} \quad K = \frac{\overline{u^4}}{(\overline{u^2})^2} \qquad (۱۵)$$

ناهمسانی در ممان‌های مرتبهٔ بالا بهتر مشخص می‌شود. بنابراین برای پایش ناهمسانی میدان از اسکیونس و کورتوسیس مؤلفهٔ اغتشاش سرعت، u که در جهت ناهمگن میدان می‌باشد، طبق معادلهٔ ۱۵ استفاده می‌شود. این مؤلفهٔ سرعت وظیفهٔ انتقال انرژی جنبشی در عبور از لایهٔ اختلاط را دارد که در طول فرایند اختلاط یک ناهمسانی در لایه اختلاط به‌وجود می‌آورد، مقدار ممان های نرمال درواقع میزان ناهمسانی را نشان می‌دهند. شکل

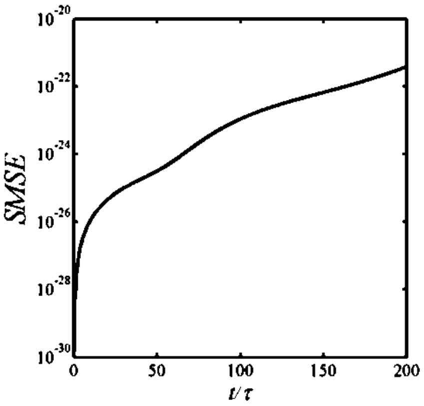
۹ نمودار تغییرات اسکیونس سرعت در جهت ناهمگن با تغییرات η را نشان می‌دهد. مقدار اسکیونس در خارج از لایهٔ اختلاط نزدیک به صفر است که این مقدار مربوط به یک میدان مغشوش همسان و همگن می‌باشد. مقدار اسکیونس در لایهٔ اختلاط مقدار متفاوتی پیدا می‌کند. برای وضوح بهتر مختصات جهت ناهمگن، x با ضخامت لایه اختلاط، Δ، بی‌بعد شده است.



شکل ۵. شرایط اولیهٔ میدان جریان در این پژوهش



شکل ۶. اعتبارسنجی مطالعه، با حل عددی گردابه‌های تیلور - گرین

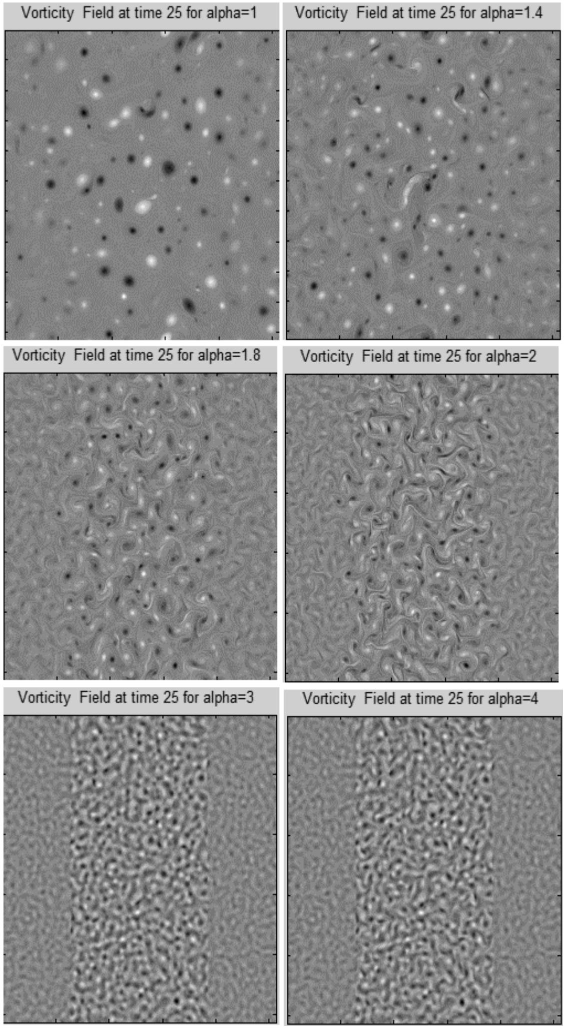


شکل ۷ .منحنی خطای بی‌بعد شده برحسب زمان

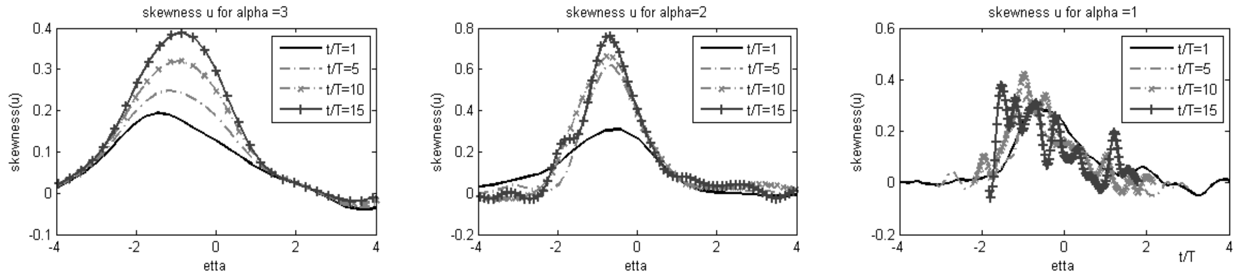
$$\eta = \frac{x}{\Delta(t)} \tag{۱۶}$$

همان‌طور که در شکل ۹ مشخص است، در آلفاهای کوچک، پس از گذر زمان مقدار اسکیونس سرعت، در کل میدان برابر با مقداری غیرصفر می‌شود. علت این پدیده، پیشروی لایهٔ اختلاط در کل میدان می‌باشد. به‌عبارت دیگر در آلفاهای کوچک، کل میدان پس از گذشت ثوابت زمانی اندک از حالت همسان اولیه خارج می‌شود. در شکل ۱۰ نمودار تغییرات بیشینهٔ اسکیونس نسبت به آلفا رسم شده است. ماکزیمم مقدار بیشینهٔ اسکیونس سرعت به ازای آلفاهای متفاوت، در $\alpha = 2$ اتفاق می‌افتد. لذا از این آلفا به‌عنوان آلفای گذار یا آلفای بحرانی یاد می‌شود. در شکل ۱۱ کورتوسیس سرعت در جهت ناهمگن میدان نشان داده شده است. مقدار کورتوسیس برای جریان مغشوش همگن برابر با ۳ است. کورتوسیس همانند اسکیونس، دارای بیشینه در ناحیه داخل لایه اختلاط است. برای کلیهٔ آلفاها، مقدار کورتوسیس در لایهٔ اختلاط به حداکثر مقدار خود می‌رسد. با توجه به نمودارها مشاهده می‌شود که رفتار کورتوسیس بسیار مشابه رفتار اسکیونس در طول میدان می‌باشد. در آلفاهای بزرگتر از ۲ میزان ناهمسانی میدان، فقط در لایهٔ اختلاط، افزایش می‌یابد و در نقاط خارج از لایه اختلاط کماکان مقدار اسکیونس و کورتوسیس سرعت اغتشاشی کمینه می‌باشند. در حالی‌که در آلفاهای کوچکتر از ۲، کورتوسیس و اسکیونس در کل میدان از حالت کمینه اولیه فاصله می‌گردد و دچار نوسانات شدیدتری می‌گردند. لذا هرچه آلفا بزرگتر می‌شود،

رفتار میدان اصطلاحاً منظم‌تر[10] می‌شود. این خاصیت رفتاری میدان به‌طور حتم معلول رفتار محلی و غیرمحلی میدان می‌باشد که در قسمت قبلی به‌طور کامل بحث شد. همچنین در شکل ۱۲ نمودار بیشینه کورتوسیس برحسب آلفا رسم شده است، همانند اسکیونس سرعت، به‌طور مشابه، این نمودار در $\alpha = 2$ دارای بیشینه می‌باشد که همان آلفای بحرانی می‌باشد.



شکل ۸. تصویر میدان‌های ورتیسیتهٔ عمومی θ در چندین آلفای متفاوت، در ثوابت زمانی یکسان



شکل ۹. توزیع اسکیونس سرعت در لایهٔ اختلاط. نواحی یک و دو به ترتیب با $\eta < 0$ و $\eta > 0$ نشان داده‌شده‌اند

۵-۳. مقایسه تغییرات زمانی بازده اختلاط

برای مطالعهٔ ویژگی‌های هندسی مقیاس‌های کوچک در جریان آشفتهٔ دوبعدی، زاویهٔ بین گرادیان چرخش و بردارهای ویژه نرخ تانسور کرنش که در ارتباط با آبشار انستروفی است، بررسی می‌شود [۷]. اندرکنش غیرخطی گردابه‌های با ساختار بارز در جریان آشفته دوبعدی سبب فرایند رشته‌ای شدن گردابه‌ها می‌شود

و این فرایند تولید و کنترل میدان کرنش را برعهده دارد. فرسایش و رشته‌ای شدن گردابه‌ها توسط گردابه‌های بارز که یک فرایند غیرلزج است، سبب تولید گرادیان چرخش زیاد در میدان جریان آشفته دوبعدی می‌شود، از سوی دیگر ویسکوزیتهٔ نقش استهلاک گردابه‌های رشته‌ای را بر عهده داشته و باعث کاهش گرادیان چرخش می‌شود. بر طبق مرجع [۶] کشش و خم‌کردن یک گردابه ناشی از گردابه‌های دیگر می‌باشد طبق آبشار انستروفی مرتب شده‌اند و از معادلهٔ زیر پیروی می‌کند:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u}.\nabla\right) \nabla\theta = \nabla\theta.\nabla u + \nu\nabla^2(\nabla\theta) \tag{۱۷}$$

عبارت اول سمت راست معادلهٔ ۱۷ سبب کشش گرادیان چرخش می‌شود. میدان گرادیان چرخش بر اساس ویژگی‌ها محلی این عبارت نمو می‌کند. انتقال چرخش به سمت مقیاس‌های کوچکتر که به‌عنوان آبشار انرژی مطرح است نتیجه رفتار غیرخطی این عبارت است [۷]. تانسور سرعت را می‌توان به‌صورت حاصل جمع نرخ کرنش و چرخش نوشت:

$$D = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & -s_{11} \end{bmatrix} \tag{۱۸}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix} \tag{۱۹}$$

$$\nabla u = \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}\Omega \tag{۲۰}$$

$$\begin{gathered} \lambda_{\pm} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{s_{11}^2 + s_{12}^2 - \theta^2} \\ s_{11} = 2\partial u/\partial x \\ s_{12} = (\partial u/\partial y) + (\partial v/\partial x) \end{gathered} \tag{۲۱}$$

در مرجع [۷] نشان داده شده است که مقادیر ویژه یا حقیقی هستند و یا موهومی و اگر λ حقیقی باشد، رشد گرادیان چرخش به‌صورت نمایی رخ خواهد داد و نرخ رشد به هم‌جهت بودن $\nabla\theta$ دوران پیدا کرده و کم‌کم مستهلک خواهد شد. این ناحیه را بیضوی می‌نامند. بردارهای ویژهٔ نرخ کرنش؛ یعنی بخش متقارن ۲۰ به‌صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{gathered} d_1 = \left[\frac{s_{12}}{\sqrt{s_{11}^2 + s_{12}^2 - s_{11}}}\right] \\ d_2 = \left[\frac{-s_{12}}{\sqrt{s_{11}^2 + s_{12}^2 + s_{11}}}\right] \end{gathered} \tag{۲۲}$$

این دو بردار بر هم عمود بوده و بیان‌کنندهٔ جهت بیشینهٔ کشش و فشار است. نرخ تولید گرادیان چرخش، k، مقدار نرمال آن، e، به‌صورت زیر به دست می‌آید [۱۳]:

$$\gamma = \frac{d\, ln|\nabla\theta|}{dt} = -m^T Dm, \qquad m = \frac{\nabla\theta}{|\nabla\theta|} \tag{۲۳}$$

$$e = \frac{-m^T Dm}{\sqrt{|D|}} \tag{۲۴}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{s_{11}^2 + s_{12}^2\cos(2\alpha)} \tag{۲۵}$$

$$e = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2\alpha) \tag{۲۶}$$

به‌طوری‌که در آن α زاویه بین $\nabla\theta$ و d_2 است. چون اسکالر غیرعامل دارای معادلهٔ حاکم مشابه میدان چرخش می‌باشد، می‌توان با فرایند مشابه نشان داد که [۶]:

$$\gamma_\theta = \frac{1}{2}\sqrt{s_{11}^2 + s_{12}^2\cos(2\alpha_\theta)} \tag{۲۷}$$

$$e_\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2\alpha\theta) \tag{۲۸}$$

که در آن α_θ زاویهٔ بین گرادیان اسکالر، $\nabla\theta$، بردار ویژهٔ d_2 است. پارامتر e به‌عنوان بازده در میزان تولید گرادیان چرخش می‌باشد که در ارتباط با مقیاس‌های کوچک و تولید گردابه‌های رشته‌ای است. گردابه‌های رشته‌ای نقشی اساسی در اختلاط مقیاس‌های کوچک دارد، بنابراین از این پارامتر می‌توان به‌عنوان نمادی از میزان بازدهی اختلاط در مقیاس‌های کوچک استفاده کرد. در این قسمت به بررسی بازده اختلاط پرداخته شده است. برای نتایج در این بخش از اسکالرهای غیرعامل بهره گرفته شده است و بازده به‌کمک رابطهٔ ۲۸ محاسبه شده است. در شکل ۱۳ نمودار تغییرات بازده برحسب تغییرات زمان برای آلفاهای متفاوت ترسیم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش آلفا مقدار بازده اختلاط افزایش می‌یابد. در $0<\alpha\le 2$ تمامی نمودارها داری بیشینه‌ای در بازهٔ $0\le t/\tau \le 5$ می‌باشند؛ در حالی‌که برای $\alpha>2$ این بیشینه به‌تدریج از بین رفته و نمودارها صعودی اکید می‌باشند. در شکل ۱۴ نمودار بیشینه بازده اختلاط ممکن به ازای هر آلفا رسم شده است، همانند نتایج قبلی، می‌توان مشاهده نمود که در $\alpha=2$ بازده اختلاط به بالاترین مقدار ممکن می‌رسد.

٦. جمع‌بندی

در این پژوهش به بررسی به تأثیر پارامتر آلفا بر دینامیک لایهٔ اختلاط بدون برش دوبعدی پرداخته شده است. برای حل معادلات عمومی دینامیک سیال از شبیه‌سازی عددی مستقیم به کمک روش شبه طیفی استفاده شده است. برای ایجاد لایهٔ اختلاط بدون

برش از گرادیان انرژی جنبشی و گرادیان انتگرال طولی در تمامی شبیه‌سازی‌ها استفاده شده است. در این تحقیق ۱۶ شبیه‌سازی عددی برای بررسی تناوب، ناهمسانی و شدت اختلاط پرداخته شده است. نتایج کلی به شرح ذیل است:

الف) $2 \le \alpha \le 0$: در این حالت هرچه آلفا به سمت صفر نزدیکتر شود:

۱. رفتار میدان نامنظم‌تر می‌شود
۲. لایهٔ اختلاط سریع‌تر رشد می‌کند
۳. میزان ناهمسانی و تناوب به‌شدت افزایش می‌یابد
۴. بازدهی لایهٔ اختلاط کاهش می‌یابد

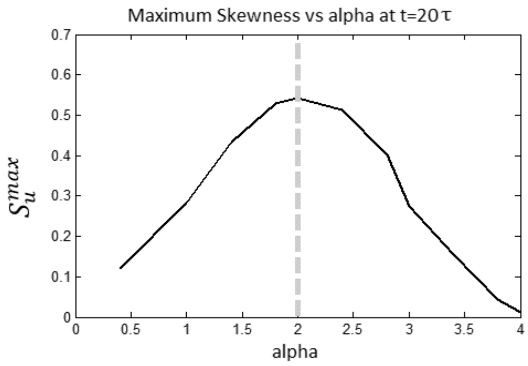
ب) $\alpha \ge 2$: در این حالت هرچه آلفا بزرگتر شود:

۱. رفتار میدان منظم‌تر می‌شود
۲. لایهٔ اختلاط آهسته‌تر رشد می‌کند
۳. میزان ناهمسانی و تناوب کاهش می‌یابد
۴. بازدهی لایهٔ اختلاط کاهش می‌یابد

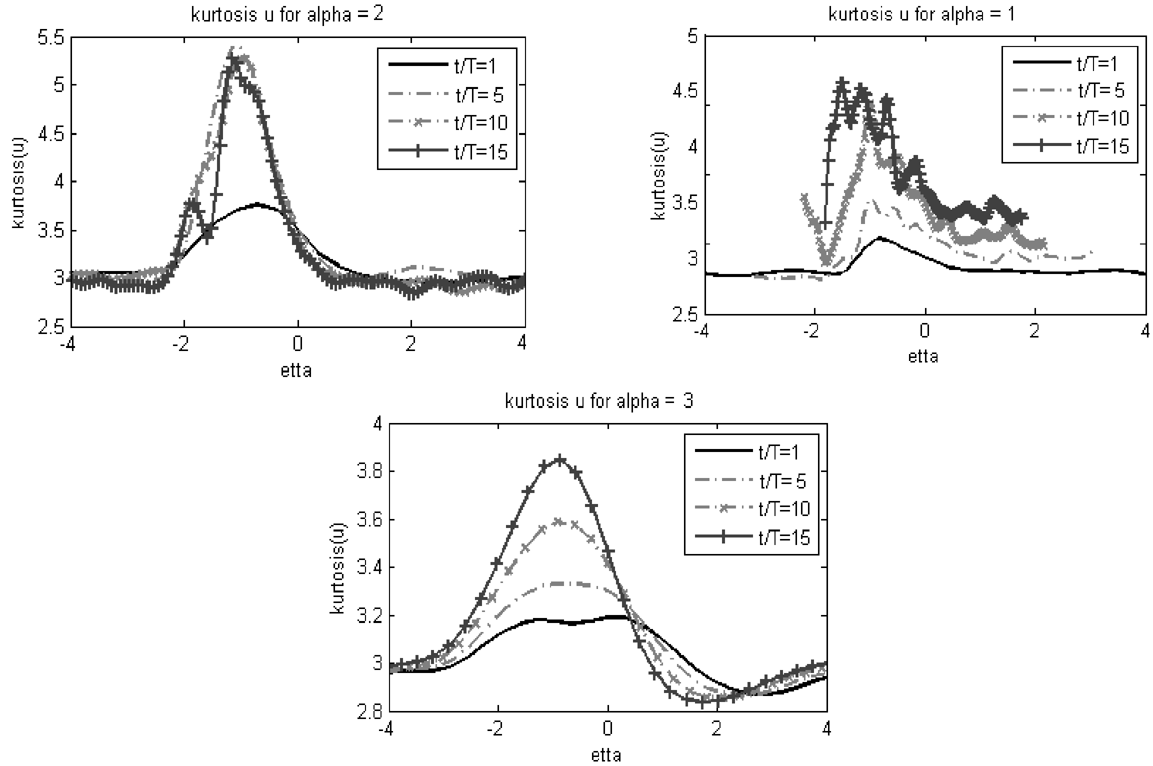
ج) $\alpha = 2$: این حالت که به‌عنوان نقطهٔ انتقال یا بحرانی مطرح است، دارای مشخصات زیر است:

۱. بیشترین مقدار بازدهی لایهٔ اختلاط
۲. بیشترین مقدار بیشینهٔ اسکیونس در لایهٔ اختلاط

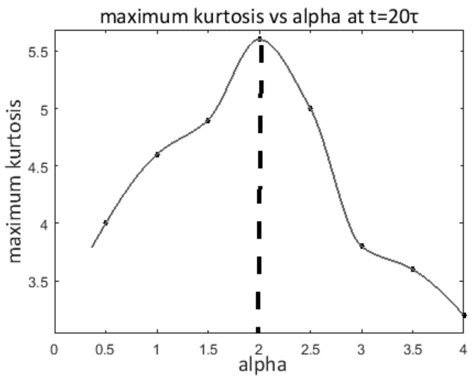
نتایج فوق با نتایج پیرهامبرت که نخستین‌بار آلفا توربولانس را مطرح نمود و $\alpha = 2$ را به‌عنوان آلفای بحرانی با رفتارهای منحصربه‌فرد معرفی کرد، تطابق دارد [۱۳].



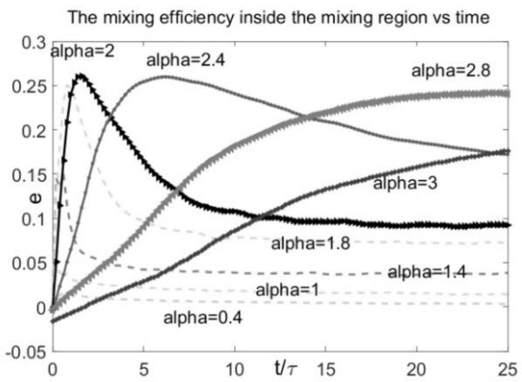
شکل ۱۰. نمودار بیشینهٔ اسکیونس برحسب آلفا در ثوابت زمانی یکسان



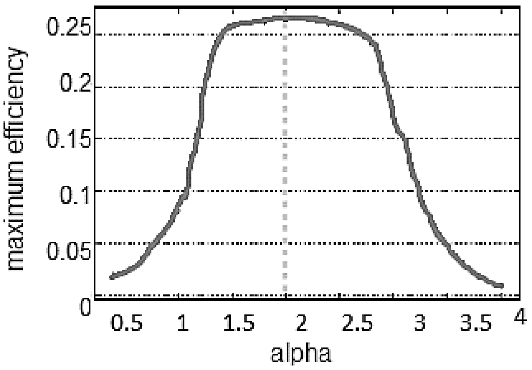
شکل ۱۱. توزیع کورتوسیس سرعت در لایهٔ اختلاط. نواحی یک و دو به ترتیب با $\eta < 0$ و $\eta > 0$ نشان داده شده‌اند



شکل ۱۲. بیشینهٔ کورتوسیس (کشیدگی) برحسب آلفا در ثوابت زمانی یکسان



شکل ۱۳. بازده اختلاط در ناحیهٔ اختلاط برحسب زمان



شکل ۱۴. بیشینهٔ بازده اختلاط در ناحیهٔ اختلاط برحسب آلفا

۷. مآخذ

[1] T. Lwayama ,T. Watanabe, universal spectrum in the infrared range two-dimensional turbulent flows, *Physics of Fluids*, Vol. 26, 025105, 2014.

[2] R. T. Pierrehumbert, I. M. Held, K. L. Swanson, Spectra of local and nonlocal two-dimensional turbulence, *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 4, No. 6, 1994, pp. 1111-1116.

[3] B. H. Burgess, T. G. Shepherd, Spectral nonlocality, absolute equlibibria and Kraichnan-Leith-Batchelor phenomenology in two-dimensional turbulent energy cascades, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 725, pp. 332, 2013.

[4] T. Watanabe, T. Iwayama, Unified Scaling Theory for Local and Non-local Transfers in Generalized Two-dimensional Turbulence, *Journal of the Physical Society of Japan*,Vol. 73, No. 12, 2004, pp. 3319-3330.

[5] A. J. Majda, A. Bertozzi, *Vorticity and Incompressible Flow*, Cambridge: Cambridge University, 2003.

[6] M. I. Iovieno, C. Cavazzoni, D. Tordella, A new technique for a parallel dealiased pseudospectral Navier-Stokes code, *Computer Physics Communications*, Vol. 141, 2001, pp. 365-374.

[7] R. S. Cant, E. Mastorakos, *An Introduction to Turbulent Reacting Flows*, London: Imperial College Press, 2008.

[8] M. Khoshnami Deshiri, M. Fathali, Numerical study of the impact of the initial turbulent integral length scale on the dynamics of a two dimensional shear-free turbulent mixing layer, *Modares Mechanical Engineering*, Issue. 14, 2014. (In Persian فارسی)

[9] B. Protas, A. Babiano, N. K. R. Kevlahan, On geometrical alignment properties of twodimensional forced turbulence, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol 128, No. 2-4, 1999, pp. 169-179.

[10] P. G. Saffman, On the spectrum and decay of random two-dimensional vorticity distributions at

large Reynolds number, *Studies in Applied Mathematics*, Vol 50, 1971, pp. 377-383.

[11] D. A Briggs, J. H. Ferziger, Entrainment in a shear-free turbulent mixing layer, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 310, 1996, pp. 215-241.

[12] R. S. Cant, E. Mastorakos, *An Introduction to Turbulent Reacting Flows*, London: Imperial College Press, 2008.

[13] G. K. Batchelor, *Theory of Homogeneus Turbulence*, New York: Cambridge, 1970.

[14] K. Mahendra, Incompressible turbulence as non-local field theory, *journal of physics*, Vol. 64, No. 3, 2005, pp. 333-341.

[15] P. A. Davidson, *Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers*, Oxford Univercity Press, 2004.

[16] K. Ohkitani, Asymptotics and numeric of a family of two-dimensional generalized surface quasi-geostrophic equations, *Physics of Fluids*, Vol. 24, No. 9, 2012, pp. 095101.

[17] T. Lwayama, T. Watanabe, Green's function for a generalized two-dimensional fluid, *Phy.Rev.E*, Vol. 82, 2010, 036307.

[18] J. Andrew, G. Esteban, A two-dimensional model for quasigeostrophic flow: comparison with the two-dimensional Euler flow, *Physica ElSEVIER*, Vol. 98, 1996, pp. 515-522.

[19] J. Andrew, G. Esteban, Singular front formation in a model for quasigeostrophic flow, *Physics of Fluids*, Vol. 6, No. 1, January 1994.

[20] D. J. Torres, E. A. Coutsias, Pseudospectral solution of the two-dimensional navier-stokes equation in a disl, *SIAM J. SCI. COMPUT.*, Vol. 21, No. 1, pp. 378-403.

[21] J. Cannon, B. Shivamoggi, *Mathematical and Physical Theory of Turbulence*, Chapman/CRC Press, London/New York, 2006.

[22] A. J. Lowe, P. A Davidson, The evolution of freely-decaying, isotropic two-dimensional turbulence, *European Journal of Mechanics B/ Fluids*, Vol. 24, No. 3, 2005, pp. 314-327.

[23] J. R. Herring, Y. Kimura, J. Chasnov, *Evolution of decaying two-dimensional turbulence and self-similarity*, *Trends in Mathematics*, Birkhauser Verlag Basel, Switzerland, 1999.

پی‌نوشت

1. surface quasigeostrophic dynamics (SQG)
2. 2D navier stokes dynamics
3. rotating shallow flow (RSF)
4. nonlocal
5. local
6. critical point
7. smooth and thin striped structures
8. skewness
9. kurtosis
10. regular