

# بهبود دقت مدل انتشار خطای ناوبری اینرسی به منظور افزایش کارایی سیستم ناوبری تلفیقی

ایوب عبدلی حسین آبادی<sup>۱</sup>، محمدباقر منهای<sup>۲</sup>، سید علی ظهیری پور<sup>۳</sup>

۱ دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

۲ استاد، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

۳ استادیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه کاشان، کاشان، zahiri@alumni.iust.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۸/۰۸/۲۴

تاریخ پذیرش: ۹۹/۰۳/۰۶

## چکیده

یکی از موضوعاتی که امروزه در حوزه ناوبری از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، استفاده از معادلات انتشار خطای ناوبری به منظور تلفیق خروجی یک سیستم ناوبری اینرسی با یک اندازه‌گیری بیرونی جهت استفاده توأم از مزایای هر دو مکانیزم ناوبری اینرسی و اندازه‌گیری خارجی است. مطالعه تحقیقات گذشته نشان می‌دهد که معادلات انتشار خطا عموماً در دستگاه جغرافیایی استخراج شده که می‌تواند نقاط ضعفی داشته باشد. در این مقاله ضمن بیان چگونگی استخراج معادلات انتشار خطا در دستگاه مماسی، به صورت تحلیلی نشان داده شده است که این معادلات در مقایسه با دستگاه جغرافیایی نه تنها سادگی بیشتری دارند بلکه دقت بالاتری نیز در توصیف انتشار خطای ناوبری اینرسی و در نتیجه افزایش کارایی سیستم ناوبری تلفیقی دارند. در پایان، شبیه‌سازی‌هایی در دو حالت استفاده از مدل انتشار خطا در دستگاه مماسی و معادلات انتشار خطا در دستگاه جغرافیایی با لحاظ کردن مقادیر فرضی برای شتاب‌ها و سرعت‌های زاویه‌ای و خطای تصادفی سنسورهای یک نمونه IMU واقعی، انجام شده است. نتایج شبیه‌سازی‌های انجام شده نیز صحت افزایش دقت مدل انتشار خطای پیشنهادی این مقاله را تأیید می‌کنند.

## واژگان کلیدی

ناوبری اینرسی، ناوبری تلفیقی، انتشار خطای ناوبری، دستگاه مماسی، دستگاه جغرافیایی.

## ۱. مقدمه

در این مقاله، چگونگی استخراج معادلات انتشار خطای ناوبری<sup>۱</sup> اینرسی در دستگاه مماسی<sup>۲</sup> و مقایسه آن با دستگاه جغرافیایی<sup>۳</sup>، مورد بررسی قرار می‌گیرد. دستگاه مختصات مماسی به دستگاهی گفته می‌شود که دارای ویژگی‌های [۱] زیر است:

۱. مرکز آن یک نقطه مرجع مناسب، روی زمین است.
۲. نسبت به زمین ثابت است.
۳. محورهای آن در نقطه مرجع (در ابتدا) هم‌راستا با محورهای دستگاه جغرافیایی هستند. سپس محورها جهت اولیه خود را حفظ می‌کنند، ولی دستگاه، همراه زمین شروع به چرخش می‌کند.

$$\dot{v}_e^t = R_b^t f^b - 2\Omega_{ie}^t v_e^t + g^t \quad (2)$$

$$\dot{R}_b^t = R_b^t (\Omega_{ib}^b - \Omega_{ie}^b) \quad (3)$$

در معادلات فوق،  $p^t$ ،  $v_e^t$  و  $R_b^t$  به ترتیب بیانگر موقعیت در دستگاه مماسی، سرعت نسبت به زمین در دستگاه مماسی و ماتریس تبدیل از دستگاه بدنی<sup>۹</sup> به دستگاه مماسی است.  $f^b$  و  $\Omega_{ib}^b$  به ترتیب نشان‌دهنده شتاب ناشی از نیروهای تماسی<sup>۱۰</sup> در دستگاه بدنی و سرعت زاویه‌ای دستگاه بدنی نسبت به اینرسی در دستگاه بدنی است.  $\Omega_{ie}^b$  و  $\Omega_{ie}^t$  ماتریس‌های پادمقارنی<sup>۱۱</sup> هستند که از عناصر دو بردار  $\omega_{ie}^b$  و  $\omega_{ie}^t$  تشکیل می‌شوند. این دو بردار نشان‌دهنده سرعت دوران دستگاه زمینی نسبت به اینرسی به ترتیب در دو دستگاه مماسی و بدنی می‌باشند. اگر عناصر دو بردار فوق به صورت زیر نشان داده شود:

$$\omega_{ie}^t = \begin{bmatrix} \omega_{ie1}^t \\ \omega_{ie2}^t \\ \omega_{ie3}^t \end{bmatrix}, \quad \omega_{ie}^b = \begin{bmatrix} \omega_{ie1}^b \\ \omega_{ie2}^b \\ \omega_{ie3}^b \end{bmatrix} \quad (4)$$

روابط زیر حاصل خواهد شد:

$$\Omega_{ie}^t = (\omega_{ie}^t \times) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{ie3}^t & \omega_{ie2}^t \\ \omega_{ie3}^t & 0 & -\omega_{ie1}^t \\ -\omega_{ie2}^t & \omega_{ie1}^t & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\Omega_{ie}^b = (\omega_{ie}^b \times) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{ie3}^b & \omega_{ie2}^b \\ \omega_{ie3}^b & 0 & -\omega_{ie1}^b \\ -\omega_{ie2}^b & \omega_{ie1}^b & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

### ۳. آنالیز خطا

با توجه به آن که هنگام استفاده از معادلات ناوبری، به جای  $f^b$  از خروجی کالیبره شده شتاب‌سنج‌ها ( $\tilde{f}^b$ ) و به جای  $\Omega_{ib}^b$  از خروجی کالیبره شده ژایروها ( $\tilde{\Omega}_{ib}^b$ ) استفاده شده و این مقادیر، خود دارای خطاهای سیستماتیک ناشی از فرایند کالیبراسیون و تصادفی<sup>۱۲</sup> ناشی از نویز و دریفت سنسورها هستند، روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\delta f^b = \tilde{f}^b - f^b \quad (7)$$

$$\delta \Omega_{ib}^b = \tilde{\Omega}_{ib}^b - \Omega_{ib}^b \quad (8)$$

وجود خطا در  $\Omega_{ib}^b$ ، معادله سوم ناوبری را تحت تأثیر قرار داده و باعث ایجاد خطا در محاسبه  $R_b^t$  می‌گردد. اگر مقدار محاسبه شده این ماتریس با  $\hat{R}_b^t$  نشان داده شود، رابطه زیر حاصل خواهد شد:

$$\hat{R}_b^t = \hat{R}_b^t (\tilde{\Omega}_{ib}^b - \hat{\Omega}_{ie}^b) \quad (9)$$

یکی از مهم‌ترین و متداول‌ترین کاربردهای معادلات انتشار خطا در پژوهش‌های متعدد، استفاده از آن‌ها در فیلتر کالمن<sup>۴</sup> است [۲-۱۰]، تا عمل تلفیق<sup>۵</sup> خروجی سیستم ناوبری اینرسی با یک اندازه‌گیری بیرونی به منظور افزایش دقت ناوبری صورت گیرد [۱۱-۱۲]. این اندازه‌گیری بیرونی به صورت متداول توسط سیستم موقعیت‌یاب جهانی<sup>۶</sup>، صورت می‌گیرد [۱۳-۱۵]. مرور پژوهش‌های گذشته در این حوزه نشان می‌دهد که معادلات انتشار خطا، عموماً در دستگاه جغرافیایی [۱۶-۱۹] و گاهی در دستگاه‌های زمینی<sup>۷</sup> یا اینرسی<sup>۸</sup> [۲۰] استخراج شده و مورد استفاده قرار گرفته است.

موضوعات به روز در حوزه مدل انتشار خطا شامل ارائه تکنیک‌های نوین ریاضی استخراج این معادلات [۲۱]، ارائه مدل‌های انتشار خطای ناشی از عواملی غیر از خطای سنسورها، مانند خطای ناشی از نصب سنسورها در ساختار مکانیکی مورد نظر [۲۲]، انحرافات کانال عمودی [۲۳]، حالت اولیه [۲۴]، زوایای ناهم‌راستایی سنسورها [۲۵]، زوایای اوپلر (وضعیت) [۲۶] یا خطای ناشی از ترکیبی از عوامل مختلف [۲۷-۲۸] است.

با بررسی تحقیقات گذشته، مشاهده می‌شود که در برخی از آن‌ها از مدل خطی شده [۲۹-۳۰] و در برخی دیگر از مدل غیرخطی معادلات انتشار خطا [۲۷] استفاده شده است. باید توجه داشت که با انجام خطی‌سازی، از دقت معادلات انتشار خطا کاسته می‌شود. مرور این تحقیقات نشان می‌دهد که به صورت خاص، مقایسه‌ای به صورت تحلیلی و همچنین شبیه‌سازی در مورد دقت خطی شده معادلات انتشار خطا در دستگاه‌های مختلف انجام نشده است.

در این پژوهش، ضمن استخراج معادلات انتشار خطا در دستگاه مماسی، نشان می‌دهیم که خطی‌شده این معادلات علاوه بر سادگی بیش‌تر نسبت به مدل خطی انتشار خطا در فریم جغرافیایی، دقت بالاتری نیز در توصیف انتشار خطای یک سیستم ناوبری اینرسی دارد.

### ۲. معادلات ناوبری در دستگاه مماسی

با توجه به تعریف دستگاه مماسی، موقعیت جسم در این دستگاه با انتگرال‌گیری از سرعت جسم نسبت به زمین به دست می‌آید. سایر معادلات با استفاده از روابط کلی ناوبری به صورت زیر به دست می‌آید [۲۰]:

$$\dot{p}^t = v_e^t \quad (1)$$

$$\dot{p}^t + \delta \dot{p}^t = v_e^t + \delta v_e^t \quad (18)$$

با استفاده از روابط (۱۸) و (۱)، رابطه (۱۹) حاصل می‌شود:

$$\delta \dot{p}^t = \delta v_e^t \quad (19)$$

با استفاده از روابط (۷)، (۱۱)، (۱۲)، (۱۵) و (۱۶) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{v}_e^t + \delta \dot{v}_e^t = (I - E^t)R_b^t(f^b + \delta f^b) - 2(\Omega_{ie}^t + \delta \Omega_{ie}^t)(v_e^t + \delta v_e^t) + g^t \quad (20)$$

با صرف نظر از ترم‌های غیرخطی متشکل از  $\delta v_e^t \delta \Omega_{ie}^t$ ،  $E^t \delta f^b$  و استفاده از رابطه (۲)، رابطه (۲۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\delta \dot{v}_e^t = -2\delta \Omega_{ie}^t v_e^t - 2\Omega_{ie}^t \delta v_e^t - E^t f^t + R_b^t \delta f^b \quad (21)$$

در این‌جا لازم است،  $\delta \Omega_{ie}^t$  به صورت تابعی از خطای محاسباتی موقعیت، سرعت و وضعیت به دست آورده شود. در بخش پیوست، نشان داده شده است:

$$\omega_{ie}^t = \begin{bmatrix} \cos(la) \cos(az) \omega_{ie} \\ \sin(la) \sin(az) \omega_{ie} \\ \sin(la) \omega_{ie} \end{bmatrix} \quad (22)$$

که در آن،  $la$  و  $az$  به ترتیب، عرض جغرافیایی<sup>۱۳</sup> و آزیموت<sup>۱۴</sup> نقطه پرتاب می‌باشد و  $\omega_{ie} = 15^\circ/h$ ، معرف سرعت دوران زمین است.

با توجه به رابطه (۲۲)، می‌توان نوشت:

$$\delta \omega_{ie}^t = 0 \quad (23)$$

و لذا:

$$\delta \Omega_{ie}^t = 0 \quad (24)$$

ترم  $-E^t f^t$  در رابطه (۲۱)، به صورت زیر نیز قابل بیان است:

$$-E^t f^t = -(\varepsilon^t \times) f^t = (f^t \times) \varepsilon^t \quad (25)$$

با استفاده از روابط (۲۱)، (۲۴) و (۲۵)، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\delta \dot{v}_e^t = -2\Omega_{ie}^t \delta v_e^t + (f^t \times) \varepsilon^t + R_b^t \delta f^b \quad (26)$$

با استفاده از روابط (۸)، (۹)، (۱۰) و (۱۶) نیز خواهیم داشت:

$$-\dot{E}^t R_b^t + (I - E^t) \dot{R}_b^t = (I - E^t) R_b^t (\Omega_{ib}^b - \Omega_{ie}^b + \delta \Omega_{ib}^b - \delta \Omega_{ie}^b) \quad (27)$$

لازم به ذکر است که محاسبه  $\Omega_{ie}^b$  به منظور استفاده در الگوریتم ناوبری، خود متأثر از خطای محاسباتی  $R_b^t$  بوده و لذا با  $\hat{\Omega}_{ie}^b$  نشان داده شده است:

$$\delta \Omega_{ie}^b = \hat{\Omega}_{ie}^b - \Omega_{ie}^b \quad (10)$$

وجود خطا در  $f^b$  و همچنین  $R_b^t$  که مربوط به مرحله قبل است، معادله دوم ناوبری را تحت تأثیر قرار داده و باعث ایجاد خطا در محاسبه  $v_e^t$  می‌گردد. اگر مقدار محاسبه شده این بردار با  $\hat{v}_e^t$  نشان داده شود، رابطه زیر حاصل خواهد شد:

$$\hat{v}_e^t = \hat{R}_b^t \hat{f}^b - 2\hat{\Omega}_{ie}^t \hat{v}_e^t + g^t \quad (11)$$

لازم به ذکر است که بررسی خطای محاسباتی در تعیین  $\Omega_{ie}^t$  در بخش بعد بررسی می‌گردد. در حال حاضر مقدار محاسبه شده این ماتریس در رابطه فوق با  $\hat{\Omega}_{ie}^t$  بیان می‌گردد.

$$\delta \Omega_{ie}^t = \hat{\Omega}_{ie}^t - \Omega_{ie}^t \quad (12)$$

وجود خطا در محاسبه  $v_e^t$  که مربوط به مرحله قبل است، معادله اول ناوبری را تحت تأثیر قرار داده و باعث ایجاد خطا در محاسبه  $p^t$  می‌گردد. اگر مقدار محاسبه شده این بردار با  $\hat{p}^t$  نشان داده شود، رابطه زیر حاصل خواهد شد:

$$\hat{p}^t = \hat{v}_e^t \quad (13)$$

اگر میزان انحراف مقادیر محاسبه شده موقعیت و سرعت ( $\hat{p}^t$ ) و ( $\hat{v}_e^t$ ) از مقادیر واقعیشان ( $p^t$  و  $v_e^t$ ) با نماد  $\delta$  نمایش داده شود، روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$\delta p^t = \hat{p}^t - p^t \quad (14)$$

$$\delta v_e^t = \hat{v}_e^t - v_e^t \quad (15)$$

همچنین از مرجع [۲۰] رابطه زیر استخراج شده است:

$$\hat{R}_b^t = (I - E^t) R_b^t \quad (16)$$

که در آن،  $E^t$  یک ماتریس پادمتقارن متشکل از خطاهای محاسبه وضعیت در دستگاه مماسی به صورت زیر است:

$$E^t = (\varepsilon^t \times) = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_3^t & \varepsilon_2^t \\ \varepsilon_3^t & 0 & -\varepsilon_1^t \\ -\varepsilon_2^t & \varepsilon_1^t & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

که  $\varepsilon^t = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^t \\ \varepsilon_2^t \\ \varepsilon_3^t \end{bmatrix}$ ، بیانگر بردار خطای محاسبه وضعیت در دستگاه مماسی است.

#### ۴. محاسبه معادلات انتشار خطای موقعیت، سرعت و وضعیت

با استفاده از روابط (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) رابطه زیر بدست خواهد آمد:

با استفاده از رابطه (۳)، رابطه (۲۸) بدست می‌آید:

$$-\dot{E}^t R_b^t = (I - E^t) R_b^t (\delta \Omega_{ib}^b - \delta \Omega_{ie}^b) \quad (28)$$

با صرف نظر از ترم‌های غیرخطی متشکل از  $E^t \delta \Omega_{ib}^b$  و رابطه ذیل نوشته می‌شود:

$$\dot{E}^t = -R_b^t (\delta \Omega_{ib}^b - \delta \Omega_{ie}^b) R_b^t \quad (29)$$

رابطه ماتریسی (۲۹) به صورت برداری زیر نیز قابل بیان است:

$$\dot{\varepsilon}^t = -R_b^t (\delta \omega_{ib}^b - \delta \omega_{ie}^b) \quad (30)$$

برای محاسبه  $\delta \omega_{ie}^b$  به صورت زیر عمل می‌شود. اگر مقدار محاسبه شده  $\omega_{ie}^b$  با  $\hat{\omega}_{ie}^b$  نشان داده شود، رابطه ذیل حاصل خواهد شد:

$$\hat{\omega}_{ie}^b = \hat{R}_t^b \omega_{ie}^t \quad (31)$$

و با یک جایگذاری ساده در رابطه (۳۱):

$$\omega_{ie}^b + \delta \omega_{ie}^b = R_b^t (I + E^t) \omega_{ie}^t \quad (32)$$

با ساده‌سازی رابطه فوق:

$$\delta \omega_{ie}^b = R_b^t E^t \omega_{ie}^t = R_b^t (\varepsilon^t \times) \omega_{ie}^t = -R_b^t (\omega_{ie}^t \times) \varepsilon^t \quad (33)$$

به بیان دیگر:

$$\delta \omega_{ie}^b = -R_b^t \Omega_{ie}^t \varepsilon^t \quad (34)$$

با استفاده از روابط (۳۰) و (۳۴)، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\dot{\varepsilon}^t = -\Omega_{ie}^t \varepsilon^t - R_b^t \delta \omega_{ib}^b \quad (35)$$

#### ۴-۱. بیان معادلات انتشار خطا در دستگاه مماسی به صورت فضای حالت

مطابق تعریف رابطه (۳۶)، رابطه (۳۷) حاصل خواهد شد:

$$X = [\delta p^t \quad \delta v_e^t \quad \varepsilon^t]^T, \quad u = [\delta f^{bT} \quad \delta \omega_{ib}^{bT}]^T \quad (36)$$

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (37)$$

که در آن:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & -2\Omega_{ie}^t & (f^t \times) \\ 0 & 0 & -\Omega_{ie}^t \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ R_b^t & 0 \\ 0 & -R_b^t \end{bmatrix} \quad (39)$$

#### ۵. مقایسه تحلیلی روش پیشنهادی و روش متداول

معادلات ناوبری در فریم متداول جغرافیایی برگرفته از [۲۰] صفحات ۱۲۶ الی ۱۳۱، به صورت زیر قابل بیان است:

$$\dot{p}^n = \begin{bmatrix} \frac{v_n}{R_M+h} \\ \frac{v_e}{\cos(\varnothing)(R_N+h)} \\ -v_d \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\dot{v}_e^n = R_b^n f^b - (\Omega_{en}^n + 2\Omega_{ie}^n) v^n + g^n \quad (41)$$

$$\dot{R}_b^n = R_b^n (\Omega_{ib}^b - \Omega_{in}^b) \quad (42)$$

که در آن،  $R_M$  و  $R_N$  شعاع‌های زمین بیضوی ۱،  $\varnothing$  و  $h$  به ترتیب، عرض جغرافیایی و ارتفاع جسم از سطح زمین می‌باشند. سایر پارامترها با توجه به شباهت آن‌ها با پارامترهای بخش دو، قابل تشخیص می‌باشند. روابط فوق و دسته معادلات (۱)، (۲) و (۳) در نظر گرفته شود.

تفاوت قابل ملاحظه‌ای بین معادله (۱) و معادله نظیر آن یعنی (۴۰) به چشم می‌خورد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، رابطه (۴۰) نسبت به موقعیت در دستگاه جغرافیایی، غیرخطی است. این امر موجب می‌شود که در استخراج معادلات خطی انتشار خطا، مجبور به یک فرایند خطی‌سازی گردیم که نتیجه آن کاهش دقت در توصیف چگونگی انتشار خطا خواهد بود. حال آن‌که با توجه به رابطه (۱)، به دلیل عدم وجود ارتباط غیرخطی، هیچ‌گونه تقریبی در استخراج سه معادله اول انتشار خطا وجود نخواهد داشت. یکی دیگر از پیامدهای عدم ارتباط غیرخطی، سادگی چشمگیر سه معادله اول انتشار خطا در فریم پیشنهادی نسبت به فریم جغرافیایی است که کار با آن را آسان‌تر می‌کند.

با مقایسه معادلات (۲) و نظیر آن یعنی (۴۱)، نیز تفاوت مهمی دیده می‌شود. برای استخراج معادلات انتشار خطا در (۴۱)، علاوه بر احتیاج به  $\Omega_{en}^n$  و  $\Omega_{ie}^n$ ، نیازمند محاسبه  $\delta \Omega_{en}^n$  و  $\delta \Omega_{ie}^n$  نیز هستیم که توابع پیچیده‌ای بوده و یک فرایند خطی‌سازی را نیز تحمیل می‌کند که خود باعث کاهش دقت است. حال آن‌که در معادله (۲)، فقط به  $\Omega_{ie}^t$  نیاز می‌باشد و همان‌طور که در محاسبات قبلی نشان داده شد  $\delta \Omega_{ie}^t = 0$ . با توجه به توضیحات فوق، در این بخش از معادلات انتشار خطای فریم پیشنهادی نیز، علاوه بر سادگی بیش‌تر، دقت بالاتری خواهد داشت.

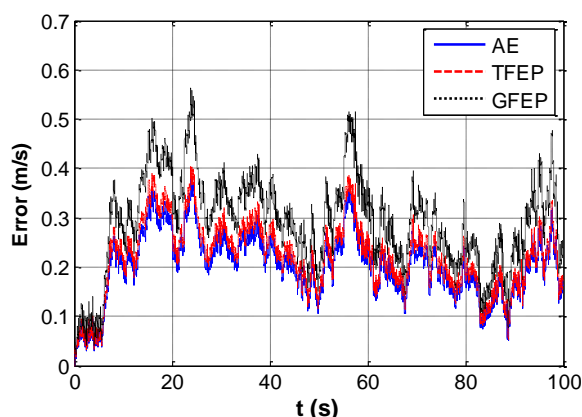
سرانجام، روابط (۳) و (۴۲) با یکدیگر مقایسه می‌شوند. در این بخش نیز، هنگام محاسبه معادلات انتشار خطا در دستگاه جغرافیایی، نیازمند  $\delta \omega_{in}^n$  می‌باشد که علاوه بر پیچیدگی محاسباتی نیازمند خطی‌سازی و به دنبال آن کاهش دقت خواهد بود. حال آن‌که در مورد فریم مماسی،  $\delta \omega_{ie}^b$  مورد نیاز است که محاسبه آن ساده بوده و احتیاجی به خطی‌سازی نیز ندارد.

## Geographic Frame Error Propagation مخفف GFEP

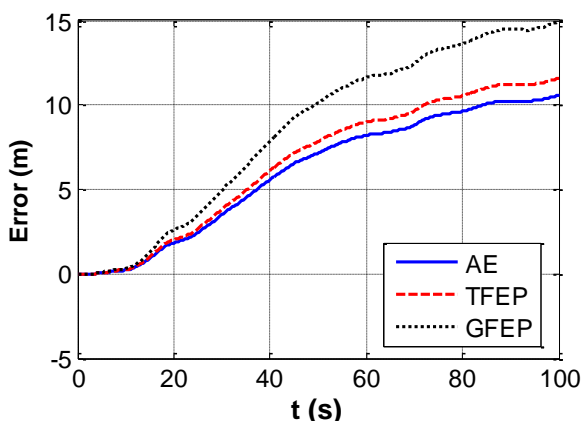
نمایش داده شده است.

در دستگاه مماسی:

مشابه فریم جغرافیایی، مراحل ۱ تا ۳ انجام گرفته و مرحله ۴ با استفاده از مدل مستخرج از این مقاله انجام شده و نتایج حاصل از آن در شکل‌های (۱) تا (۴) با عنوان TFEP مخفف Tangent Frame Error Propagation رسم شده است. همان‌طور که نتایج شبیه‌سازی‌ها به وضوح نشان می‌دهند، معادلات انتشار خطا در فریم مماسی، دقت بالاتری در توصیف انتشار خطا داشته و انطباق خوبی بین خطاهای واقعی و خروجی مدل وجود دارد. در مورد فریم جغرافیایی، مشاهده می‌شود که خطای واقعی چه در بخش سرعت و چه در بخش موقعیت، از خروجی مدل فاصله بیشتری داشته و در نتیجه، استفاده از آن در ناوبری تلفیقی باعث ایجاد خطاهای بیشتر خواهد شد.



شکل ۱. مقایسه نرم خطای بردار سرعت واقعی با خطای مستخرج از مدل-های انتشار خطا



شکل ۲. مقایسه خطای موقیت واقعی راستای اول با خطای مستخرج از مدل‌های انتشار خطا

## ۶. نتایج شبیه‌سازی

به منظور صحت‌گذاری نتایج تحلیلی به دست آمده از بخش قبل، یک نمونه شبیه‌سازی برای مقایسه دقت مدل‌های انتشار خطا در فریم‌های جغرافیایی و مماسی انجام گرفته است.

مقادیر واقعی شتاب و سرعت زاویه‌ای در دستگاه بدنی، به صورت فرضی زیر مقداردهی شده‌اند:

$$f^b = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ 2 \sin(t) \\ 3 \sin(t) \end{bmatrix}, \Omega_{ib}^b = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ 2 \cos(t) \\ 3 \cos(t) \end{bmatrix}$$

برای اجرای شبیه‌سازی و امکان انجام مقایسه به صورت زیر عمل شده است.

در دستگاه جغرافیایی:

ابتدا، الگوریتم ناوبری در این فریم، بدون در نظر گرفتن خطای سنسورها، انجام گرفته و نتایج، ذخیره شده است.

سپس همین الگوریتم، با در نظر گرفتن خطای تصادفی سنسورها، اجرا شده و نتایج آن ذخیره شده است.

مدل در نظر گرفته شده برای خطای تصادفی سنسورها شامل نویز و دریفت برگرفته از IMU مدل 3DM-GX3-25 به صورت زیر است:

چگالی خطای تصادفی (نویز و دریفت) شتاب‌سنج‌ها برابر  $80 \mu g / \sqrt{Hz}$  (معادل انحراف معیار  $0.016 m/s^2$ )

چگالی خطای تصادفی (نویز و دریفت) ژيروسکوپ‌ها برابر  $0.03 \text{ } ^\circ/s / \sqrt{Hz}$  (معادل انحراف معیار  $0.01 rad/s$ )

اختلاف خروجی‌های مراحل ۱ و ۲ به عنوان خطای واقعی، ذخیره شده و برای پرهیز از زیاده‌نویسی، به عنوان نمونه نرم خطای بردار سرعت در شکل (۱) و خطای موقعیت سه راستا در شکل‌های (۲)، (۳) و (۴) با عنوان AE مخفف Actual Error نمایش داده شده است. لازم به یادآوری است که به منظور جلوگیری از بروز اثر خطای ناشی از شرایط اولیه، شرایط اولیه مراحل ۱ و ۲، یکسان در نظر گرفته شده است. همچنین، بیان تمامی بردارها در دستگاه اینرسی انجام شده است تا امکان مقایسه وجود داشته باشد.

مدل انتشار خطای فریم جغرافیایی، برگرفته از [۳۱]، صفحه ۱۷۹، شبیه‌سازی شده و نرم خطای بردار سرعت در شکل (۱) و خطای موقعیت سه راستا در شکل‌های (۲)، (۳) و (۴) با عنوان

مماسی، به دلیل تقریب‌های کمتری که هنگام استخراج آن زده شده است، ضمن سادگی بیش‌تر با دقت بالاتری خطای ناوبری را توصیف می‌کند. بنابراین، هنگام تلفیق INS با یک مرجع بیرونی مدلی با قابلیت اطمینان بالاتر بوده و لذا در بهبود دقت سیستم ناوبری تلفیقی، تأثیر مستقیم خواهد داشت.

پیشنهاد اولی که برای کارهای آتی می‌توان ارائه کرد آن است که معادلات خطا در دستگاه‌های دیگر نیز پس از استخراج، خطی‌سازی شده و از نظر دقت توصیف خطا به صورت تحلیلی و شبیه‌سازی مقایسه گردند. پیشنهاد دیگر آن است که اثر عوامل دیگر بروز خطا مانند نحوه نصب سنسورها، زوایای اویلر، حالت اولیه و ... نیز در استخراج مدل خطی انتشار خطا لحاظ گردیده و عمل تحلیل و مقایسه در حضور آن‌ها صورت گیرد.

### ۸. پیوست

برای محاسبه  $\omega_{ie}^t$  ابتدا  $R_e^t$  را محاسبه می‌کنیم. با توجه به تعاریف فریم‌های اینرسی (i) و زمینی (e)، خواهیم داشت:

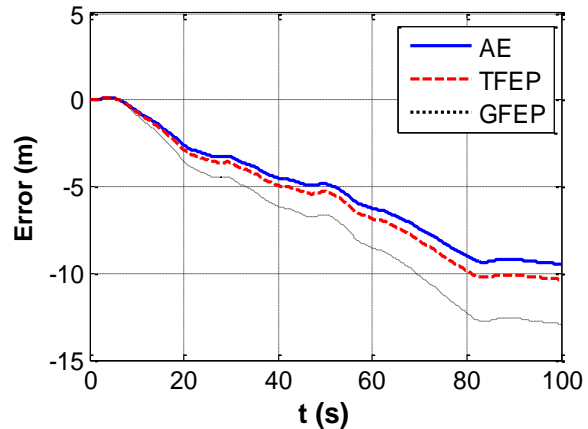
$$R_e^t = (R_i^e R_t^i)^T = \begin{bmatrix} \cos E & -\sin E & 0 \\ \sin E & \cos E & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -\sin(la) \cos(az) & -\sin(la) \sin(az) & \cos(la) \\ \sin(az) & -\cos(az) & 0 \\ \cos(la) \cos(az) & \sin(la) \sin(az) & \sin(la) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} * & * & \cos(la) \cos(az) \\ * & * & \sin(la) \sin(az) \\ * & * & \sin(la) \end{bmatrix}$$

که در آن،  $la$  عرض،  $az$  به ترتیب عرض، طول و آزیموت نقطه مرجع، می‌باشد.

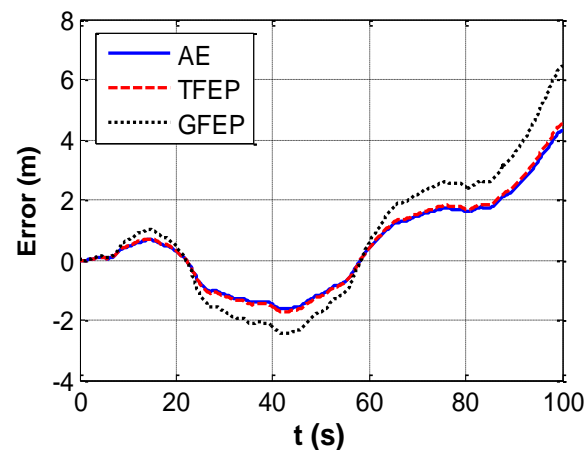
بنابراین:

$$\omega_{ie}^t = R_e^t \omega_{ie}^e = \begin{bmatrix} * & * & \cos L \cos A \\ * & * & \sin L \sin A \\ * & * & \sin L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{ie} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(la) \cos(az) \omega_{ie} \\ \sin(la) \sin(az) \omega_{ie} \\ \sin(la) \omega_{ie} \end{bmatrix}$$

[1] R. Kenneth, Sc. D. Britting, Inertial navigation System analysis, New York: Wiley, 1971.  
 [2] R.G. Brown. Kalman filter modeling, In Proceedings of the 16th Annual Precise Time and Time Interval (PTTI) Applications and Planning Meeting, pp. 261–272, 1984  
 [3] R.G. Brown, Integrated navigation systems and Kalman filtering: A perspectiv. Navigation,



شکل ۳. مقایسه خطای موقت واقعی راستای دوم با خطای مستخرج از مدل‌های انتشار خطا



شکل ۴. مقایسه خطای موقت واقعی راستای سوم با خطای مستخرج از مدل‌های انتشار خطا

### ۷. نتیجه‌گیری

هدف اولیه این مقاله بهبود کارایی سیستم ناوبری تلفیقی<sup>۱۵</sup> از طریق افزایش دقت مدل انتشار خطا است. در این مقاله معادلات خطی‌شده انتشار خطا در دستگاه مماسی استخراج شده و نقاط قوت آن در قیاس با معادلات خطی‌شده دستگاه جغرافیایی از طریق تحلیل و شبیه‌سازی برشمرده شده است. همان‌طور که از نتایج تحلیلی و شبیه‌سازی‌ها پیداست، مدل انتشار خطا در فریم

### ۹. مأخذ

Journal of the Institute of Navigation, Vol. 19, No. 4, pp. 355–362, 1972  
 [4] R. G. Brown, Y. C. Hwang, Introduction to random signals and applied Kalman filtering, Second Edition, New York: Wiley, 1992.  
 [5] G. J. Geier, Delayed state Kalman filter equations for delta range measurement processing, Technical Report GPSFPF, Cambridge, 1976.

- [6] M. S. Grewal, A. P. Andrews, Kalman Filtering: Theory and Practice using Matlab, Second Edition, New York: Wiley, 2001.
- [7] P. Hwang, R. Brown, GPS navigation: Combining pseudorange with continuous carrier phase using a Kalman filter. Navigation, Journal of the Institute of Navigation, Vol. 37, No. 2, pp. 181–196, 1990.
- [8] C. W. Marquis, Integration of differential GPS and inertial navigation using a complementary Kalman filter, Master's thesis, Naval Postgraduate School, 1993.
- [9] D. Simon, Optimal State Estimation: Kalman,  $H_{\infty}$ , and Nonlinear Approaches, New York: Wiley, 2006.
- [10] A. Van Dierendonck, J. McGraw, and R. Brown, Relationship between Allan variances and Kalman filter parameters, In Proceedings of the 16th Annual Precise Time and Time Interval (PTTI) Applications and Planning Meeting, pp. 273-293, 1984.
- [11] Y. Yang, J. A. Farrell, Two antennas GPS-aided INS for attitude determination, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 11, No. 6, pp.905–918, 2003.
- [12] C. W. Marquis, Integration of differential GPS and inertial navigation using a complementary Kalman filter, Master's thesis, Naval Postgraduate School, 1993.
- [13] F. Van Graas and M. Braasch, GPS interferometric attitude and heading determination: Initial flight test results. Navigation: Journal of the Institute of Navigation, Vol. 38, No. 4, pp.297–316, 1991.
- [14] A. Van Dierendonck, S. Russell, E. Kopitzke, M. Birnbaum, The GPS navigation message, Navigation: Journal of the Institute of Navigation, Vol. 25, No. 2, pp. 147-165, 1978.
- [15] D. Pietraszewski, J. Spalding, C. Viehweg, L. luft, U.S. Coast Guard differential GPS navigation field test findings, Navigation: Journal of the Institute of Navigation, Vol. 35, No. 1, pp. 55-72, 1988.
- [16] W. S. Widnall and P. A. Grundy, Inertial navigations system error models, Technical Report, Intermetrics Inc, 1973.
- [17] R. E. Mortenson, Strapdown guidance error analysis, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 10, No. 4, pp.451–457, 1994.
- [18] Y. F. Jiang, Y. P. Lin, Error estimation of INS ground alignment through observability analysis, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 28, No. 1, pp.92–96, 1992.
- [19] R. G. Brown, D. J. Winger, Error analysis of an integrated inertial/Doppler-satellite system with continuous and multiple satellite coverage, Technical report, Engineering Research Institute, Iowa State University, January 1971.
- [20] C. Jekeli, Inertial Navigation Systems with Geodetic Applications, Walter de Gruyter Berlin, New York, 2001.
- [21] A. Barrau, S. Bonnabel, A Mathematical Framework for IMU Error Propagation with Applications to Preintegration, IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 2020
- [22] J. Zhang, J. Li, Y. Huang, C. Hu, K. Feng and X. Wei, Analysis and Compensation of Installation Errors for Rotating Semi-Strapdown Inertial Navigation System, IEEE Access, Vol. 7, pp. 101019-101030, 2019.
- [23] H. Xiong, D. Dai, Y. Zhao, X. Wang, J. Zheng, D. Zhan, An Analysis of the Attitude Estimation Errors Caused by the Deflections of Vertical in the Integration of Rotational INS and GNSS, Sensors, Vol.19, No. 7, 2019.
- [24] X. Zheng, N. Ma, C. Gao, W. Jing, Propagation mechanism analysis of navigation errors caused by initial state errors for long-range vehicles, Aerospace Science and Technology, Vol. 67, pp. 378-386, 2017
- [25] X. Liu, X. Xu, Y. Liu, L. Wang, A Method for SINS Alignment with Large Initial Misalignment Angles Based on Kalman Filter with Parameters Resetting, Mathematical Problems in Engineering, Open Access, Vol. 2014, 2014.
- [26] J. Li, P. Dang, Y. Li, B. Gu, A General Euler Angle Error Model of Strapdown Inertial Navigation Systems, Applied Sciences, Vol. 8, No. 1, 2018.
- [27] Z. Long-Jie, X. Xiao-fang, L. De-dong, W. Yan, Error Analysis of Strapdown Inertia Navigation System in Tactical Missiles, Procedia Engineering, Vol. 15, pp. 1456-1460, 2011
- [28] C. Huang, G. Yi, Q. Zeng, N. Yi, The establishment and analysis of the high-order error model of platform inertial navigation system in mobile conditions, 35th Chinese Control Conference (CCC), 2016.
- [29] X. Liu, J. Sima, Y. Huang, X. Liu, P. Zhang, A Simplified Kalman Filter for Integrated Navigation System with Low-Dynamic Movement, Mathematical Problems in Engineering, Vol. 2016, 2016.
- [30] H. Rahimi, A. A. Nikkhah, Improving the speed of initial alignment for marine strapdown inertial navigation systems using heading control signal feedback in extended Kalman filter, International Journal of Advanced Robotics Systems, Vol. 17, No. 1, 2020.
- [31] E. bekir, Introduction to Modern Modern Navigation Systems, World Scientific Publishing, Singapore, 2007.

- 
1. Navigation Error Propagation Equations
  2. Tangent Frame
  3. Geographic Frame
  4. Kalman Filter
  5. Integration
  6. Global Positioning System
  7. Earth Frame
  8. Inertial Frame
  9. Body Frame
  10. Contact Forces
  11. Asymmetric Matrixes
  12. Stochastic
  13. Latitude
  14. Azimuth
  15. Integrated Navigation System