

## ارزیابی مانور انتقال به مدار زمین ثابت با استفاده از جاذبه ماه

عرفان بیگی<sup>۱</sup>، رضا اسماعیل زاده<sup>۲</sup>، امیرحسین آدمی<sup>۳</sup>

۱ کارشناس ارشد هوافضا، مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، e.beygi@chmail.ir

۲ استادیار، مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر

۳ دکتری هوافضا، مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۹/۱۷

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۰/۰۱

### چکیده

از جمله مهم‌ترین کاربردهای مأموریت‌های فضایی استفاده از ماهواره در مدار زمین ثابت است. با توجه به اینکه برخی پایگاه‌های پرتاب از عرض جغرافیایی بالایی برخوردارند، هزینه زیادی برای صفر کردن زاویه میل مدار مورد نیاز است. روش‌های متنوعی برای از بین بردن زاویه میل مداری وجود دارد. یکی از آنها استفاده از میدان جاذبه ماه است تا بخشی از انرژی مورد نیاز برای تصحیح زاویه میل توسط جاذبه ماه تأمین گردد. در این پژوهش به بررسی و شبیه‌سازی روش‌های معمول انتقال ماهواره از مدار پارکینگ به مدار زمین ثابت و سپس به مقایسه این روش‌ها با روش استفاده از جاذبه ماه برای یک نمونه مأموریت پرداخته شده است. شبیه‌سازی‌ها به صورت تحلیلی و عددی بر اساس مسئله دو جسم انجام گرفته و اغتشاشات طبق روش کاول به معادلات افزوده شده است. برای اعتبارسنجی نتایج نیز از نرم‌افزار *STK* استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهد که پارامترهای مدار پارکینگ تأثیر بسزایی در مقدار انرژی مورد نیاز و همچنین بهینگی روش ارائه شده دارد.

### واژگان کلیدی

مدار زمین ثابت، سیستم زمین - ماه، فلای‌بای حول ماه، مانور مداری.

### ۱. مقدمه

اهمیت بسیار زیادی برخوردار است، دانشمندان همیشه سعی در کاهش مصرف سوخت و در عین حال افزایش بار محموله دارند. از اینرو ایده استفاده از نیروی رایگان جاذبه سیارات برای افزایش یا کاهش سرعت فضاپیما یا تغییر مسیر آن شکل گرفت. هدف اصلی این پژوهش بررسی انتقال به مدار زمین ثابت با استفاده از جاذبه ماه است تا از هزینه مربوط به تغییر صفحه کاسته شود [۱]. نخستین باری که از این ایده استفاده شد، در مورد فضاپیمای آسیاست<sup>۱</sup> بود. فضاپیمای آسیاست<sup>۳</sup> یک ماهواره ارتباطی قدرتمند بود که برای کاربردهای مخابراتی توسط شرکت HSC<sup>۲</sup>

مدار زمین ثابت مداری منحصر به فرد است که ویژگی‌های بسیار کاربردی دارد. این مدار حلقه‌ای یکتا در ۳۶ هزار کیلومتری خط استواست و سرعت زاویه‌ای یک ماهواره در آن دقیقاً برابر با سرعت چرخش زمین به دور خود است. این موضوع سبب می‌شود ماهواره واقع در این مدار از نگاه ناظر زمینی ثابت به نظر برسد و این یعنی اگر از این ماهواره به عنوان رله مخابراتی استفاده شود، آنتن‌های زمینی نیاز به تغییر وضعیت و رهگیری ماهواره ندارند. با توجه به اینکه در مأموریت‌های فضایی میزان سوخت مصرفی از

ساخته و پرتاب شد. این فضاپیما با استفاده از پرتابگر پروتن در ۲۵ دسامبر ۱۹۹۷ از بایکونور قزاقستان پرتاب شد. اما مشکلی جزئی بعد از مرحله چهارم سبب شد که ماهواره نتواند به نقطه اوج مدار انتقال زمین آهنگ<sup>۳</sup> تزریق شود. در نتیجه فضاپیما در یک مدار غیرقابل استفاده (معطل)<sup>۴</sup> با زاویه<sup>۴</sup> میل ۵۱/۶ درجه و خروج از مرکز ۰/۷۳ قرار گرفت. هدف نهایی این مأموریت رفتن به مدار زمین ثابت بالای اقیانوس آرام بود، اما مأموریت رسماً شکست خورد. میزان تغییر سرعت مورد نیاز برای رفتن از این مدار GTO به مدار زمین ثابت با یک انتقال هوهمان ترکیبی ۲/۴۲ کیلومتر بر ثانیه بود. اما مقدار سوخت باقیمانده در فضاپیما فقط می‌توانست مقدار ۲/۰۲ کیلومتر بر ثانیه ایجاد کند. بنابراین فضاپیما نمی‌توانست به مدار زمین ثابت برود. در اوائل ژانویه ۱۹۹۸ مسئولین شرکت HSC این موضوع را با دانشمندان مکانیک مدار مطرح کردند. آنها یک عملیات نجات پیشنهاد دادند که از روش مرزهای پایدار ضعیف (WSB)<sup>۵</sup> برای انتقال به ماه استفاده کند و سپس به مدار زمین ثابت مطلوب بازگردد. برای انجام این مانور مقدار تغییر سرعت ۱/۹۴۰ کیلومتر بر ثانیه مورد نیاز است که فضاپیما قادر به تأمین آن است. اما چند نگرانی در مورد این گزینه وجود داشت، که مربوط به محاسبات مداری، محاسبات وضعیت، کنترل و فرمان به فضاپیما بود که باید در فاصله نسبتاً دوری انجام می‌شد. امکان استفاده از ماه در روش‌های دیگر برای نجات فضاپیما مطرح شد. مدیر شرکت HSC استفاده از جاذبه ماه را با استفاده از یک انتقال دو بیضی استاندارد بین یک مدار دایروی کوچک و یک مدار دایروی بزرگ که شامل یک مانور تغییر صفحه می‌شود را بررسی کرد. در این روش، یک مانور تزریق به سمت ماه از نقطه حضیض مدار معطل و سپس مانور دایروی کردن در مسیر بازگشت بعد از فلای‌بای بررسی شد. یکی از مزایای این روش نسبت به WSB زمان کوتاه و نهایتاً پایین بودن مقدار سوخت مصرفی است. میزان تغییر سرعت مورد نیاز برای رفتن به مدار زمین ثابت با این روش مقدار ۱/۸۱۵ کیلومتر بر ثانیه محاسبه شد.

یک مرتبه فلای‌بای حول ماه به‌عنوان گزینه نجات انتخاب شد و مأموریت فضاپیما از آسیاست ۳ به HGS-1 تغییر نام داد [۲-۳]. همچنین چند مقاله دیگر در این زمینه توسط پرادو نوشته شده است. در این مقالات پرادو مسئله را در دو جنبه بررسی کرده است: یکی با استفاده از مسئله دو جسم (روش مخروط متصل) و

دیگری با استفاده از مسئله سه جسم محدود. در این مقالات پرادو به بررسی پارامترهای کنترلی هنگام فلای‌بای حول ماه با استفاده از یک سری روابط تحلیلی پرداخته است. در روش پرادو فرض شده است که ماهواره در یک مسیر هم صفحه با صفحه حرکت ماه حول زمین به ماه نزدیک می‌شود، و زاویه<sup>۶</sup> میل مدار اولیه و مدار نهایی در نظر گرفته نشده است. بنابراین در این مقالات تغییر زاویه<sup>۶</sup> میل، مقدار تغییر سرعت مورد نیاز و زمان مأموریت هیچ‌کدام واضح نیست [۴-۸]. اما کاری که در این مقاله انجام می‌شود، علاوه بر استفاده از روابط و نتایج مقالات اُکمپو و پرادو، اضافه‌شدن موارد زیر است [۱]:

۱. بررسی روش‌های رفتن به مدار زمین ثابت به‌طور مستقیم (انتقال هوهمان) با استفاده از روابط تحلیلی و شبیه‌سازی عددی
۲. بررسی روش‌های رفتن به مدار زمین ثابت به‌کمک جاذبه ماه با استفاده از روابط تحلیلی و شبیه‌سازی عددی
۳. ارائه الگوریتمی برای شبیه‌سازی عددی مأموریت با استفاده از مسئله دو جسم
۴. اعتبارسنجی نتایج شبیه‌سازی عددی با استفاده از نرم‌افزار STK

## ۲. روش‌های رایج رفتن به مدار زمین ثابت با استفاده از روابط تحلیلی

ساده‌ترین روش برای رفتن به مدار زمین ثابت از مدار پارکینگ، انتقال هوهمان است. فرض کنید یک فضاپیما به‌طور مستقیم وارد یک مدار پارکینگ اولیه شده و هیچ اغتشاشی روی فضاپیما اثر نمی‌کند. کلیه ایملاس‌ها در زمان بسیار کوتاهی رخ می‌دهند. از اثر عرض جغرافیایی پایگاه پرتاب بر تغییر سرعت نیز چشم‌پوشی شده است، اما در واقعیت تغییر سرعت مورد نیاز برای اصلاح مدار، به مکان پایگاه پرتاب در روی سطح زمین نیز بستگی دارد. هدف رفتن به مدار دایروی زمین ثابت با کمترین سوخت با استفاده از انتقال هوهمان است. شرایط مدار پارکینگ (فرضی) به‌صورت جدول ۱ می‌باشد [۹]. برای دستیابی به این هدف سه راه وجود دارد. در ابتدا روابطی که در هر سه روش مشترک است ارائه شده است.

جدول ۱. شرایط مدار پارکینگ

semi major axis	eccentricity	inclination
$a_0 = 8978.14 \text{ km}$	$e_0 = 0.267316$	$i_0 = 35^\circ$

$$\frac{\partial \Delta V_{tot}}{\partial \alpha} = 0 \rightarrow f(\alpha) = \Delta V_{tot} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0 \quad (8)$$

پس از مشتق‌گیری به یک تابع غیرخطی رسیده و برای پیدا کردن  $\alpha$  از روش عددی نیوتن استفاده می‌شود که نهایتاً مقدار  $\alpha = 1.32^\circ$  به دست می‌آید. با جایگذاری این مقدار در رابطه ۵ و ۶ مقدار تغییر سرعت زیر به دست می‌آید:

$$\Delta V_{tot} = 3.45 \text{ km/s}$$

با مقایسه نتایج در این سه روش، نتیجه گرفته می‌شود که روش سوم بهینه‌تر است. این نتایج در جدول ۲ آمده است. شکل ۱ نیز انتقال مداری در روش سوم را نشان می‌دهد [۹-۱۰].

جدول ۲. مقایسه سه روش انتقال هوهمان

تغییر سرعت روش سوم (km/s)	تغییر سرعت روش دوم (km/s)	تغییر سرعت روش اول (km/s)
$\Delta V_{tot} = 3.45$	$\Delta V_{tot} = 4.802$	$\Delta V_{tot} = 8.22$

### ۳. استفاده از جاذبه ماه برای رفتن به مدار زمین ثابت با استفاده از روابط تحلیلی

چندین مقاله در زمینه استفاده از جاذبه ماه برای تغییر زاویه میل مدار زمین مرکزی نوشته شده است. دو مقاله مربوط به مراجع [۱۱] و [۱۲] نسبتاً قدیمی می‌باشند اما مبنای کار مقالات جدیدتر قرار گرفته‌اند. این مقالات وارد جزئیات نشده و فقط به بررسی یک سری روابط تحلیلی پرداخته‌اند. طی بررسی‌های انجام شده بر روی مقالات، می‌توان آنها را بر اساس مؤلف به دو روش تقسیم کرد.

#### ۳-۱. روش پرادو

در این روش فرض شده است فضاپیما در یک مدار پارکینگ حول زمین قرار دارد، سپس با یک ایمپالس به مدار ماه ارسال می‌شود. بعد با استفاده از میدان جاذبه ماه به تغییر صفحه مطلوب می‌رسد. بعد از اصلاح زاویه میل فضاپیما به یک مدار با نیم محور اصلی خروج از مرکز مشخص به وسیله یک مانور هوهمان دو ایمپالسی بازمی‌گردد. معادلات تحلیلی بر اساس روش مخروط متصل برای محاسبه تغییرات سرعت و انرژی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. فرض شده است ماهواره در ابتدا در یک مدار کپلری در همان صفحه مدار ماه حول زمین قرار دارد. بنابراین این مأموریت به سه بخش تقسیم می‌شود [۴، ۸]:

$$\begin{aligned} \mu &= 398600 \\ r_{geo} &= 6378.145 + 35860 = 42238.145 \text{ km} \\ r_{p0} &= a_0(1 - e_0) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} r_{a0} &= a_0(1 + e_0) \\ a_1 &= (r_p + r_{geo})/2 \\ V_{p0} &= \sqrt{\mu \left( \frac{2}{r_{p0}} - \frac{1}{a_0} \right)} = 8.763 \text{ km/s} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} V_{a0} &= \sqrt{\mu \left( \frac{2}{r_{a0}} - \frac{1}{a_0} \right)} = 5.066 \text{ km/s} \\ V_{geo} &= \sqrt{\frac{\mu}{r_{geo}}} = 3.074 \text{ km/s} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} V_p &= \sqrt{\mu \left( \frac{2}{r_{p0}} - \frac{1}{a_1} \right)} = 10.23 \text{ km/s} \\ V_a &= \sqrt{\mu \left( \frac{2}{r_{geo}} - \frac{1}{a_1} \right)} = 1.59 \text{ km/s} \end{aligned} \quad (4)$$

سه روش ممکن به صورت زیر ارائه می‌گردد.

۱. اصلاح زاویه میل قبل از انجام انتقال هوهمان: در این حالت اصلاح زاویه میل در نقطه حضیض بیضی انتقال جایی که سرعت بیشترین مقدار را دارد اتفاق می‌افتد. این حالت بیشترین مصرف سوخت را دارد.

$$\Delta V_1 = 2V_{p0} \sin \frac{35^\circ}{2} = 5.27 \text{ km/s}$$

$$\Delta V_2 = |V_{p0} - V_p| = 1.475 \text{ km/s}$$

$$\Delta V_3 = |V_{geo} - V_a| = 1.477 \text{ km/s}$$

$$\Delta V_{tot} = 8.22 \text{ km/s}$$

۲. ابتدا بدون اصلاح زاویه میل با یک انتقال هوهمان به مدار ژئو می‌رود، سپس در نقطه اوج بیضی انتقال جایی که مقدار سرعت کمترین است زاویه میل اصلاح می‌گردد. این مانور هزینه کمتری از حالت قبل دارد و یک مانور رایج است.

$$\Delta V_1 = |V_{p0} - V_p| = 1.475 \text{ km/s}$$

$$\Delta V_2 = |V_{geo} - V_a| = 1.477 \text{ km/s}$$

$$\Delta V_3 = 2V_{geo} \sin \frac{35^\circ}{2} = 1.8491 \text{ km/s}$$

$$\Delta V_{tot} = 4.802 \text{ km/s}$$

۳. اگر فرض شود کل تغییر صفحه به مقدار  $\beta$  باشد، در این روش ابتدا در نقطه حضیض مدار انتقال به اندازه یک مقدار کوچک  $\alpha$  زاویه میل اصلاح می‌شود و سپس مقدار باقیمانده به اندازه  $\beta - \alpha$  در نقطه اوج اصلاح می‌شود. بنابراین روابط تغییر سرعت به صورت زیر می‌شود:

$$\Delta V_1 = \sqrt{V_{p0}^2 + V_p^2 - 2V_{p0}V_p \cos(\alpha)} \quad (5)$$

$$\Delta V_2 = \sqrt{V_{geo}^2 + V_a^2 - 2V_{geo}V_a \cos(\beta - \alpha)} \quad (6)$$

$$\Delta V_{tot} = \Delta V_1 + \Delta V_2 \quad (7)$$

برای پیدا کردن کمترین تغییر سرعت برای یک مقدار  $\alpha$  از

رابطه ۷ نسبت به  $\alpha$  مشتق گرفته می‌شود:

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{2\mu_e}{a_0(1-e_0)} - \frac{\mu_e}{a_1}} - \sqrt{\frac{2\mu_e}{a_0(1-e_0)} - \frac{\mu_e}{a_0}} \quad (9)$$

$$= 2.1014$$

$$\Delta V_2 = \sqrt{\frac{2\mu_T}{a_2(1+e_2)} - \frac{\mu_T}{a_2}} - \sqrt{\frac{2\mu_T}{a_2(1+e_2)} - \frac{\mu_T}{a_3}} \quad (10)$$

$$= 0.104$$

$$\Delta V_3 = \sqrt{\frac{2\mu_T}{a_0(1-e_0)} - \frac{\mu_T}{a_3}} - \sqrt{\frac{2\mu_T}{a_0(1-e_0)} - \frac{\mu_T}{a_0}} \quad (11)$$

$$= 1.2730$$

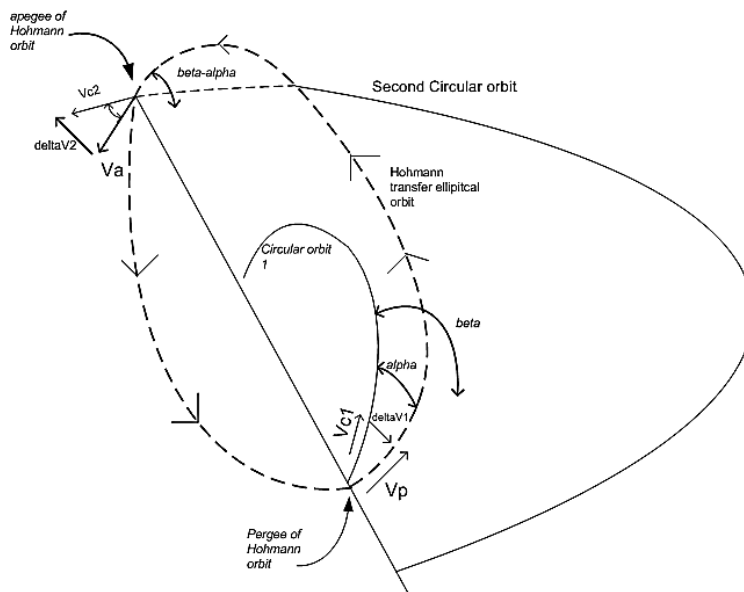
$$\Delta V_{tot} = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 = 3.5584 \text{ km/s} \quad (12)$$

۱. ارسال ماهواره با یک ایمپالس در یک مسیر هم صفحه به مدار ماه

۲. استفاده از جاذبه ماه برای یک تغییر صفحه رایگان (فلای بای)

۳. بازگشت به مدار مطلوب با استفاده از یک انتقال هوهمان دو ایمپالسی

روابط زیر میزان تغییر سرعت در این سه مرحله را برای فضاییابی با مشخصات اولیه مطابق جدول ۱ به دست می آورد:



شکل ۱. تغییر سرعت روش سوم [۹]

### ۳-۲. روش اُکمپو

این روش میزان تخمینی تغییر سرعت مورد نیاز برای انتقال از یک مدار زمین مرکزی به مدار زمین ثابت با استفاده از جاذبه ماه را به دست می آورد. همچنین رابطه بین مدار قبل و بعد از فلای بای و مشخصات مدار هدلولی فلای بای حول ماه را بررسی می کند. فرض کنید مدار اولیه حول زمین یک بیضی با زاویه میل  $i_0$  و آرگومان حضیض  $\omega_0$  است. گره صعودی  $\Omega_0$  در این تحلیل مهم نیست چون فرض شده است که نقطه فلای بای با خط آپس مدار پارکینگ منطبق است. همچنین فرض می شود ماه در یک مدار دایروی حول زمین با شعاع  $a_m$  و زاویه میل  $i_m$  نسبت به استوا است. برای بررسی این مأموریت از روش مخروط متصل استفاده می شود. فرض شده است در زمان فلای بای، ماه در صفحه استوا قرار دارد. در این لحظه یک دستگاه مختصات به مرکزیت ماه در

نظر گرفته می شود که محور  $x$  آن در امتداد بردار شعاعی ماه و محور  $y$  در امتداد تصویر سرعت مداری ماه در صفحه استوا و محور  $z$  تکمیل کننده دستگاه راستگرد است. زاویه بعد، تصویر بردار سرعت در صفحه  $x-y$   $(\alpha_m)$  و زاویه میل بردار سرعت بالای صفحه  $x-y$   $(\delta_m)$  تعریف می شود. اگر زاویه میل مدار ماه نسبت به زمین  $i_m$  باشد، آنگاه برای یک فلای بای در گره صعودی  $\delta_m = +i_m$  و برای فلای بای در گره نزولی  $\delta_m = -i_m$  می باشد. مؤلفه های سرعت اینرسی ورودی (قبل از فلای بای)  $V_i^y$  و سرعت اینرسی خروجی (پس از فلای بای)  $V_f^x$  در دستگاه ماه مرکزی به صورت زیر است.

$$V_k = \begin{bmatrix} v_k \cos \delta_k \cos \alpha_k \\ v_k \cos \delta_k \sin \alpha_k \\ v_k \sin \delta_k \end{bmatrix} \quad (13)$$

شرایط مطلوب نهایی پس از فلای بای رفتن به مدار زمین ثابت با یک زاویه مسیر پرواز صفر است. با به کار بردن قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای ویژه بین نقطه فلای بای و شرایط نهایی داریم:

$$r_m v_f \cos \phi_f = r_{pf} v_{pf} \quad (22)$$

همچنین با به کار بردن قانون بقای انرژی ویژه بین نقطه فلای بای و شرایط نهایی داریم:

$$\frac{v_f^2}{2} - \frac{\mu_{earth}}{r_m} = \frac{v_{pf}^2}{2} - \frac{\mu_{earth}}{r_{pf}} \quad (23)$$

طبق قانون بقای انرژی هنگام فلای بای حول ماه رابطه  $v_{\infty i}^2 = v_{\infty f}^2$  برقرار است. چون مدار بیضوی انتقال به ماه را یک بیضی کمترین انرژی<sup>۱۰</sup> از  $r_{p0}$  تا  $a_m$  در نظر گرفته شد، از اینرو سرعت اضافه هذلولی ورودی را می‌توان به دست آورد. زاویه مسیر پرواز بعد از فلای بای از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\phi_f = \frac{\pi}{2} - \alpha_f \rightarrow \cos \phi_f = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_f \right) = \sin(\alpha_f) = \frac{r_{pf} v_{pf}}{r_m v_f} \quad (24)$$

می‌توان رابطه سرعت بعد از فلای بای را بر حسب زاویه مسیر پرواز به صورت ۲۵ نوشت:

$$v_f^2 = v_{\infty f}^2 - v_m^2 + 2v_f v_m \cos \delta_m \cos \phi_f \quad (25)$$

معادلات بیانگر یک دستگاه معادلات با سه مجهول  $v_f, v_p, \phi_f$  می‌باشند. با جایگذاری رابطه ۲۴ در ۲۵:

$$v_f^2 = v_{\infty f}^2 - v_m^2 + 2 \frac{r_{pf} v_{pf}}{r_m} v_m \cos \delta_m \quad (26)$$

می‌توان با استفاده از روابط ۲۳ و ۲۵ یک عبارت درجه دو برای  $v_{pf}$  به دست آورد، و سپس ریشه این معادله را پیدا کرد:

$$v_{pf}^2 - 2v_m \frac{r_{pf}}{r_m} (\cos \delta_m) v_{pf} - (v_{\infty f}^2 - v_m^2) + 2\mu_{earth} \left( \frac{r_{pf} - r_m}{r_m r_{pf}} \right) = 0 \quad (27)$$

با حل معادله ۲۷ اندازه سرعت بعد از فلای بای و زاویه مسیر پرواز به دست می‌آید، و مسیر زمین مرکزی بعد از فلای بای مشخص می‌شود. طبق رابطه ۲۲ دو راه حل با دو زاویه مسیر پرواز مجزا وجود دارد:

$$\phi_f = \pm \cos^{-1} \left( \frac{r_p v_{pf}}{r_m v_f} \right) \quad (28)$$

انتخاب علامت  $\phi_f$  یک پارامتر طراحی است. مقدار مثبت معادل حل انتقال طولانی<sup>۱۱</sup> است؛ یعنی مسیر فضاپیما تا اوج مدار بعد از فلای بای قبل از بازگشت به زمین ادامه پیدا می‌کند. مقدار منفی معادل حل انتقال کوتاه است؛ یعنی فضاپیما بعد از فلای بای سریعاً به زمین بازمی‌گردد. مسیر بعد از فلای بای نسبت به زمین با

زیرنویس  $k$  با هر یک از زیرنویس‌های  $m, i, f$  جایگزین می‌شود، که به ترتیب مشخص‌کننده سه بردار سرعت خروجی، ورودی و ماه می‌باشند. در حالت کلی اگر آرگومان حضیض مدار اولیه نامعین باشد دو مسیر برای رفتن از مدار اولیه به سمت ماه که در استوا قرار دارد ممکن است؛ مسیری شمالی و جنوبی. مسیر شمالی مسیری است که مواجه با ماه در حالتی صورت می‌گیرد که فضاپیما در گره نزولی است؛ یعنی مانور تزریق به سمت ماه در حضیض مدار اولیه انجام شده است که منطبق با گره صعودی مدار اولیه است. مسیر جنوبی برعکس مسیر شمالی است؛ یعنی مسیر مانور تزریق به سمت ماه زمانی رخ می‌دهد که فضاپیما در گره نزولی است و مواجه با ماه در حالتی رخ می‌دهد که فضاپیما در گره صعودی است. واضح است که ماه، استوا را در هر دوره تناوب دو مرتبه قطع می‌کند، بنابراین چهار حالت برخورد وجود دارد. یک جفت مسیر شمالی و یک جفت مسیر جنوبی. اگر مدار قبل از فلای بای فضاپیما یک زاویه میل  $i_i$  داشته باشد برای مسیر شمالی  $\delta_i = -i_i$  و برای مسیر جنوبی  $\delta_i = +i_i$  است. بردارهای سرعت اضافه هذلولی<sup>۱</sup> نسبت به ماه از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$V_{\infty i} = V_i - V_m \quad (14)$$

$$V_{\infty f} = V_f - V_m \quad (15)$$

اندازه سرعت اضافه هذلولی از رابطه ۱۶ به دست می‌آید:

$$v_{\infty i}^2 = v_i^2 + v_m^2 - 2v_i v_m \cos \beta_i \quad (16)$$

زاویه بین دو بردار سرعت  $V_i$  و  $V_m$  با  $\beta_i$  مشخص می‌شود.

$$\cos \beta_i = \frac{V_i^T V_m}{v_i v_m} \quad (17)$$

$$v_{\infty i}^2 = v_i^2 + v_m^2 - 2v_i v_m [\cos \delta_i \cos \delta_m \cos(\alpha_i - \alpha_m) + \sin \delta_i \sin \delta_m] \quad (18)$$

همچنین اندازه سرعت اضافه هذلولی خروجی نیز از رابطه ۱۹ به دست می‌آید:

$$v_{\infty f}^2 = v_f^2 + v_m^2 - 2v_f v_m [\cos \delta_f \cos \delta_m \cos(\alpha_f - \alpha_m) + \sin \delta_f \sin \delta_m] \quad (19)$$

دو رابطه فوق را با استفاده از برخی فرضیات مسئله می‌توان ساده‌تر کرد. اگر فرض کنیم مسیر شمالی است ( $\delta_i = -i_i$ ) و اگر هدف نهایی رفتن به زمین ثابت باشد ( $\delta_f = 0$ ). نقطه فلای بای با ماه در نقطه اوج مدار انتقال اتفاق می‌افتد ( $\alpha_i = 90^\circ$ ). همچنین اگر فرض شود خروج از مرکز مدار ماه صفر است ( $\alpha_m = 90^\circ$ ), بنابراین با این فرضیات روابط به صورت زیر ساده می‌شود:

$$v_{\infty i}^2 = v_i^2 + v_m^2 - 2v_i v_m \cos(\delta_i - \delta_m) \quad (20)$$

$$v_{\infty f}^2 = v_f^2 + v_m^2 - 2v_f v_m \cos \delta_m \sin \alpha_f \quad (21)$$

$$r_{pfb} = \frac{\mu_{moon}}{v_{\infty i}^2} (1 - e_{fb}) \quad (35)$$

حال می‌توان میزان تغییر سرعت مورد نیاز برای انجام این مانور را طبق روابط زیر به‌دست آورد [۱۰، ۲-۱]:

$$\Delta v_0 = \sqrt{2\mu_{earth}} \left[ \left( \frac{1}{r_{po}} - \frac{1}{r_{po}+a_m} \right)^{\frac{1}{2}} - \left( \frac{1}{r_{po}} - \frac{1}{r_{po}+r_{ao}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (36)$$

$$\Delta v_f = v_{pff} - \sqrt{\frac{\mu_{earth}}{r_{pff}}} \quad (37)$$

$$\Delta v_{total} = \Delta v_0 + \Delta v_f \quad (38)$$

اکنون با استفاده از روابط فوق شرایط برای رفتن از یک مدار اولیه با مشخصات جدول ۱ به یک مدار زمین ثابت، طبق روش اُکمپو بررسی می‌شود.

جدول ۳ نتایج شبیه‌سازی روش اُکمپو را نشان می‌دهد.

جدول ۴ نیز مقدار تغییر سرعت کلی مورد نیاز برای رفتن از یک مدار بیضوی به مدار زمین ثابت با استفاده از جاذبه ماه را در سه روش مقایسه کرده است.

استفاده از یک بیضی با شعاع اوج بزرگتر از  $a_m$  مشخص می‌شود. نیم محور اصلی این مسیر از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$a_f = -\frac{\mu_{earth} r_m}{r_m v_f^2 - 2\mu_{earth}} \quad (29)$$

جهت‌یابی خط آپس مدار بعد از فلالی‌بای نسبت به یک دستگاه زمین مرکزی با استفاده از آنومالی حقیقی نقطه فلالی‌بای از مسیر بعد از فلالی‌بای محاسبه می‌شود:

$$v_{fb} = \pm \cos \left[ \frac{1}{e_f} \left( \frac{a_f(1-e_f^2)}{r_m} - 1 \right) \right] \quad (30)$$

$$v_{fb} = \begin{cases} 0^\circ \leq v_{fb} < 180^\circ & \text{if } \phi_f \geq 0^\circ \\ -180^\circ < v_{fb} < 0^\circ & \text{if } \phi_f > 0^\circ \end{cases} \quad (31)$$

اگر  $\lambda_{fb}$  طول جغرافیایی نقطه فلالی‌بای باشد، آرگومان حضیض مدار بعد از فلالی‌بای از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\omega_f = \lambda_{fb} - v_{fb} \quad (32)$$

با محاسبه بردارهای سرعت  $V_{\infty i}, V_{\infty f}$  می‌توان مشخصات هذلولی فلالی‌بای یعنی زاویه پیچش<sup>۱۲</sup>، خروج از مرکز و شعاع حضیض را به‌دست آورد:

$$\delta_{fb} = \cos \left( \frac{V_{\infty i}^T V_{\infty f}}{v_{\infty i} v_{\infty f}} \right) \quad (33)$$

$$e_{fb} = \frac{1}{\sin \left( \frac{\delta_{hyp}}{2} \right)} \quad (34)$$

جدول ۳. نتایج روش اُکمپو

مدار اولیه	مدار اولیه
$\Delta V$ اولیه برای رفتن به ماه	$a_0 = 8978 \text{ km}, e_0 = 0.2673, i_0 = 35^\circ$
سرعت در حضیض مسیر بعد از فلالی‌بای	$\Delta V_1 = 2.15247 \text{ km/s}$
زاویه مسیر پرواز بعد از فلالی‌بای	$V_{pff} = 4.1867 \text{ km/s}$
زاویه پیچش فضاییما حول ماه	$fpa = 56.5904^\circ$
خروج از مرکز هذلولی فلالی‌بای	$\delta = 49.2897^\circ$
مقدار $\Delta V_2$ برای رفتن به GEO	$e = 2.28$
مقدار کل $\Delta V$ مورد نیاز	$\Delta V_2 = 1.11208 \text{ km/s}$
	$\Delta V_{tot} = 3.26455 \text{ km/s}$

جدول ۴. مقایسه سه روش برای رفتن به مدار زمین ثابت

روش	شرایط مدار اولیه	شرایط مدار نهایی	مقدار تغییر سرعت (km/s)
پرادو	$a_0 = 8978 \text{ km}$ $e_0 = 0.267$ $i_0 = -$	$a_{geo} = 42164 \text{ km}$ $e_{geo} = 0$ $i_{geo} = 0^\circ$	$\Delta v_{total} = 3.558$
اُکمپو	$a_0 = 8978 \text{ km}$ $e_0 = 0.267$ $i_0 = 35^\circ$	$a_{geo} = 42164 \text{ km}$ $e_{geo} = 0$ $i_{geo} = 0^\circ$	$\Delta v_{total} = 3.264$
هوهمان بهینه	$a_0 = 8978 \text{ km}$ $e_0 = 0.267$ $i_0 = 35^\circ$	$a_{geo} = 42164 \text{ km}$ $e_{geo} = 0$ $i_{geo} = 0^\circ$	$\Delta v_{total} = 3.45$

#### ۴. شبیه‌سازی عددی

برای شبیه‌سازی عددی فرض می‌شود که ماهواره ابتدا در یک مدار پارکینگ بیضوی قرار دارد، سپس با اعمال یک ایمپالس در حضيض این مدار ماهواره به سمت ماه می‌رود. مهم‌ترین بخش این شبیه‌سازی به‌دست آوردن مقدار ایمپالس مورد نیاز برای رفتن به ماه است؛ یعنی باید اندازه، جهت و زمان اعمال این ایمپالس طوری دقیق باشد که ماهواره در زمان دقیق به ماه برسد. نزدیک شدن به ماه باید به‌گونه‌ای باشد که بر اثر برخورد با میدان جاذبه ماه تغییر صفحه مطلوب رخ دهد. سپس با اعمال دو ایمپالس دیگر وارد مدار زمین ثابت شود.

شبیه‌سازی بر اساس مسئله دو جسم انجام شده است؛ یعنی معادلات حرکت زمین مرکزی در نظر گرفته شده است، که شامل اثر جاذبه به خاطر غیر کرووی بودن زمین، جاذبه خورشید، جاذبه ماه و فشار تشعشعی خورشید است. بنابراین طبق روش کاول<sup>۱۳</sup> به معادله مسئله دو جسم شتاب‌های اغتشاشی نیز اضافه می‌شود [۱۰].

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = \mathbf{a}_d \quad (39)$$

بنابراین معادلات دیفرانسیل غیرخطی حرکت به‌صورت زیر می‌شود:

$$\mathbf{a}_d(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}_g(\mathbf{r}, t) + \mathbf{a}_s(\mathbf{r}, t) + \mathbf{a}_m(\mathbf{r}, t) + \mathbf{a}_{srp}(\mathbf{r}, t) \quad (40)$$

#### ۴-۱. شتاب جاذبه زمین

هر کجا صحبت از معادلات حرکت یک جسم تحت گرانش شود، قانون دوم نیوتن و رابطه جهانی گرانش به کار می‌آیند. اما باید دقت کرد که قانون جهانی گرانش برای حالتی است که جرم‌ها به‌صورت نقطه‌ای و یا به شکل کره دقیق هستند. بنابراین چون در واقعیت زمین غیر کرووی است این رابطه دقیق نیست. مدل‌های جاذبه مختلفی وجود دارد، در اینجا از مدل هارمونیک کرووی<sup>۱۴</sup> برای نمایش تابع ژئو پتانسیل زمین<sup>۱۵</sup> استفاده می‌شود، که در مختصات کرووی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \Phi(r, \phi, \lambda) &= \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{r} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^0 \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n^0(u) \\ &+ \frac{\mu}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n^m(u) [S_n^m \sin m\lambda + C_n^m \cos m\lambda] \end{aligned} \quad (41)$$

بنابراین شتاب فضایی ناشی از میدان جاذبه زمین به‌وسیله یک معادله برداری که از گرادینان تابع پتانسیل استخراج می‌شود، به دست می‌آید:

$$\mathbf{a}_g(\mathbf{r}, t) = \nabla \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (42)$$

این بردار شتاب ترکیبی از دو جسم خالص یا شتاب جاذبه نقطه جرم و شتاب گرانشی ناشی از عبارت غیر کرووی بودن زمین است؛ یعنی به معادلات حرکت دو جسم یک عبارت اغتشاشی به‌خاطر شتاب ناشی از غیر کرووی بودن زمین اضافه می‌شود. بردار شتاب فضایی در دستگاه کارترین برحسب ژئو پتانسیل زمین ( $\Phi$ ) و سه مشتق جزئی ژئو پتانسیل نسبت به مختصات کرووی در مرجع [۱۳] آمده است. اطلاعات مربوط به مدل جاذبه استفاده شده مربوط به مدل EGM96 است [۱۳].

#### ۴-۲. شتاب نقطه جرم

برای بررسی شتاب اغتشاشی ناشی از نقطه جرم خورشید و ماه از تابع اغتشاشی رابطه ۴۳ استفاده شده است، که مربوط به شتاب نقطه جرم  $n$  جسم گرانشی است. در این تحقیق چون هدف فلای‌بای حول ماه است می‌توان برای شبیه‌سازی تقریبی مواجه نزدیک با ماه و اثر کمک جاذبه طبق مراجع [۱۴] و [۱۵] از این تابع استفاده کرد.

$$\ddot{\mathbf{r}} = - \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{(r - s_k)^3} [r + f(q_k) s_k] \quad (43)$$

برای به‌دست آوردن تابع  $f(q)$  از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$f(q_k) = q_k \left[ \frac{3 + 3q_k + q_k^2}{1 + (\sqrt{1 + q_k})^3} \right] \quad (44)$$

$$q_k = \frac{r^T (r - 2s_k)}{s_k^T s_k} \quad (45)$$

برای استفاده از رابطه ۴۳ زمین به‌عنوان جسم اصلی در نظر گرفته می‌شود، از اینرو باید بردار مکان خورشید و ماه را نسبت به زمین در هر لحظه مشخص باشد، برای این کار از اطلاعات تقویم نجومی DE421 استفاده می‌شود [۱۶].

#### ۴-۳. فشار تشعشعی خورشیدی

ثابت تشعشعی خورشید را برای هر فضایما می‌توان به‌عنوان تابعی از اندازه، جرم و ویژگی سطح بازتاب طبق رابطه زیر به‌دست آورد:

$$C_{srp} = \gamma P_s a^2 \frac{A}{m} \quad (46)$$

#### ۴-۴. دستگاه مختصات

دستگاه مختصات استفاده شده برای شبیه سازی حرکت مداری فضاپیما دستگاه مختصات زمین مرکزی (EME2000) است. این دستگاه در شکل ۲ نمایش داده شده است. همان گونه که در شکل دیده می شود، مبدأ این دستگاه مرکز زمین و صفحه اصلی، صفحه استواست. محور z این دستگاه عمود بر استواست، و محور x موازی اعتدال بهاری در دوره J2000 است. محور y هم تکمیل کننده دستگاه راستگرد است. دوره J2000 تاریخ ژولین ۲۴۵۱۵۴۵ است که معادل زمان زمینی<sup>۱۶</sup> روز اول ژانویه ۲۰۰۰ در ساعت ۱۲ می باشد [۱۷].

مورد نظر را انجام داد. جدول ۵ مشخصات مدار اولیه را برای این شرایط نشان می دهد.

جدول ۵. مشخصات مدار اولیه

مشخصه مدار	$a$	$e$	$i$	$\Omega$	$\omega$	$\nu$
مقدار	8978.14 km	0.2673	35°	354.6°	0°	0°

۳. برای اینکه دید ماه در چه تاریخی استوا را قطع می کند و برای مسیر شمالی مناسب است، از تقویم های نجومی استفاده می شود. برای این مسئله تاریخ 2014/10/21 در ساعت 1:43:32 از تقویم DE421 استخراج شده است [۱].

۴. حال برای فرایند شبیه سازی باید المان های مداری اولیه به بردار حالت تبدیل شوند. چون آنومالی حقیقی صفر در نظر گرفته شده است، بنابراین بردار حالت در حقیض مدار به دست می آید که به صورت زیر است:

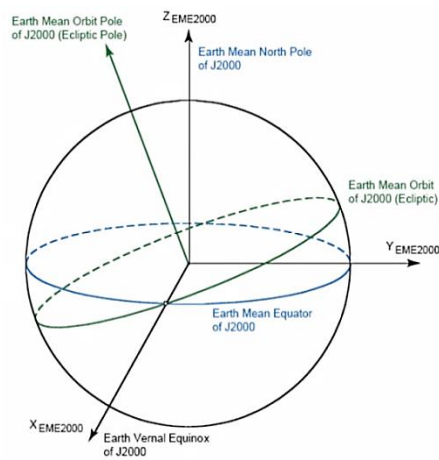
$$\text{state vector: } [r_0, v_0] = [6548.94, -619.057, 0, 0.675542, 7.14649, 5.02633]$$

۵. برای محاسبه یک مقدار تقریبی سرعت اولیه برای شروع مسئله، از مسئله لمبرت اصلاح شده که اثر  $J_2$  را نیز در نظر می گیرد استفاده می شود. با استفاده از این مسئله می توان مقدار تغییر سرعت مورد نیاز رفتن از بردار حالت اولیه به بردار حالت ثانویه (مکان ماه در استوا) را به دست آورد.

۶. حال با داشتن یک بردار حالت که مکان آن در حقیض مدار اولیه است و سرعت تقریبی که از مسئله لمبرت به دست آمده است، می توان شروع به انتگرال گیری کرد. اما باید به تاریخ شروع انتگرال گیری دقت کرد؛ یعنی باید تاریخ شروع زمانی باشد که مواجه با ماه در مکان مناسبی رخ دهد، و همچنین تغییر صفحه مطلوب انجام شود. بنابراین می توان با استفاده از روش آزمون و خطا و یا الگوریتم ژنتیک (GA) به بردار حالت اولیه و تاریخ مناسب برای شروع انتگرال گیری رسید.

۷. با شروع فرایند انتگرال گیری اگر سرعت و تاریخ اولیه دقیق باشد، مواجه با ماه به درستی رخ می دهد و تغییر صفحه مطلوب انجام می شود. شکل ۴ نشان دهنده تغییر زاویه میل به خاطر فلای بای حول ماه است.

۸. پس از اینکه تغییر صفحه مطلوب انجام شد و فضاپیما از ناحیه نفوذ ماه خارج شد، حال باید با اعمال یک ایمپالس مناسب



شکل ۲. دستگاه مختصات EME2000 [۱۸]

#### ۴-۵. الگوریتم حل مسئله

در این قسمت یک الگوریتم برای شبیه سازی عددی انتقال به مدار زمین ثابت بر اساس مسئله دو جسم ارائه می گردد. شکل ۳ نیز این روند را به صورت یک بلوک - دیاگرام نشان می دهد [۱]:

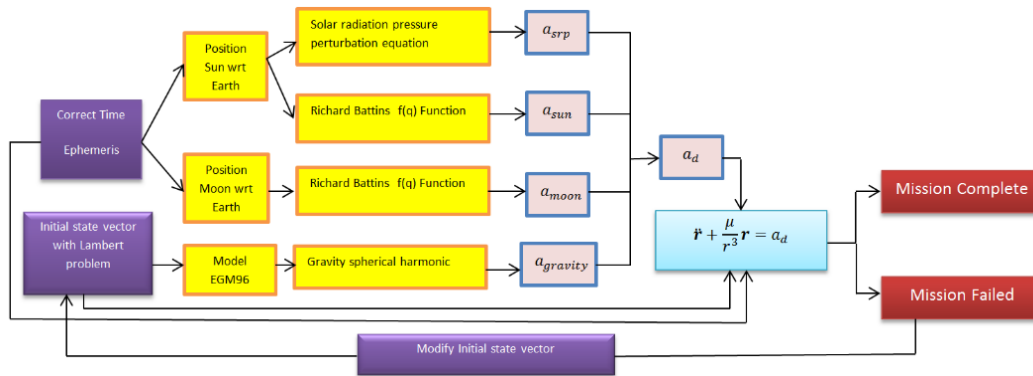
۱. تعریف مسئله: ارسال ماهواره از یک مدار اولیه حول زمین به مدار زمین ثابت با استفاده از جاذبه ماه؛ به طوری که زاویه میل مدار اولیه با استفاده از فلای بای حول ماه کاهش پیدا کند.

۲. به دست آوردن مشخصات مدار اولیه: برای این کار باید یک سری شرایط خاص در نظر گرفته شود. فرضاً باید تعیین شود از چه مسیری (شمالی یا جنوبی) به سمت ماه رفت؟ چون زاویه میل مدار اولیه کمتر از ۹۰ درجه است بهتر است از مسیر شمالی استفاده شود. برای این منظور باید مشخصات مدار اولیه طوری تنظیم شوند که امتداد خط آپس مدار اولیه به ماه برسد. باید دقت کرد که ماه باید در تقاطع با استوا باشد، تا بتوان مانور فلای بای

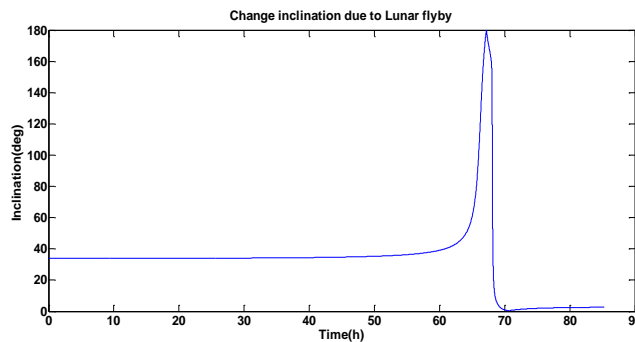


۹. پس از رسیدن به مدار زمین ثابت باید با اعمال یک ایمپالس دیگر مدار دایروی شود. جدول ۷ بردار حالت و تاریخ مناسب برای اجرای هر مرحله است. شکل ۵ نشان دهنده مسیر این مأموریت به صورت سه بعدی است و شکل ۶ مسیر را در صفحه XY نمایش می دهد [۱].

دیگر به سمت مدار زمین ثابت رفت. مقدار تقریبی این ایمپالس نیز با استفاده از مسئله لمبرت به دست می آید و سپس می توان با استفاده از روش آزمون و خطا به یک مقدار بهینه رسید. شکل ۴ کاهش زاویه میل بر اثر فلای بای حول ماه را نشان می دهد.



شکل ۳. بلوک دیاگرام روند شبی سازی عددی



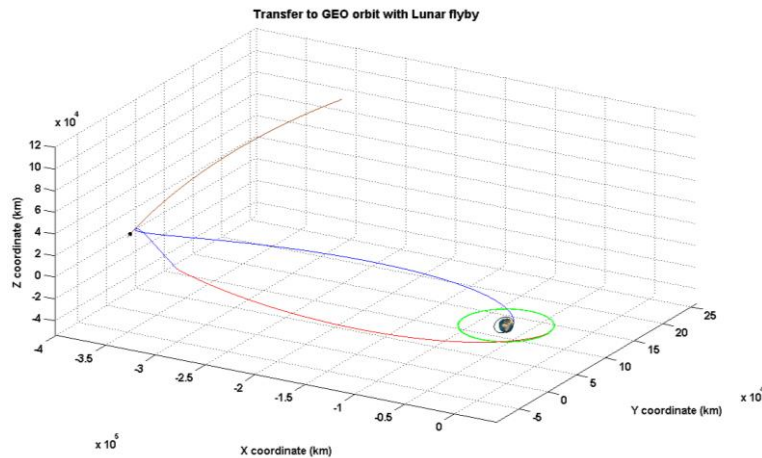
شکل ۴. تغییر زاویه میل با استفاده از فلای بای حول ماه

جدول ۶. شرایط اولیه برای شروع شبیه سازی

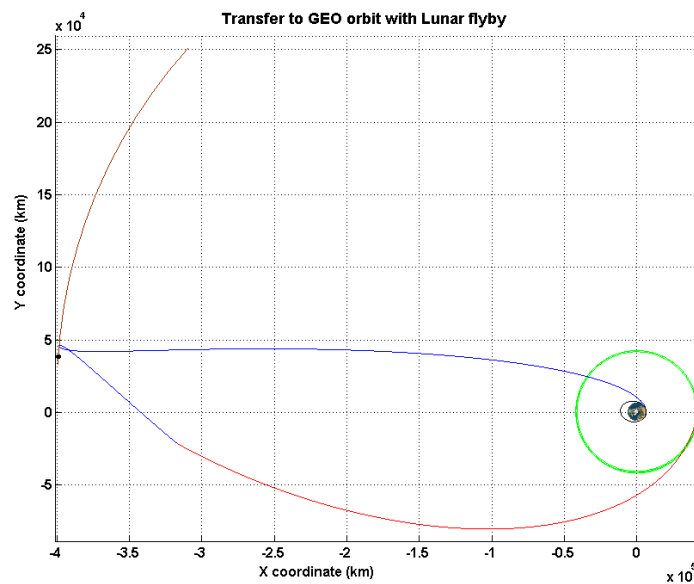
$state\ vector: [r_1, v_1] = [6548.94, -619.057, 0, 0.675542, 7.14649, 5.02633]$
initial calendar date
date1=[2014, 10, 18, 3, 25, 0]=[year, month, day, hr, min, sec]
Juliandate= 2.4569e+06

جدول ۷. شرایط اولیه برای شبیه سازی در هر مرحله

$[r_1, v_1] = [6548.94, -619.057, 0, 0, 9.1, 6.1]$ date1=[2014, 10, 18, 3, 25, 0] , $\Delta V_1 = 2.32\ km/s$	مرحله اول: از مدار اولیه به ماه
$[r_2, v_2] = [-316995.4, -21816.18, 1043.03, 0.888, -0.489, 0.021]$ date2=[2014, 10, 21, 16, 43, 32] , $\Delta V_2 = 0.73\ km/s$	مرحله دوم: پس از فلای بای به سمت مدار ژئو
$[r_3, v_3] = [-42241, -174, 0, 0.014, 3.0705, 0]$ date3=[2014, 10, 24, 4, 36, 20] , $\Delta V_3 = 1.27\ km/s$	مرحله سوم: دایروی کردن مسیر
$\Delta V_{tot} = 4.336\ km/s$	تغییر سرعت کلی
$T \approx 7\ days$	زمان کل سفر



شکل ۵. مسیر سه بعدی رفتن به مدار زمین ثابت با استفاده از جاذبه ماه



شکل ۶. مسیر در صفحه XY

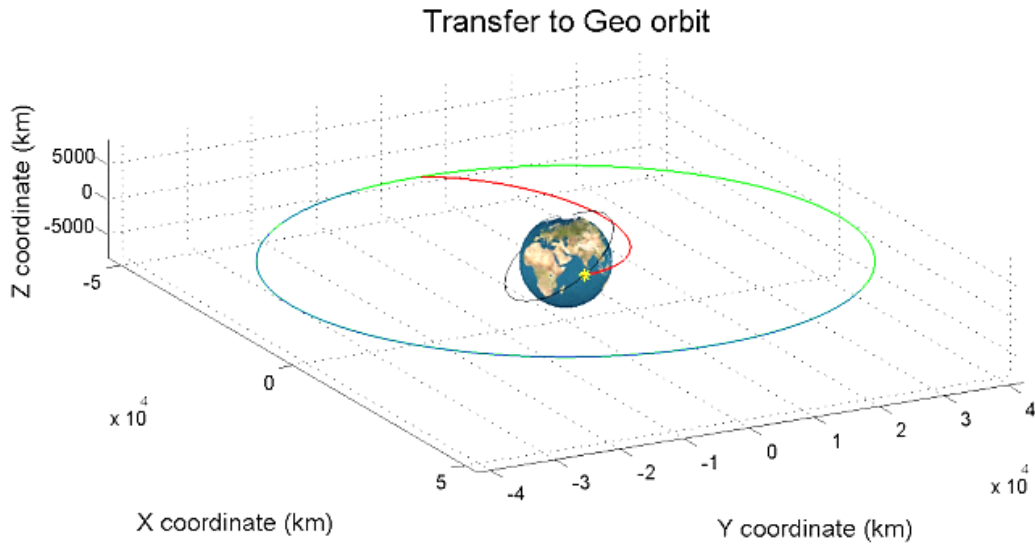
مورد نیاز است. نتایج شبیه‌سازی در جدول ۸ آمده است. همچنین مسیر مأموریت در شکل ۷ و شکل ۸ نمایش داده شده است [۱].

جدول ۸ مقایسه نتایج شبیه‌سازی عددی برای انتقال مستقیم

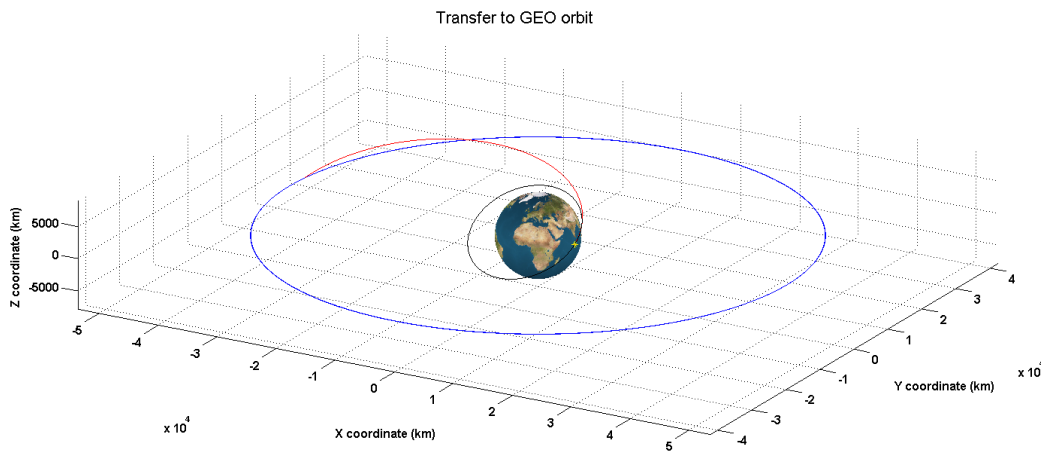
$[r_0, v_0]$ $= [6548.94, -619.057, 0, 0.675542, 7.14649, 5.02633]$ $[r_1, v_1]$ $= [6548.94, -619.057, -0.2756, 10.2718, 0.0017]$ $[r_2, v_2] = [-42161.7, -10.87, -0.85, 0, -3.074, 0]$ $\Delta V_{tot} = 7.697 \text{ km/s}$ $T = 4.150 \text{ hours}$	روش اول
$[r_0, v_0]$ $= [6548.94, -619.057, 0, 0.675542, 7.14649, 5.02633]$ $[r_1, v_1] = [6548.94, -619.057, 0, 8.67934, 5.5]$ $[r_2, v_2] = [-41970, 4031.95, 0.27, -0.3, -3.06, 0]$ $\Delta V_{tot} = 3.8360 \text{ km/s}$ $T = 4.157 \text{ hours}$	روش سوم (مجموعی)

## ۵. شبیه‌سازی عددی به صورت مستقیم

در این قسمت برای مقایسه نتایج، مسئله به طور مستقیم حل می‌شود؛ یعنی فضاپیما از همان مدار اولیه به طور مستقیم و بدون استفاده از جاذبه ماه به مدار زمین ثابت ارسال می‌شود. در این قسمت دو حالت در نظر گرفته می‌شود، که همان روش یک و سه در انتقال هوهمان بخش ۲ است. در روش اول فرض می‌شود که همه زاویه میل در حضیض مدار اولیه صفر شده است و سپس به مدار زمین ثابت انتقال می‌یابد. در روش سوم بخشی از زاویه میل در حضیض و بخشی در اوج مدار انتقال صفر می‌شود. برای شبیه‌سازی مثل حالت قبل از معادلات حرکت مسئله دو جسم همراه با اغتشاشات استفاده می‌شود. در هر دو روش دو ایمپالس



شکل ۷. اصلاح زاویه میل در مدار اولیه



شکل ۸. روش هوهمان بهینه

### ۶. مقایسه نتایج شبیه‌سازی عددی

جدول ۹ نتایج شبیه‌سازی عددی در حالت‌های مستقیم و استفاده از جاذبه ماه را نشان می‌دهد.

جدول ۹. مقایسه سه روش برای رفتن به مدار زمین ثابت

روش	مقدار تغییر سرعت (km/s)	زمان (hours)
استفاده از جاذبه ماه	$\Delta V_{tot} = 4.336$	$T \approx 168$
انتقال هوهمان اصلاح در حوض	$\Delta V_{tot} = 7.697$	$T = 4.150$
انتقال هوهمان اصلاح در اوج	$\Delta V_{tot} = 3.836$	$T = 4.157$

### ۷. شبیه‌سازی با نرم‌افزار STK

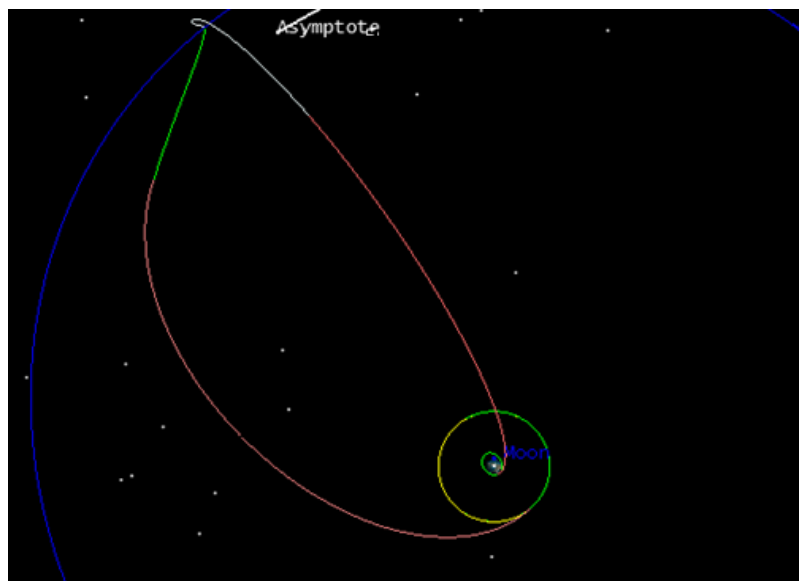
روند شبیه‌سازی مسئله با نرم‌افزار STK همان الگوریتم ارائه شده در بخش ۴-۶ است. اما در اینجا مقدار ایمپالس مورد نیاز برای حل مسئله با تعیین پارامترهای کنترلی و قیود در مسئله به دست می‌آید. شرایط مدار اولیه نیز طبق جدول ۵ است. در مرحله اول برای محاسبه مقدار ایمپالس مورد نیاز برای رفتن از مدار اولیه به سمت ماه دو پارامتر کنترلی و دو قید در نظر گرفته می‌شود. دو پارامتر کنترلی یکی تغییر سرعت در جهت محور  $x$  ( $V_x$ ) و دیگری تاریخ آغاز حرکت است، و دو قید، مربوط به شرایط نزدیک شدن به ماه است؛ یعنی اگر تفاوت بین دو زاویه بعد  $17^\circ$  و  $18^\circ$  فضاپیما و ماه صفر شود آنگاه فضاپیما نزدیک ماه شده است.

تعریف پارامترهای کنترلی سرعت و مشخصات مدار زمین ثابت به‌عنوان قیود می‌توان وارد مدار زمین ثابت شد. جدول ۱۰ بیانگر مشخصات هر مرحله است [۱]. شکل ۹ مسیر مأموریت انتقال به مدار زمین ثابت به‌کمک جاذبه ماه را که توسط نرم‌افزار STK شبیه‌سازی شده است نمایش می‌دهد. شکل ۱۰ نشان‌دهنده مرحله فلالی‌بای حول ماه و صفحه B است. شکل ۱۱ نیز نشان‌دهنده تغییر زاویه میل بر اثر فلالی‌بای حول ماه و شکل ۱۲ تغییر سرعت بر اثر گذر از کنار ماه را نشان می‌دهد. با مقایسه نتایج بین شبیه‌سازی عددی و نرم‌افزار STK مشاهده می‌شود که مقدار تغییر سرعت کلی برای انجام مأموریت در هر دو روش بسیار به هم نزدیک است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که نتایج به‌دست آمده از اعتبار قابل قبولی برخوردار است.

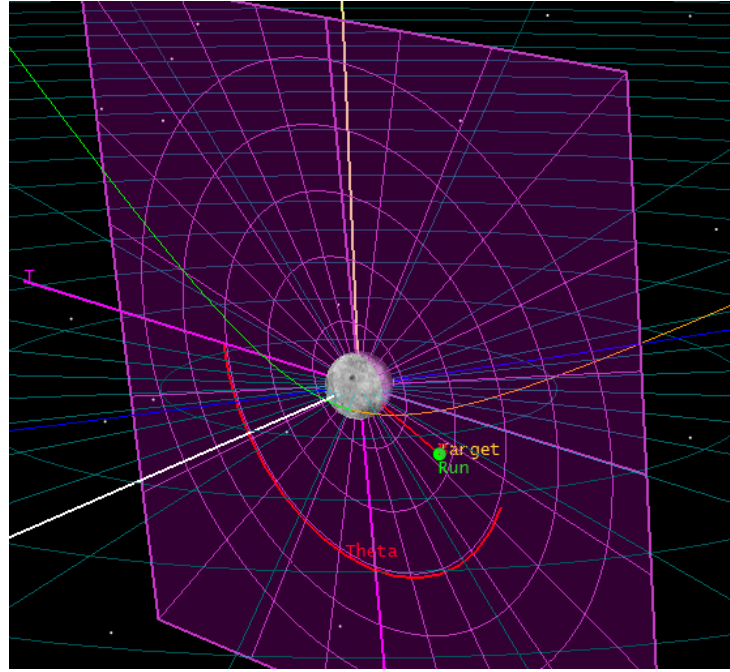
وقتی مقدار ایمپالس مورد نیاز برای رسیدن به نزدیکی ماه پیدا شد، سپس باید با تعریف مناسب صفحه B<sup>۱۹</sup> در لحظه نزدیک‌ترین رویکرد به ماه مقدار ایمپالس اولیه را طوری تغییر داد که پس از فلالی‌بای حول ماه به زاویه میل مطلوب رسید. برای اینکار از تعریف بردار b در حالت قطبی طبق مرجع [۱۹] استفاده می‌شود؛ یعنی اندازه و جهت بردار b به‌عنوان قید در نظر گرفته می‌شود. این اندازه و جهت باید به‌گونه‌ای باشد که پس از فلالی‌بای حول ماه زاویه میل مدار کاهش پیدا کند. پس از پیدا کردن مقدار ایمپالس مورد نیاز که هدف را ارضا کند، حال باید در مرحله دوم با یک ایمپالس دیگر به‌سمت به مدار زمین ثابت حرکت کرد. در این مرحله نیز با پارامترهای کنترلی زمان و سرعت و قیود مورد نظر مقدار ایمپالس مورد نیاز برای رفتن به مدار زمین ثابت به‌دست آورده می‌شود. در مرحله سوم نیز با

جدول ۱۰. مشخصات هر مرحله برای شبیه‌سازی با STK

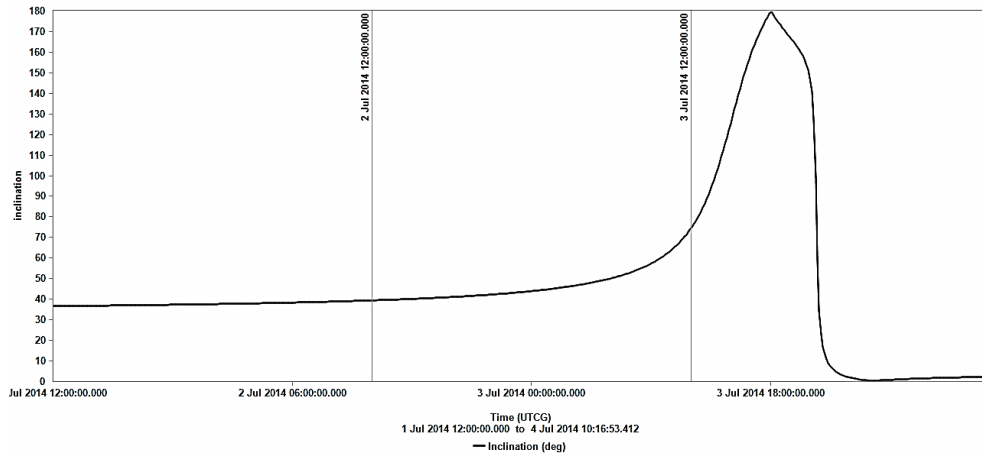
مراحل	پارامترهای کنترلی	قیود	مقدار ایمپالس و زمان
مرحله اول	$V_x, t_1$	Delta Declination = 0 Delta Right Asc = 0 Bmagnitude = 6000 km Btheta = 156 deg	$\Delta V_1 = 2.1622 \text{ km/s}$ $t_1 = 27 \text{ Jun } 2014 \text{ 17:32}$
مرحله دوم	$V_x, V_y, t_2$	$X = 42164 \text{ km}$ $Y = 0$ $Z = 0$	$\Delta V_2 = 1.0594 \text{ km/s}$ $t_2 = 4 \text{ Jul } 2014 \text{ 17:49}$
مرحله سوم	$V_x, V_y, V_z$	Inclination = 0 deg Eccentricity = 0 deg Semimajoraxis = 42164 km	$\Delta V_2 = 1.0882 \text{ km/s}$ $t_2 = 8 \text{ Jul } 2014 \text{ 21:26}$
		$\Delta V_{tot} = 4.3098 \text{ km/s}$	$T \approx 12 \text{ days}$



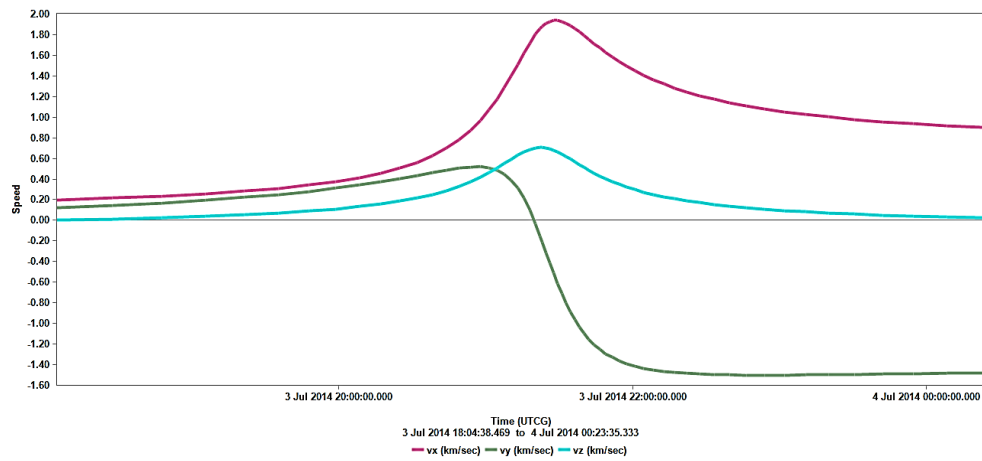
شکل ۹. مسیر مأموریت انتقال به مدار زمین ثابت با استفاده از جاذبه ماه (STK)



شکل ۱۰. فلای بای حول ماه و صفحه B، مسیر سبز بعد از فلای بای (STK)



شکل ۱۱. تغییر زاویه میل بر اثر فلای بای (STK)



شکل ۱۲. تغییر سرعت بر اثر فلای بای حول ماه (STK)

## ۸. نتیجه‌گیری

می‌نماید، اما این مأموریت مربوط به یک مدار با شرایط خاص انجام شده است، بنابراین برای مدارهای پارکینگ متداول این مانور مقرون به‌صرفه نیست. می‌توان از روش جاذبه ماه در مأموریت‌هایی که علاوه بر ارسال به مدار زمین ثابت یک مأموریت شناسایی ماه نیز تعریف شده است استفاده نمود. به‌عنوان پیشنهاد برای کارهای آینده می‌توان برای مرحله ارسال ماهواره به ماه از روش‌های نوین مثل WSB، نقاط لاگرانژ، منیفولدها و تراسترهای شتاب پایین استفاده کرد، تا هزینه سفر به ماه کاهش یابد. همچنین با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی مسیر نقاط اعمال ایмпالس و مقدار آنها را طوری تنظیم کرد که مقدار نیروی پیشران کمتری مصرف شود.

برای ارسال یک ماهواره از یک مدار اولیه حول زمین به مدار زمین ثابت روش‌های مختلفی وجود دارد. روش مرسوم استفاده از انتقال هوهمان و اصلاح زاویه میل در اوج مدار انتقال است. با توجه به اینکه ارسال ماهواره از عرض‌های جغرافیایی بالا به مدار زمین ثابت مستلزم هزینه زیادی برای صفرکردن زاویه میل است، روش استفاده از جاذبه ماه برای صفرکردن زاویه میل مطرح شده است. روابط مورد نیاز برای یک مانور مداری با استفاده از جاذبه ماه استخراج و پس از شبیه‌سازی با روش‌های متداول مقایسه شده است. اگرچه یک مأموریت (آسیاست ۳) با روش استفاده از جاذبه ماه نسبت به روش‌های کلاسیک انرژی کمتری را مطالبه

## ۹. مأخذ

- [1] E. Beygi, Transfer to geostationary orbit with Lunar gravity assist, Master thesis, Space Research Institute, 2014. (in Persian)
- [2] Cesar A. Ocampo, Trajectory Analysis for the Lunar Flyby Rescue of AsiaSat-3/HGS-1, The University of Texas at Austin, Austin, Texas, USA, 2005.
- [3] Cesar A. Ocampo, Transfers to Earth centered orbits via lunar gravity assist, *Acta Astronautica*, vol. 52, pp. 173-179, 2003.
- [4] A. F. B. d. A. Prado, Study of the inclination change in three-dimensional swing-by trajectories, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - São José dos Campos, Jan 2000.
- [5] A. F. B. d. A. Prado, A classification of swing-by trajectories using the Moon, Av. dos Astronautas 1758 São José dos Campos SP 12227-010 Brazil, Nov 1995.
- [6] A. F. B. d. A. Prado, a study of the gravitational capture in the Earth-Moon system, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - São José dos Campos - SP - 12227-010.
- [7] A. F. B. d. A. Prado, An analytical description of the close approach maneuver in three dimensions, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais -INPE -Brazil São José dos Campos - SP - 12227-010 - Brazil, Jan 2000.
- [8] Karla DE Souza Torres, A. F. B. A. Prado, Changing inclination of Earth satellites using the gravity of the Moon, Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering, OI10.1155/MPE/2006/13690,2006.
- [9] N. M. Abbasi, LEO to GEO orbit design project report, 2003.
- [10] H. D. Curtis, Orbital Mechanics for Engineering Students, Florida, Embry -Riddle Aeronautical University Daytona Beach, 2010
- [11] V. V. Ivashkin, N. N. Typitsyn, Use of the Moon's gravitational Field to inject a space vehicle into a stationary Earth-satellite orbit, *Cosmic Res* vol. 9, no. 2, pp. 163-172, 1971.
- [12] F. Graziani, M.M. Castronuovo, P. TeoBlatto, Geostationary orbits from mid-latitude launch sites via lunar gravity assist, Proceedings of the Goddard Spaceflight Center Symposium on Spaceflight Dynamics, AAS Article, pp. 93-289, March 1993.
- [13] E. G. Oliver Montenbruck, *satellite orbit*, Springer, 2001.
- [14] R. H. Battin, *A Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2001.
- [15] J. T. Betts, Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming, Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2010.
- [16] W. M. Folkner, J. G. Williams, D. H. Boggs, The Planetary and Lunar Ephemeris DE 421, JPL IOM 343R-08-003, March-2008.

[17] Peter H. Zipfel, *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*, 2<sup>nd</sup> ed., AIAA, 2007.

[18] <https://www.mathworks.com> (accessed Dec 20, 2018).

[19] satellite tool kit (STK) help, B-Plane Targeting.

### فهرست علائم و اختصارات

$t$	زمان (s)	$V_p$	سرعت در حضيض (km/s)
$a$	نیم محور اصلی (km)	$V_a$	سرعت در اوج (km/s)
$e$	خروج از مرکز	$V_\infty$	سرعت اضافی هذلولی (km/s)
$i$	زاویه میل (deg)	$\Delta V$	تغییر سرعت (km/s)
$\omega$	آرگومان حضيض (deg)	$a_g$	شتاب جاذبه زمین ( $m/s^2$ )
$\Omega$	زاویه بعد (deg)	$a_m$	شتاب ناشی از ماه ( $m/s^2$ )
$\nu$	آنومالی حقیقی (rad)	$a_s$	شتاب ناشی از خورشید ( $m/s^2$ )
$\alpha_m$	زاویه بُعد، تصویر بردار سرعت در صفحه x-y (rad)	$a_{SRP}$	شتاب ناشی از فشار تشعشی خورشید ( $m/s^2$ )
$\delta_m$	زاویه میل، بردار سرعت بالای صفحه x-y (rad)	$S, C$	ضرایب هماهنگ ژئوپتانسیل
$\phi$	زاویه مسیر پرواز (rad)	$\Phi$	تابع ژئوپتانسیل زمین
$\lambda$	طول جغرافیایی زمین مرکزی (rad)	$P$	چندجمله‌ای لژاندار با درجه n و مرتبه m و آرگومان $u = \sin\phi$
$\mu$	پارامتر گرانشی ( $km^3/m^2$ )	$s_k$	بردار مکان از جسم اصلی تا جسم ثانویه (km)
$r$	بردار مکان ماهواره نسبت به زمین (km)	$\mu_k$	ثابت گرانشی جسم ثانویه ( $km^3/m^2$ )
$r_p$	شعاع حضيض (km)	$f(q)$	تابع ریچارد باتین
$r_a$	شعاع اوج (km)		

### پی‌نوشت

1. Asia sat 3
2. hughes spacecraft company (HSC)
3. geosynchronous transfer orbit
4. stranded orbit
5. weak stability boundaries
6. patched conic method
7. pre flyby
8. post flyby
9. hyperbolic excess velocity
10. minimum energy ellipse
11. long transfer solution
12. turn angle
13. Cowells method
14. spherical harmonic
15. earths geo potential function
16. Terrestrial Time (TT)
17. delta right asc
18. delta declination
19. body plane (B plane)