طراحی مدار انتقال LEO به ماه با استفاده از نقاط لاگرانژی سیستم زمین- ماه در حضور اغتشاشات

رضا زردشتی[1]، حسین کردجزی[2]، ابراهیم صبوری دارابی[3]

۱ استادیار، مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک‌اشتر، تهران، rezazardashti@dena.kntu. ac.ir

۲ کارشناس ارشد، مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک‌اشتر، تهران

۳ کارشناس ارشد، مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک‌اشتر، تهران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۲/۱۱

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۶/۲۵

چکیده

در این مقاله با استفاده از دینامیک مسئله سه جسم و نقاط لاگرانژی سیستم زمین- ماه، به بررسی مسیرهای بهبودیافته در حضور اغتشاشات برای رسیدن از یک مدار LEO به مداری در نزدیکی ماه به نام لونار پرداخته شده است. برای این منظور، نقطه لاگرانژی L_1 در سیستم مزبور به دلیل موقعیت مناسب، نقش واسطه را برای انتقال مورد نظر ایفا می کند، بدین صورت که ابتدا معادلات حرکت سه جسم محدود برای رسیدن از مدار LEO به مجاورت L_1 و سپس برای رفتن از مدار لونار به L_1 حل می گردد، در نهایت از ویژگی مدارهای پریودیک حول L_1، برای اتصال دو مسیر استفاده می‌شود تا مسیر یکپارچه مورد نظر حاصل شود. در ادامه و به منظور نزدیک شدن به شرایط واقعی مسئله، مدل اغتشاشات نیز به معادلات حرکت مسئله سه جسم محدود اضافه می‌گردند تا تأثیر آن در نتایج حاصله مورد بررسی قرار گیرد. نتایج شبیه سازی نشان می دهد که ایمپالس مورد نیاز جهت انتقال مورد نظر، حتی در حضور اغتشاشات نیز بهتر از روش هوهمان بدست می‌آید.

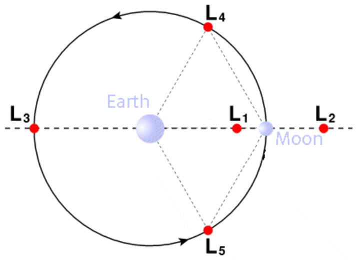
واژگان کلیدی

مسئله سه جسم محدود، نقاط لاگرانژی، سیستم زمین- ماه، مسیرهای بهبودیافته، اغتشاشات.

۱. مقدمه

نقاط لاگرانژی، نقاطی در فضا هستند که برآیند نیروهای گرانشی دو جسم بزرگ مانند زمین و خورشید یا زمین و ماه با نیروی گریز از مرکز جسم سوم و بسیار کوچکتری مانند فضاپیماها برابری می‌کند. این برهم کنش نیروها نقاط ثابت و پایداری را ایجاد می‌کنند که فضاپیما می‌تواند با قرار گرفتن در آن، مأموریت مشاهده را انجام دهد. اگر سیستم زمین- ماه در نظر گرفته شود، مطابق شکل۱، پنج نقطه‌ی لاگرانژی L_1 تا L_5 در اطراف آنها وجود خواهد داشت. نقاط لاگرانژی L_4 و L_5 در شعاع گردش ماه به دور زمین قرار دارند. L_4، ۶۰ درجه بالای ماه و L_5، ۶۰ درجه زیر آن قرار دارد [۱]. اگر یک نقطه تعادل پایدار باشد، در صورتی

که جرم کوچکی که این نقطه را اشغال می‌کند حرکت کرده و خارج از موقعیت خود قرار گیرد، مجدداً تمایل به بازگشت به آن نقطه خواهد داشت. این انحراف، نوسانات کمتری را برای نقاط تعادل به همراه خواهد داشت. بنابراین، می‌توان اجسام را در مدارهای کوچکتری که مدارهای هاله[1] نامیده می‌شوند در اطراف نقاط تعادل پایدار قرار داد، بدون اینکه نیاز به تثبیت مداری[2] باشد. به عبارت دیگر، اگر یک جسم بر روی یک نقطه تعادل ناپایدار قرار گیرد که دارای تغییرات حرکتی ناچیزی است، نوسانات مربوط به آن به طرق متفاوتی صورت می‌پذیرد و در نهایت کاملاً از آن نقطه منحرف می‌شود. این مطلب نشان می‌دهد که نقاط لاگرانژی L_1، L_2 و L_3 بر روی محور اصلی، پایدار نیستند؛ در حالیکه اگر نسبت m_1/m_2 در سیستم زمین– ماه از ۸/۱۳ بیشتر شود، نقاط لاگرانژ L_4 وL_5 پایدار هستند. با این وجود، L_4 وL_5 به دلیل اثر جاذبه خورشید از حالت ثبات خارج می‌شوند، به همین منظور در واقعیت برای حفظ موقعیت در نزدیکی این نقاط در سیستم زمین– ماه نیاز به تثبیت مداری خواهد بود، البته باید توجه داشت مقدار ایمپالس[3] موردنیاز برای تثبیت مداری در مقایسه با ایمپالس کل بسیار ناچیز می‌باشد [۲]. در مقاله [۳]، پایداری نقاط لاگرانژ در سیستم زمین– خورشید مبتنی بر مسئله سه جسم محدود مرور شده است.



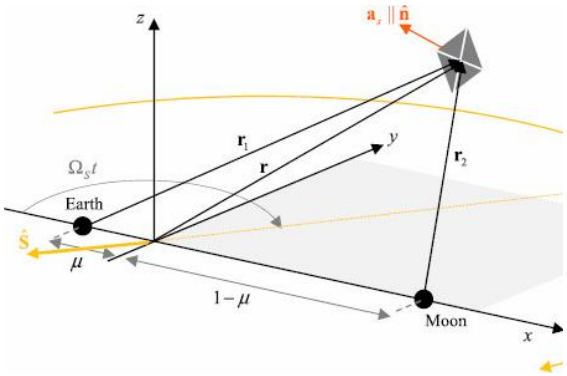
شکل ۱. موقعیت پنج نقطه لاگرانژی در سیستم زمین – ماه[۱].

به دلیل دارا بودن ویژگی های تعادلی، استفاده از نقاط لاگرانژی در انجام مأموریت های فضایی مورد توجه قرار گرفته است و تاکنون تحقیقات زیادی در این زمینه انجام گرفته است، از آن جمله در سال ۲۰۰۶ آقای پارکر در مقاله‌ای نشان داد که چگونه می‌توان با استفاده از روش سیستم‌های دینامیکی خانواده ای از انتقال بالستیک کم انرژی را به مدار هاله لونار ایجاد کرد [۴]. در سال ۲۰۰۸ بار دیگر آقای پارکر با انجام تحقیقی به بررسی انتقال‌های دو ضربه ای برای انتقال از مدار LEO به مدار هاله حول نقاط لاگرانژی L_1 و L_2 سیستم زمین– ماه پرداخت [۵]. در سال ۲۰۱۰ شخصی به نام ازیمک در مقاله‌ای به بررسی انتقال‌هایی از مدارهای پارکینگ زمین به مجاورت مدارهای متفاوت حول نقاط لاگرانژی L_1 و L_2 سیستم زمین– ماه پرداخت [۶]. همچنین در سال ۲۰۱۰ خانم آلسی با انتشار مقاله‌ای مسیرهای انتقال از مدار LEO به مدارهای شبه پریودیک لیساجو حول نقاط لاگرانژ L_1 و L_2 سیستم زمین– ماه را بدست آورد[۷]. این انتقال شامل دو مانور می باشد که یکی در مدار LEO و دیگری برای قرار گرفتن در مدار لیساجو و یا یک منیفلد پایدار به کار می رود. در سال ۲۰۱۲ ولما به بررسی بیشتر استفاده از نقاط لاگرانژ به منظور عملیات بررسی و سکونت آینده در ماه پرداخت[۸]. تحقیقات این مقاله نشان می دهد، فواید زیاد نقاط لاگرانژی، مدارها و منیفولدهای پیرامون آن، این نقاط را به عنوان گزینه های مناسبی برای مأموریت های جدید قرار داده است، به طوری که می‌توان از آن ها به عنوان یک مسئله جذاب و جدید برای انتقال از زمین به ماه استفاده کرد. در سال ۲۰۱۵ آقای چانگ در مقاله‌ای انتقال به نزدیکی نقاط لاگرانژی سیستم زمین– ماه با استفاده از دو روش مسئله سه جسم محدود دایروی و مسئله ی دو دایره را بررسی کرد [۹]. در مقاله مزبور از سه راه حل تحلیلی برای حل معادلات حرکت حول نقاط لاگرانژی بدین منظور استفاده شده است، انتقال مستقیم، انتقال با استفاده از جاذبه ماه و انتقال با استفاده از جاذبه خورشید و در آخر از راه حل انتقال با انرژی کم در مدل مسئله دو دایره با رویکرد عددی استفاده شده است. نتایج این تحقیق نشان می دهد که ایمپالس کل موردنیاز برای انتقال با استفاده از روش جاذبه ماه و خورشید کاهش می‌یابد، اگرچه زمان انتقال افزایش پیدا می‌کند. همچنین در این مقاله نشان داده شده است که روش انتقال با انرژی کم به دلیل زمان طولانی انتقال فقط برای مأموریت های بدون سرنشین مناسب می باشد. در تحقیق حاضر، علاوه بر شبیه سازی انتقال به مدارهای حول نقاط لاگرانژی، به بررسی و شبیه‌سازی یک مأموریت جدید یعنی انتقال از مدار حول زمین به ماه با استفاده از ویژگی نقاط لاگرانژی پرداخته شده است. علاوه بر آن به منظور دقیق‌تر شدن نتایج حاصل از شبیه‌سازی، ترم‌های اغتشاشی نیز لحاظ شده است. در زمینه اغتشاشات تا به حال تحقیقاتی انجام گرفته است که از آن جمله می‌توان به مقاله آقای النا که در سال ۲۰۰۳ منتشر شد اشاره کرد [۱۰]، در این مقاله با اضافه کردن

ترم‌های اغتشاشی به تابع همیلتونین[۴] متناظر با حرکت ماهواره، به بررسی رفتار تحلیلی اغتشاشات تشعشع خورشیدی و همچنین پخی زمین[۵] پرداخته شده است، همچنین در سال ۲۰۱۳ آقای عدنان و دوستان ایشان، در مقاله‌ای به مطالعه تأثیر اغتشاشات اعم از جاذبه خورشید و ماه و همچنین اثر پخی زمین، درگ و... بر روی ماهواره با استفاده از روش کوئل[۶] پرداخته‌اند [۱۱]. نتیجه حاصل از این مقاله نشان می‌دهد که اغتشاشات بدست آمده برای زمان یک ساعت حرکت در مدار مقدار قابل‌توجهی بوده و برای انجام محاسبات دقیق، قابل صرف نظر کردن نیست. مقاله حاضر شامل چند بخش اصلی است، در بخش نخست به بررسی دینامیک مسئله سه جسم محدود پرداخته شده و معادلات حرکت در این سیستم بدست آمده است. به کمک این معادلات مکان نقاط لاگرانژ مشخص می گردد، سپس راه حل مناسبی برای تولید مدارهای هاله حول نقاط تعادلی بدست می‌آید. در بخش دوم، شبیه سازی معادلات بدست آمده از بخش اول انجام می گردد. بدین منظور انتقال از LEO به ارتفاع ۱۸۵ کیلومتر و دارای شیب مداری بین ۰ تا ۵۰ درجه به مدار لونار قطبی به ارتفاع ۱۰۰ کیلومتر مورد بررسی قرار گرفته و مسیرهای بهبود یافته به ازای شرایط اولیه مناسب بدست می‌آید و در بخش آخر روابط مربوط به اغتشاشات وارد بر فضاپیما به معادلات حرکت اضافه می گردد تا تأثیر آن بر روی محاسبات بررسی شود.

۲. مسئله سه جسم محدود

در این مسئله جسم اصلی بزرگ با جرم μ − ۱ در مکان (μ,۰) و جسم اصلی کوچک با جرم μ در مکان (μ − ۱,۰) قرار دارند. شکل ۲ گویای این مسئله است. پارامتر μ که پارامتر جاذبه می‌باشد برای سیستم زمین– ماه برابر است با ۰/۰۱۲۱۵۰۵۸.



شکل۲. نمایی از مسئله سه جسم محدود سیستم زمین–ماه

در این صورت معادلات مسئله سه جسم محدود به صورت زیر نوشته می‌شوند [۱۲]:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \qquad (۱)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} \qquad (۲)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial \Omega}{\partial z} \qquad (۳)$$

که در این روابط:

$$\Omega(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu) \qquad (۴)$$

و هم چنین:

$$r_1 = \sqrt{(x-\mu)^2 + y^2 + z^2} \qquad (۵)$$

$$r_2 = \sqrt{(x-\mu+1)^2 + y^2 + z^2} \qquad (۶)$$

به این شکل از مسئله سه جسم محدود، مدل RTBP[۷] می‌گویند. در این مدل همه پارامترها اعم از فاصله، سرعت و زمان می‌بایست بی بعد باشند. برای بی بعد کردن پارامترهای مذکور از روابط زیر استفاده می‌شود [۲]:

$$d' = Ld \qquad (۷)$$

$$s' = Vs \qquad (۸)$$

$$t' = \frac{T}{2\pi}t \qquad (۹)$$

L فاصله بین مرکز جرم ماه و زمین می باشد که برابر با ۳۸۴۴۰۰ کیلومتر است. V سرعت مداری جسم بزرگتر یعنی زمین و برابر با ۱/۰۲۵کیلومتر بر ثانیه می باشد و T پریود مدار اجسام اصلی در مسئله سه جسم محدود می‌باشد که برابر با ۱۰^۶ × ۲/۳۶۱ ثانیه است.

۳. نقاط لاگرانژ

گرچه معادلات حرکت مسئله ی سه جسم حل تحلیلی ندارند، اما می‌توان از آنها برای تعیین موقعیت نقاط تعادلی استفاده کرد. نقاط تعادلی لاگرانژ با شرایط زیر تعریف می‌گردند [۱]:

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0 \ \& \ \ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0 \qquad (۱۰)$$

بنابراین با حل معادلات ۱ تا ۳ و با در نظر گرفتن معادله ۱۰، پنج نقطه‌ی تعادلی به صورت زیر به دست می آیند:

در این روابط m_1 جرم زمین و m_2 جرم ماه می باشد. با انجام محاسبات فوق محل پنج نقطه لاگرانژ در سیستم زمین–ماه به صورت نشان داده شده در شکل ۱ بدست می‌آید.

۴. اصول شبیه سازی

برای انجام شبیه‌سازی، مسئله به سه مرحله اصلی تقسیم می‌گردد. در مرحله اول با حل معادلات مسئله سه جسم محدود یا RTBP شرایط اولیه قابل قبول در مدار لونار مشخص می‌شود که فضاپیما قادر است به ازای آنها پس از مدت زمان مشخص به صورت رو به عقب به مجاورت نقطه L_1 برسد. در مرحله دوم همان مرحله قبل تکرار می‌شود با این تفاوت که این بار شرایط اولیه در مدار LEO و به صورت رو به جلو تعیین می گردد. در مرحله نهایی نیز با استفاده از مدار هاله حول نقطه تعادلی L_1، مسیر پروازی های بدست آمده از دو مرحله قبل به یکدیگر متصل می شوند.

۴-۱. حل معادلات حرکت از مدار لونار به سمت نقطه L_1

در مرحله اول با حل معادلات حرکت در مختصات RTBP، شرایط اولیه مناسب برای انتقال از مدار لونار به مجاورت نقطه L_1 به ازای Δv های مختلف مشخص می گردد. در این حالت معادلات به صورت رو به عقب حل می‌گردند زیرا هدف، پیدا نمودن مسیرهایی است که از مجاورت نقطه L_1 به سمت مدار لونار می آیند. برای مشخص نمودن موقعیت فضاپیما در یک مدار دایروی حول ماه تنها کافی است شعاع یا پریود مدار به همراه سه زاویه موجود باشد. این زوایا عبارتند از: شیب مدار نسبت به صفحه دایره البروج (i)، زاویه بین جهت مثبت محور X تا خط گره صعودی مدار در صفحه دایره البروج ($Z = 0$) و در نهایت زاویه پادساعتگرد بین خط گره صعودی تا بردار موقعیت ماهواره (طول جغرافیایی حقیقی، ω_{true}) یا ω. برای پیدا نمودن شرایط اولیه در مختصات RTBP ابتدا می‌بایست تبدیل مختصات بین دستگاه مختصات مداری و زمین مرکز و سپس از زمین مرکز به RTBP انجام شود [۱]. در نهایت شرایط اولیه در مختصات زمین مرکز به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \phi_{IJK}^{PQW} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ W \end{bmatrix} \quad (۱۱)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \phi_{IJK}^{PQW} \begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{W} \end{bmatrix} \quad (۱۲)$$

بردار سرعت و مکان در دستگاه مختصات مداری را نیز می‌توان با استفاده از روابط زیر بدست آورد:

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ W \end{bmatrix} = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1+e\cos\theta} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۱۳)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{W} \end{bmatrix} = \frac{\mu}{h} \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ e+\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۱۴)$$

برای محاسبه سرعت مدار لونار نیز از رابطه زیر استفاده می‌گردد:

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad (۱۵)$$

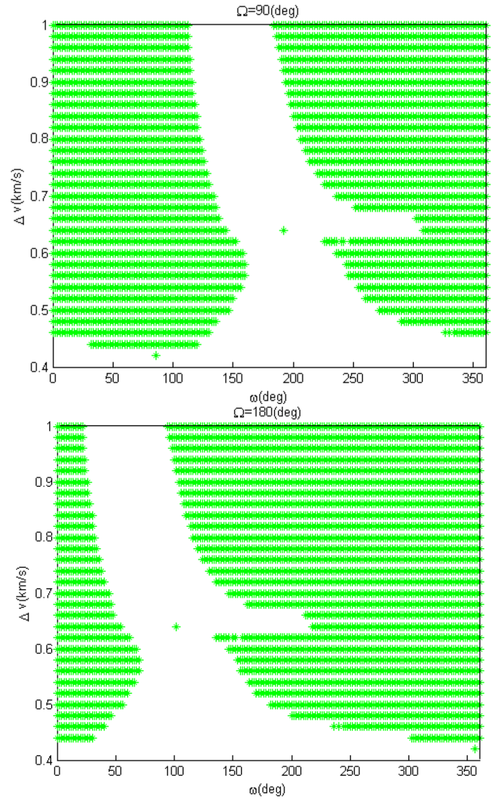
سرانجام برای انتقال به دستگاه RTBP کافی است مقدار $1-\mu$ به مؤلفه x اضافه شود.

حال شرایط اولیه برای حل معادلات مسئله سه جسم محدود در اختیار می باشد. در ادامه می‌توان معادلات حرکت را تا نزدیکی L_1 حل کرد. برای این کار از ایمپالس Δv و حداکثر زمان ۱۰ روز استفاده می گردد. برای اطمینان از اینکه فضاپیما به مجاورت نقطه لاگرانژ رسیده باشد، می‌توان از ناحیه مرزی نقطه مزبور موسوم به ناحیه پوانکاره استفاده نمود [۲]. لذا حل معادلات تا جایی ادامه می‌یابد که فضاپیما به این محدوده برسد. این محاسبات در نقاط مختلف مدار لونار انجام می‌شود، یعنی همه ωهای مختلف در نظر گرفته می‌شود و در تمام این نقاط Δvهای متفاوت اعمال می گردد. سپس زوج $(\omega, \Delta v)$هایی که فضاپیما طی کمتر از ۱۰روز در آن نقاط به محدوده پوانکاره می‌رسند انتخاب می‌شوند. نقطه L_1 سیستم زمین–ماه در مدل RTBP در نقطه (۰/۸۳۶۹۶۶۱۰۲,۰–) واقع است. ناحیه پوانکاره ای در فاصله ۲۰۰۰۰ کیلومتری سمت چپ نقطه L_1 در نظر گرفته می‌شود که این نقطه روی محور xها در دستگاهRTBP، به صورت زیر خواهد بود:

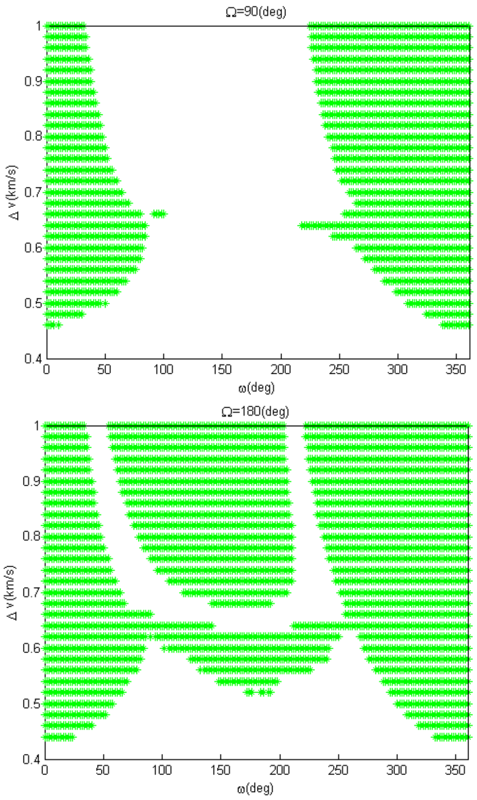
$$x = -0.888995238 \quad (۱۶)$$

با حل معادلات حرکت در مسئله سه جسم محدود می‌توان زوج $(\omega, \Delta v)$هایی که به وسیله آنها می‌توان در کمتر از ۱۰ روز به محدوده پوانکاره رسید، رسم کرد. ω بین صفر تا ۳۶۰ درجه و Δv بین ۰/۴ تا ۱ کیلومتر بر ثانیه در نظر گرفته می‌شود. در شکل۳ زوج $(\omega, \Delta v)$هایی که در کمتر از ۱۰ روز در $i = ۰$ درجه، به محدوده پوانکاره رسیده اند رسم شده اند. در این نمودارها نواحی سبز رنگ نواحی مجاز را نشان می دهد و همانطور که از این شکل ها پیداست، می‌توان در یک ω خاص با ایمپالس های متفاوتی به محدوده پوانکاره رسید که در این صورت تفاوت در هر حالت، زمان رسیدن به محدوده پوانکاره خواهد بود. با مشاهده نمودارهای زیر می‌توان نتیجه گرفت رفتار

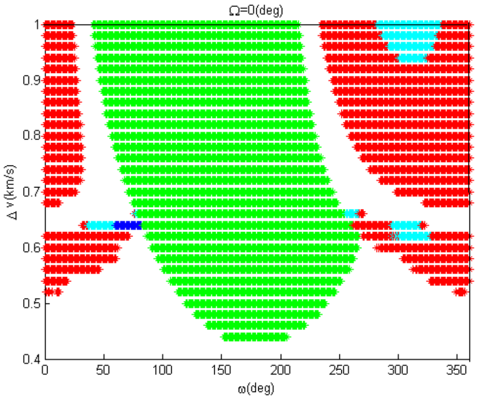
$(\omega, \Delta v)$ برای Ω های مختلف، تقریباً مشابه همدیگر است و تنها در هر حالت نمودار به اندازه Ω جابه‌جا شده است. هم چنین به راحتی می‌توان دید کمینه Δv برای رسیدن فضاپیما در مدت کمتر از ۱۰روز به محدوده پوانکاره تقریباً برابر با ۰/۴۲ کیلومتر بر ثانیه است. در ادامه در شکل۴ زوج $(\omega, \Delta v)$ هایی که در حالت $i =$ ۹۰ درجه (لونار قطبی)، در کمتر از ۱۰روز به محدوده پوانکاره رسیده اند، رسم شده اند. با مقایسه شکل های ۳ و ۴ می‌توان فهمید، اگرچه به دلیل اینکه در حالت دوم مدار لونار قطبی می‌باشد، شکل ها با حالت قبل تفاوت دارند اما محدوده ی مجاز Δv تغییرات بسیار کمی نسبت به حالت قبل دارد و کمینه Δv مورد نیاز تقریباً مشابه حالت قبل و حدوداً برابر با ۰/۴۲ کیلومتر بر ثانیه می باشد. در شکل۵ زمان رسیدن مسیرهای مختلف با شرایط اولیه متفاوت در حالت $\Omega =$ ۰ درجه و$i =$ ۹۰ درجه (لونار قطبی) به محدوده‌ی پوانکاره، نشان داده شده است. در نقاط سبز رنگ فضاپیما کمتر از ۴ روز، در نقاط آبی بین ۴ تا ۶ روز، در نقاط فیروزه ای بین۶ تا ۸ روز و در نقاط قرمز بین ۸ تا ۱۰ روز، به محدوده پوانکاره می رسد.



شکل۳. زوج $(\omega, \Delta v)$ مجاز برای Ω های مختلف و $i =$ ۰ درجه



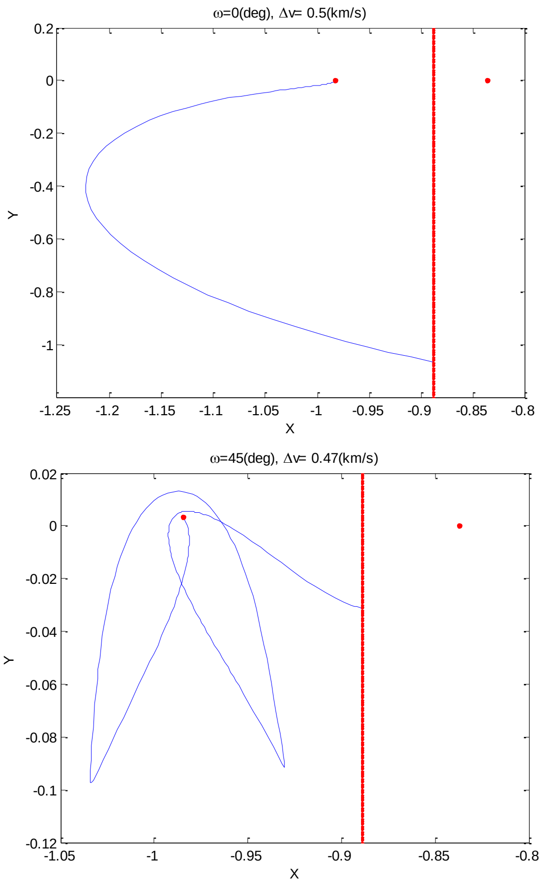
شکل ۴. زوج $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Delta v})$ مجاز برای $\boldsymbol{\Omega}$ های مختلف و $\boldsymbol{i} =$ ۹۰ درجه



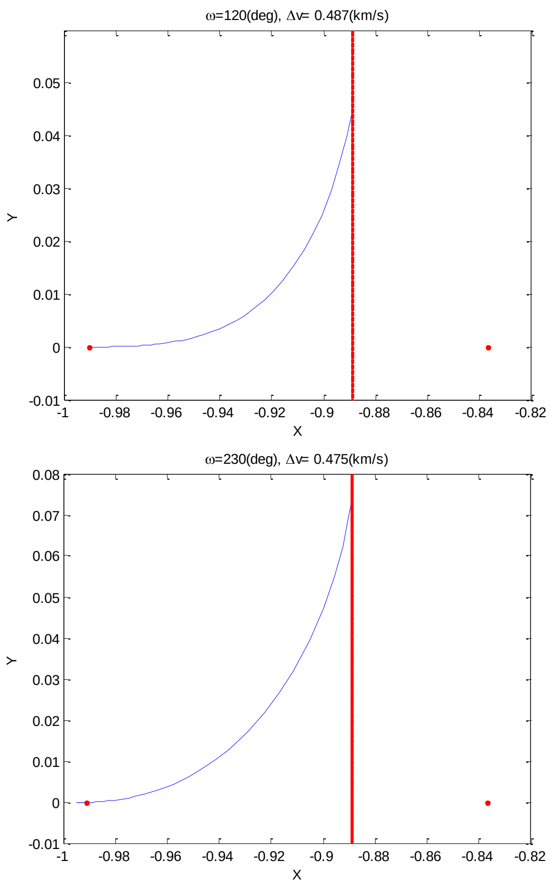
شکل ۵. نمودار زمانی $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Delta v})$ مجاز برای رسیدن به محدوده پوانکاره

در شکل ۶ و ۷ نمونه ای از مسیرهای پروازی که فضاپیما می‌تواند به وسیله آنها در کمتر از ۱۰ روز به محدوده پوانکاره برسد در حالت $i = ۰$ و $i = ۹۰$ درجه، رسم شده است. پس از این که شرایط اولیه قابل قبول برای فضاپیما جهت حرکت رو به عقب از مدار لونار به مجاورت نقطه L_1 پیدا شد، می‌توان زوج $(\omega, \Delta v)$هایی که فضاپیما به ازای آنها مدتی در مجاورت نقطه L_1 می‌ماند را پیدا نمود. برای اطمینان از اینکه فضاپیما در محدوده نقطه L_1 است از یک ناحیه پوانکاره دیگر به صورت $x = x_+$ استفاده می‌گردد. این ناحیه در ۲۰۰۰۰ کیلومتری سمت راست نقطه L_1 در نظر گرفته می‌شود که در مختصات RTBP به صورت زیر خواهد بود:

$$x = -0.784936965 \tag{۱۷}$$

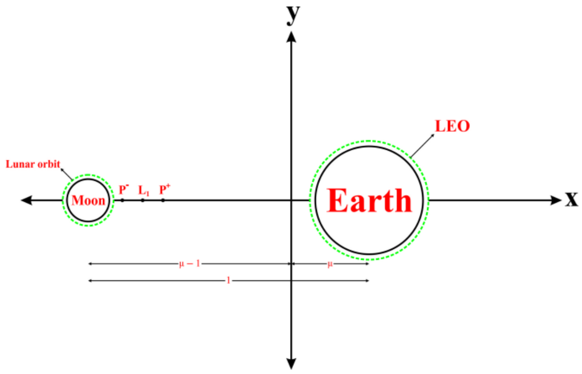


شکل ۶. مسیرهای پروازی با شرایط اولیه متفاوت، $\boldsymbol{\Omega} = ۰$ درجه و $\boldsymbol{i} = ۰$ درجه

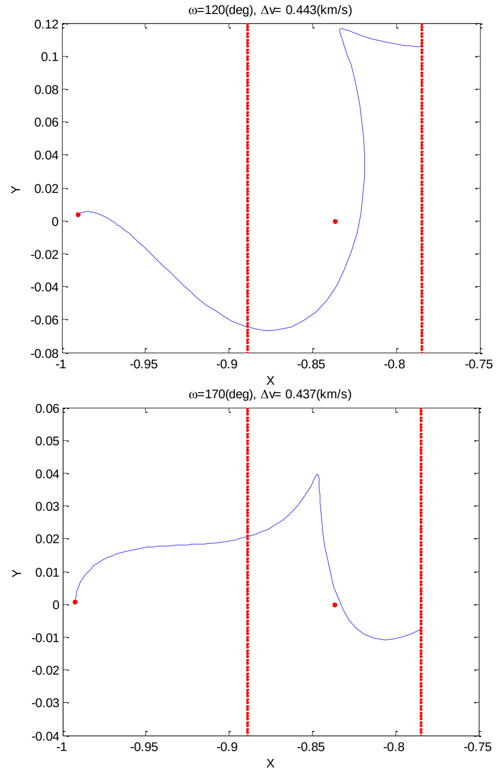


شکل ۷. مسیرهای پروازی با شرایط اولیه متفاوت، $\boldsymbol{\Omega} = ۰$ درجه و $\boldsymbol{i} = ۹۰$ درجه

در شکل ۸ نمایی از مسئله سه جسم با در نظر گرفتن نواحی پوانکاره نشان داده شده است. بار دیگر معادلات حرکت حل می‌گردد و محاسبات تا جایی ادامه پیدا می‌کند که فضاپیما به محدوده پوانکاره برسد. سپس شرایط اولیه مناسب برای اینکه فضاپیما مدت زمانی را در این ناحیه باقی بماند انتخاب می‌شود. حال می‌توان مطابق شکل ۹ مسیر پروازی های متفاوت به ازای $(\omega, \Delta v)$های مختلف که مدت زمان معینی در مجاورت نقطه L_1 باقی می‌مانند را رسم نمود.



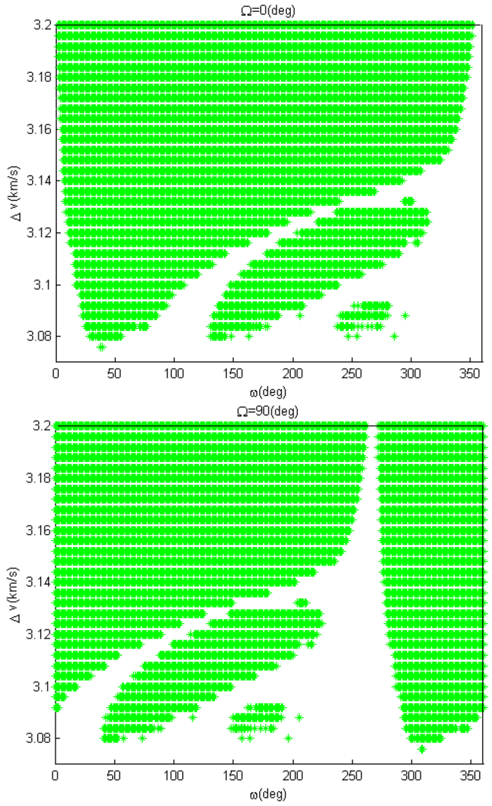
شکل ۸ نمایی از مسئله سه جسم در دستگاه RTBP.



شکل ۹. باقی ماندن مسیرهای پروازی با شرایط اولیه متفاوت در محدوده پوانکاره

۲-۴. حل معادلات حرکت از مدار LEO به سمت نقطه L_1

یک مدار دایروی به ارتفاع ۱۸۵ کیلومتر با شیب مداری ۰ تا ۵۰ درجه نسبت به صفحه دایره البروج در نظر گرفته می‌شود. برای قرار دادن فضاپیما در این مدار، همانطور که در بخش قبل بیان شد باید سه زاویه در اختیار داشت. شرایط اولیه مطابق آنچه که در بخش قبل گفته شد محاسبه می‌شود. بعد از اینکه شرایط اولیه در مدل RTBP به دست آمد، می‌توان معادلات حرکت را به صورت رو به جلو حل نمود تا به نزدیکی L_1 رسید. برای این کار از ایمپالس Δv و حداکثر زمانی برابر با ۲۰ روز استفاده می‌شود. برای اطمینان از اینکه فضاپیما به مجاورت نقطه لاگرانژ رسیده است، ابتدا ناحیه پوانکاره ای در ۲۰۰۰۰ کیلومتری سمت راست نقطه L_1 با رابطه $x = -$۰/۷۸۴۹۳۶۹۶۵ در مختصات RTBP در نظر گرفته می‌شود. با حل معادلات حرکت در مسئله سه جسم محدود می‌توان زوج $(\omega, \Delta v)$هایی که به وسیله آنها می‌توان در کمتر از ۲۰ روز به محدوده پوانکاره رسید را رسم نمود. محدوده ω بین صفر و ۳۶۰ درجه و هم چنین محدوده Δv بین ۳/۰۷ تا ۳/۲ کیلومتر بر ثانیه لحاظ می‌شود. در شکل ۱۰ زوج $(\omega, \Delta v)$هایی که در کمتر از ۲۰روز در حالت $i =$ ۰ درجه، به محدوده پوانکاره رسیده اند رسم شده اند. با مشاهده این نمودارها می‌توان نتیجه گرفت رفتار $(\omega, \Delta v)$ برای Ωهای مختلف تقریباً مشابه همدیگر است و تنها در هر حالت نمودار به اندازه Ω جابه جا شده است. هم چنین به راحتی می‌توان گفت برای آن که فضاپیما طی مدت زمان کمتر از ۲۰ روز از LEO به مجاورت نقطه L_1 برسد، کمینه Δv مورد نیاز تقریباً برابر خواهد بود با ۳/۰۸ کیلومتر بر ثانیه. مشابه بخش قبل نقاط سبز رنگ نواحی مجاز را نشان می دهند. مطابق شکل می‌توان در یک ω خاص با ایمپالس های متفاوتی به محدوده پوانکاره رسید که در این صورت تفاوت در هر حالت، زمان رسیدن به محدوده پوانکاره خواهد بود.



شکل ۱۰. زوج $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Delta v})$ مجاز برای $\boldsymbol{\Omega}$ های مختلف و $\boldsymbol{i} =$ ۰ درجه.

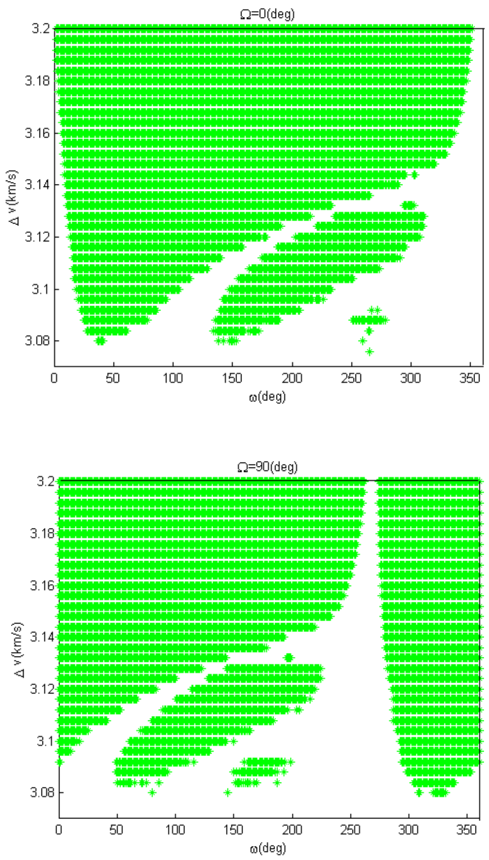
در شکل ۱۱ زوج $(\omega, \Delta v)$های قابل قبول در LEO که در مدت کمتر از ۲۰ روز در حالت $i =$ ۱۵ درجه، به ناحیه پوانکاره می‌رسند برای Ωهای مختلف رسم شده است.

در ادامه زوج $(\omega, \Delta v)$هایی که در مدت کمتر از ۲۰ روز به ناحیه پوانکاره می رسند در حالت $\Omega = 0$ درجه و شیب‌های مداری متفاوت در شکل‌های ۱۱ و ۱۲ رسم می‌گردد.

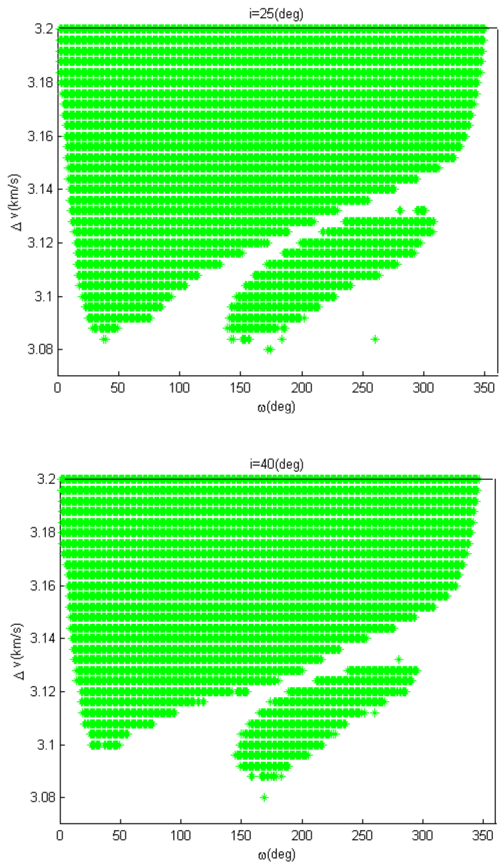
با مقایسه شکل‌های ۱۰، ۱۱ و ۱۲ به راحتی می‌توان فهمید که شکل ها بسیار شبیه یکدیگرند و کمینه Δv مورد نیاز مانند حالت قبل یعنی شیب صفر، تقریباً برابر با ۳/۰۸ کیلومتر بر ثانیه می‌باشد. همانطور که از نمودارهای $(\omega, \Delta v)$ در حالت $\Omega = 0$ درجه و شیب‌های مداری ۰، ۱۵، ۲۵ و ۴۰ و همچنین داده‌های کمی جدول ۱ مشخص است، اختلاف مقدار Δv در این حالت‌ها بسیار کم است، در حقیقت با تغییر شیب مداری LEO از ۰ تا ۵۰ درجه، تغییر قابل‌توجهی در ایمپالس مورد نیاز برای رسیدن به محدوده پوانکاره ایجاد نمی‌شود، لذا به عنوان نمونه نتایج حاصل از متصل نمودن مدارها را برای حالت LEO با $i = ۱۵$ درجه بررسی خواهد شد که با توجه به توضیحات فوق، قابل تعمیم به حالت‌های دیگر نیز می‌باشد. در جدول ۱ نتایج شکل‌های ۱۰، ۱۱ و ۱۲ در حالت $\Omega = ۰$ درجه به صورت کمی ارائه و مقایسه گردیده است.

جدول ۱. مقایسه مقادیر Δv_{LEO} در ωهای مختلف در $\Omega = ۰$ درجه.

ω (deg)	Δv_{LEO} (km/s) $i = ۱۵$ (deg)	Δv_{LEO} (km/s) $i = ۲۵$ (deg)	Δv_{LEO} (km/s) $\boldsymbol{i = 40}$ (deg)
۳۰	۳/۰۸۲	۳/۰۸۷	۳/۰۹۹
۴۴	۳/۰۸۲	۳/۰۸۶	۳/۰۹۸
۵۰	۳/۰۸۴	۳/۰۸۹	۳/۱۰۱
۵۵	۳/۰۸۴	۳/۰۸۹	۳/۱۰۴
۵۷	۳/۰۸۳	۳/۰۸۹	۳/۱۰۵
۶۰	۳/۰۸۵	۳/۰۸۹	۳/۱۰۵
۷۰	۳/۰۸۶	۳/۰۹۱	۳/۱۰۶
۱۵۰	۳/۰۸۲	۳/۰۸۴	۳/۰۹۱
۱۵۲	۳/۰۸۲	۳/۰۸۴	۳/۰۹۱
۱۵۵	۳/۰۸۲	۳/۰۸۵	۳/۰۹۰
۱۶۲	۳/۰۸۳	۳/۰۸۷	۳/۰۹۱
۱۷۰	۳/۰۸۴	۳/۰۸۵	۳/۰۹۰
۱۸۰	۳/۰۸۶	۳/۰۸۶	۳/۰۹۱



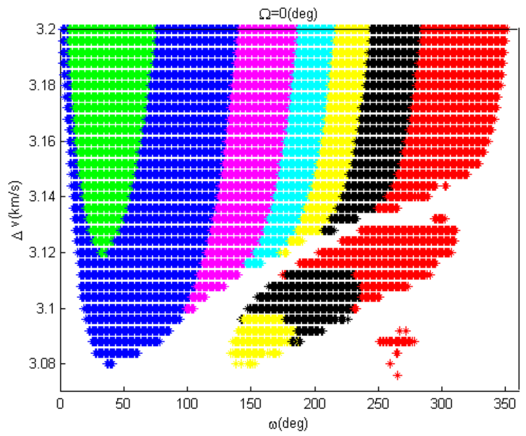
شکل ۱۱. زوج $(\omega, \Delta v)$ مجاز برای Ω های مختلف و $i = 15$ درجه



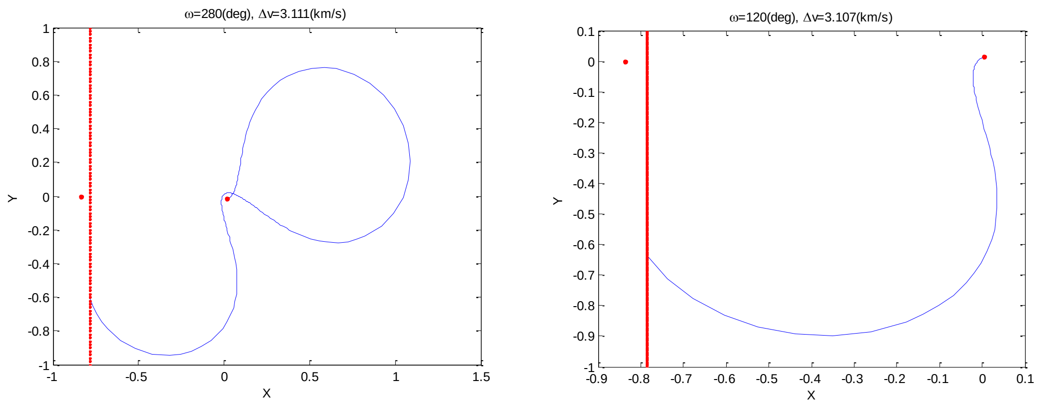
شکل ۱۲. زوج $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Delta v})$ مجاز برای $\boldsymbol{\Omega} = ۰$ درجه و شیب های مداری ۲۵ و ۴۰ درجه

در شکل ۱۳ زمان رسیدن مسیرهای با شرایط اولیه متفاوت، $\Omega = ۰$ درجه و $i = ۱۵$ درجه به محدوده‌ی پوانکاره، نشان داده شده است. در نقاط سبز رنگ فضاپیما کمتر از ۲ روز، در نقاط آبی بین ۲ تا ۵ روز، در نقاط صورتی بین ۵ تا ۸ روز، در نقاط فیروزه‌ای بین ۸ تا ۱۰ روز، در نقاط زرد بین ۱۰ تا ۱۲ روز، در نقاط سیاه بین ۱۲ تا ۱۵ روز و در نقاط قرمز در مدت بین ۱۵ تا

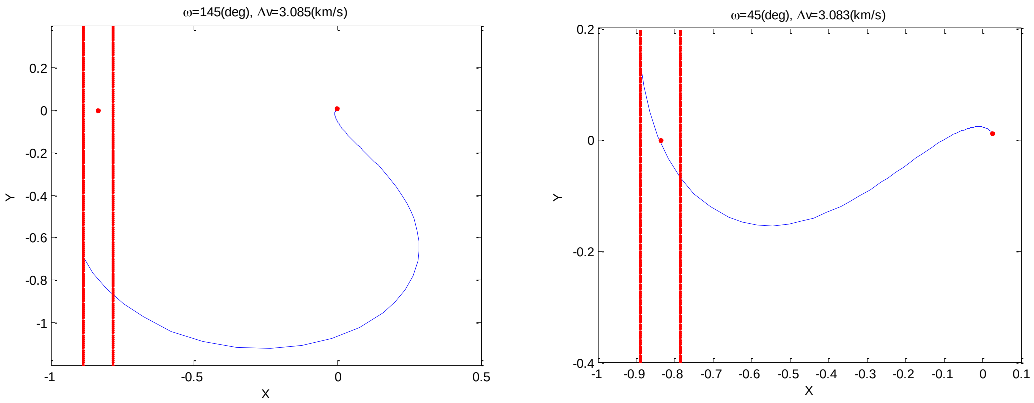
۲۰ روز به محدوده پوانکاره می رسد. در شکل ۱۴ نمونه ای از مسیرهای پروازی با $(\omega, \Delta v)$های متفاوت برای رفتن از مدار LEO به مجاورت نقطه تعادلی L_1 رسم شده است. همانند مرحله قبل برای مدار لونار، هنگامی که شرایط اولیه مناسب برای قطع نمودن ناحیه پوانکاره توسط فضاپیما پیدا شد، می‌بایست زوج $(\omega, \Delta v)$هایی که فضاپیما به ازای آنها مدتی در مجاورت نقطه L_1 می‌ماند را پیدا نمود. برای اطمینان از اینکه فضاپیما در محدوده نقطه L_1 است، یک ناحیه پوانکاره دیگر در ۲۰۰۰۰ کیلومتری سمت چپ نقطه L_1 با معادله $x = -$۰/۸۸۸۹۹۵۲۳۸ در مختصات RTBP در نظر گرفته می‌شود. حال مطابق شکل ۱۵ می‌توان مسیر پروازی‌های متفاوت به ازای $(\omega, \Delta v)$های مختلف که مدت زمان معینی در مجاورت نقطه L_1 باقی می‌مانند را رسم کرد.



شکل ۱۳. نمودار زمانی زوج $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Delta v})$ مجاز به منظور رسیدن به محدوده پوانکاره



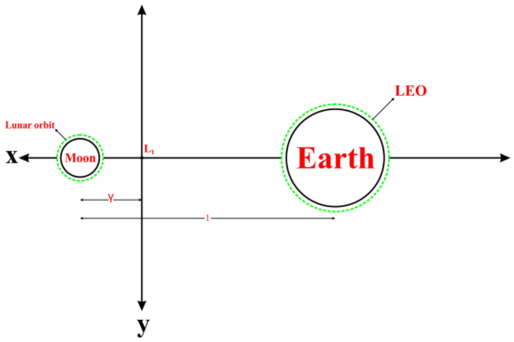
شکل ۱۴. مسیرهای پروازی با شرایط اولیه متفاوت، $\boldsymbol{\Omega} =$ ۰ درجه و $\boldsymbol{i} =$ ۱۵ درجه



شکل ۱۵. باقی ماندن مسیرهای پروازی با شرایط اولیه متفاوت در محدوده پوانکاره در حالت حل رو به جلو

۴-۳. متصل نمودن مسیرهای پروازی با استفاده از مدار هاله

حال که شرایط اولیه قابل قبول در مدارهای LEO و لونار که در کمتر از ۱۰ روز (برای مدار لونار) و کمتر از ۲۰ روز (برای LEO) به ناحیه پوانکاره می‌رسند و مسیرهای پروازی آنها مدت زمان معینی در مجاورت نقطه تعادلی L_1 باقی می‌مانند پیدا شد، می‌بایست این مسیرهای پروازی را به وسیله دو مانور کوچک به یکدیگر متصل کرد. از آنجا که هدف به دست آوردن مدارهای هاله حول نقطهL_1 می‌باشد، می‌بایست دستگاه مختصات را تغییر داد تا نقطه تعادلی L_1 در مرکز دستگاه قرار گیرد. برای این تبدیل مختصات طبق مرجع [۲و۱۲] عمل می‌شود. مرکز دستگاه جدید نقطه تعادلی L_1 می‌باشد. جهت مثبت محور x در خلاف جهت جسم بزرگتر (زمین) قرار دارد، جهت مثبت محور y با محور x به اندازه ۹۰ درجه به صورت پادساعتگرد اختلاف دارد و در نهایت جهت محور z باید به گونه ای باشد که دستگاه راست گرد را تکمیل نماید. دستگاه جدید در شکل ۱۶ رسم شده است. برای بی‌بعد کردن پارامترهای اصلی، فاصله دو جسم اصلی یعنی زمین و ماه را برابر با یک و فاصله ماه تا نقطه L_1 برابر با γ در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۱۶. دستگاه جدید با مرکزیت نقطه تعادلی L_1

بنابراین رابطه دو دستگاه را می‌توان به صورت زیر نوشت [۲]:

$$x = -\frac{1}{\gamma}(X - \mu + 1 - \gamma) \tag{۱۸}$$

$$y = -\frac{1}{\gamma}Y \tag{۱۹}$$

$$z = \frac{1}{\gamma}Z \tag{۲۰}$$

و در نتیجه معادلات RTBP طبق روش پوانکاره–لیندست به صورت زیر در می آیند:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - (1 + 2c_2)x = 0 \tag{۲۱}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} + (c_2 - 1)y = 0 \tag{۲۲}$$

$$\ddot{z} + c_2 z = 0 \tag{۲۳}$$

که در این روابط:

$$c_2 = \frac{1}{\gamma^3}\left[\mu + (-1)^2(1-\mu)\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^3\right]$$

معادلات فوق در نزدیکی نقاط لاگرانژی دارای یک جفت ریشه حقیقی و دو جفت ریشه موهومی با مقادیر مشخصه به فرم $(\pm\lambda, \pm\omega_p, \pm\omega_v)$ دارند. لذا حل عمومی معادلات مزبور به صورت زیر می‌باشد [۲]:

$$x(t) = -A_x \cos(\omega_p t + \varphi) \tag{۲۴}$$

$$y(t) = \kappa A_x \cos(\omega_p t + \varphi) \tag{۲۵}$$

$$z(t) = A_z \cos(\omega_v t + \varphi) \tag{۲۶}$$

که A_i و φ مقادیر فاز و دامنه بوده و بقیه ثوابتی هستند که تنها به c_2 وابسته بوده و به صورت زیر بدست می‌آیند:

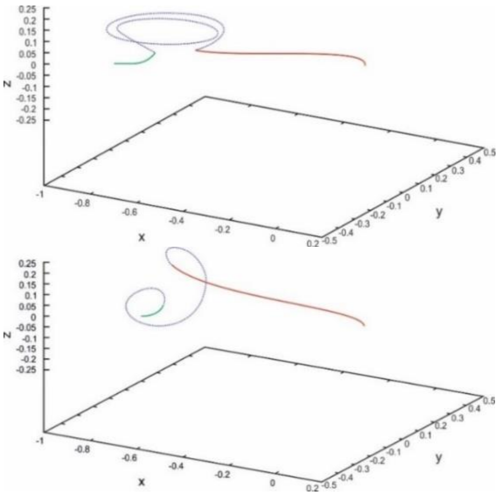
$$\omega_p = \sqrt{\frac{2 - c_2 + \sqrt{9c_2^2 - 8c_2}}{2}} \tag{۲۷}$$

$$\omega_v = \sqrt{c_2} \tag{۲۸}$$

$$\kappa = -\frac{\omega_p^2 + 1 + 2c_2}{2\omega_p} = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1 - c^2} \tag{۲۹}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{c_2 - 2 + \sqrt{9c_2^2 - 8c_2}}{2}} \tag{۳۰}$$

برای هر کدام از نقاط $(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)$و $(x_f, y_f, z_f, \dot{x}_f, \dot{y}_f, \dot{z}_f)$ به ترتیب برای LEO و مدار لونار در محدوده پوانکاره مربوطه به هر یک، به ازای افزایش‌های مختلف Δt، یک مسیر پروازی بدست می‌آید به گونه ای که دو موقعیت (x_i, y_i, z_i) و (x_f, y_f, z_f) به وسیله معادلات خطی شده مسئله سه جسم محدود به یکدیگر متصل می‌شود. حال که سه مرحله شبیه سازی به اتمام رسید می‌توان مسیر پروازی فضاپیما جهت انتقال از LEO با شیب مداری ۱۵ درجه به مدار لونار قطبی را ترسیم نمود. در شکل۱۷ نمونه ای از مسیرهای پروازی برای انجام این انتقال ارائه شده است. نتایج حاصل از محاسبات را می‌توان در جدول ۲ و ۳ خلاصه نمود. به ازای Δv مذکور، شرایط اولیه $(\omega_i\,, \Delta v_i)$ در LEO، شرایط نهایی $(\omega_f\,, \Delta v_f)$ در مدار لونار قطبی و Δt زمان کل انجام انتقال (مجموع زمان های انتقال از LEO و لونار قطبی به L_1 و هم چنین زمان انجام اتصال دو مسیر پروازی) آورده شده است. همانطور که از این جداول مشخص است، برای انتقال از LEO با شیب مداری ۱۵درجه به مدار لونار قطبی به ایمپالسی بین ۳/۷۵ تا ۳/۹۲ کیلومتر بر ثانیه نیاز می باشد.



شکل ۱۷. اتصال مسیرهای پروازی بدست آمده از انتقال از LEO(قرمز) و مسیرهای پروازی از انتقال از مدار لونار قطبی(سبز) بوسیله مدارهای آبی رنگ

۵. اغتشاشات

از آنجا که انتقال از مدار LEO به مدار لونار با استفاده از نقاط لاگرانژ کمی زمان بر است، نمی‌توان به راحتی از اغتشاشاتی که روی حرکت فضاپیما تأثیر می گذارد چشم پوشی نمود. بنابراین در این بخش با اضافه نمودن اغتشاشات به معادلات حرکت مسئله سه جسم محدود، تأثیر آنها در محاسبات و شبیه سازی های بدست آمده از بخش های قبل بررسی می‌شود. در اینجا دو اغتشاشی که بیشترین تأثیر را بر حرکت ماهواره دارند یعنی اغتشاشات گرانشی و تشعشعات خورشیدی در نظر گرفته می‌شود. در این صورت معادلات حرکت به صورت زیر در می‌آیند [۱و۱۳]:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial\Omega}{\partial x} + \frac{3}{2}\frac{J_2\mu R^2}{r^4} \times \left[\frac{x}{r}\left(5\frac{z^2}{r^2} - 1\right)\right] - p_{SR}(\cos\lambda) \qquad (۳۱)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial\Omega}{\partial y} + \frac{3}{2}\frac{J_2\mu R^2}{r^4} \times \left[\frac{y}{r}\left(5\frac{z^2}{r^2} - 1\right)\right] - p_{SR}(\cos\sin\lambda\,\varepsilon) \qquad (۳۲)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial\Omega}{\partial z} + \frac{3}{2}\frac{J_2\mu R^2}{r^4}\left[\frac{z}{r}\left(5\frac{z^2}{r^2} - 3\right)\right] - p_{SR}(\sin\sin\lambda\,\varepsilon) \qquad (۳۳)$$

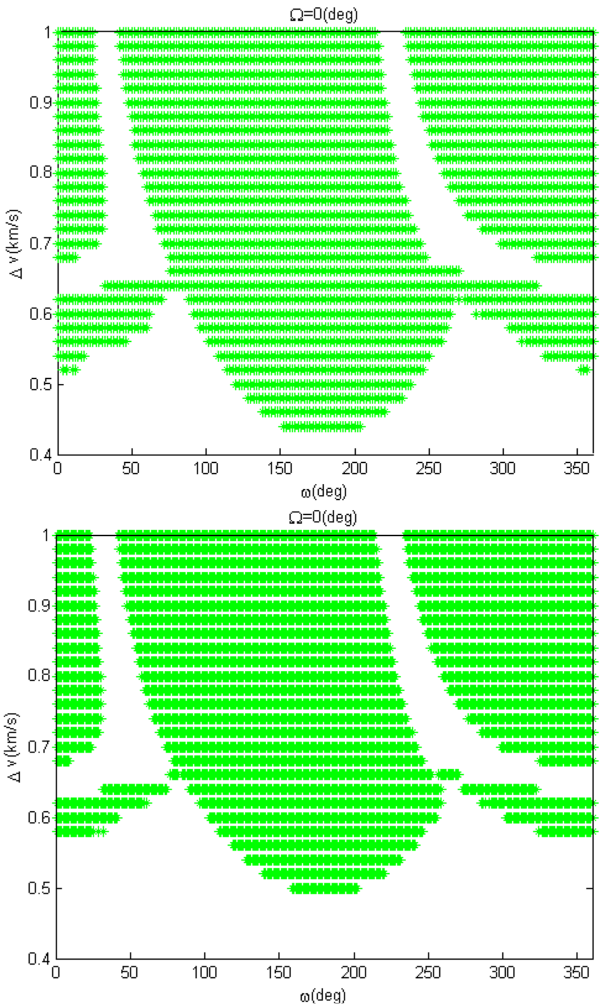
ترم اول اضافه شده مربوط به اغتشاش گرانشی و ترم دوم مربوط به اغتشاش تشعشعات خورشیدی می باشد. در این روابط R شعاع زمین، r فاصله ماهواره از مرکز زمین، J_2 ضریب جفری[۸] و برابر با $-۲/۰۲۷\times۱۰^{-۴}$ می باشد. پس از بازنویسی معادلات حرکت در مسئله سه جسم محدود، دو مرحله اول شبیه سازی بخش قبل برای معادلات جدید که همراه با ترم های اغتشاشی می باشند تکرار می‌شود یعنی معادلات حرکت برای انتقال رو به عقب از مدار لونار قطبی به مجاورت نقطه L_1 و هم چنین برای انتقال رو به جلو از LEO به مجاورت نقطه L_1 حل می گردد تا نتایج بدست آمده با شبیه سازی هایی که بدون حضور ترم های اغتشاشی انجام گرفته است مقایسه شود. در شکل ۱۸ و ۱۹ زوج $(\omega, \Delta v)$هایی که به فضاپیما اجازه می دهند در حالت $\Omega = ۰$ درجه در کمتر از ۱۰ روز (برای مدار لونارقطبی) یا ۲۰ روز (برای LEO) به ناحیه پوانکاره برسد نشان داده شده است. شکل‌های پایین در هر حالت اثر اغتشاشات را نشان می‌دهد.

جدول ۲. شرایط اولیه در مدارهای LEOو لونار قطبیو Δvکل مورد نیاز برای اتصال دو مسیر پروازی برای $\Omega = 0$

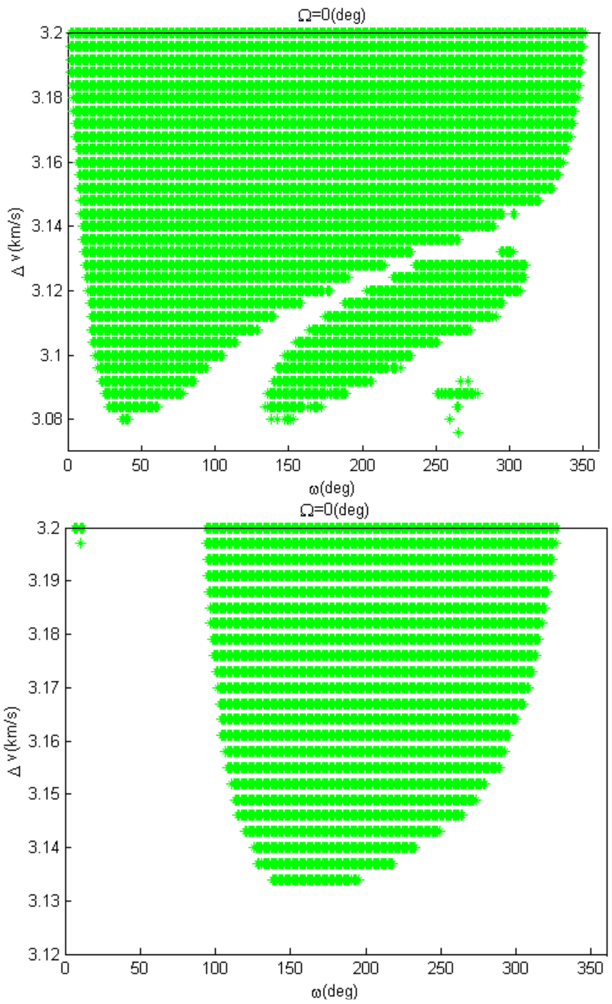
ω_i (deg)	Δv_i (km/s)	Ω (deg)	ω_f (deg)	Δv_f (km/s)	Δv (m/s)	Δt_{tot} $(days)$	Δv_{tot} (km/s)
۳۰	۳/۰۸۲	۰	۲۳۰	۰/۴۷۵	۲۵۲/۳۲۱	۱۰/۱۱۳	۳/۸۰۷
۴۵	۳/۰۸۲	۰	۱۳۰	۰/۴۷۶	۳۰۳/۹۸۱	۶/۱۲۸	۳/۸۶۱
۵۰	۳/۰۸۴	۰	۲۰۵	۰/۴۳۴	۳۲۰/۴۳۱	۵/۲۵۶	۳/۸۳۸
۵۵	۳/۰۸۴	۰	۲۰۲	۰/۴۳۷	۳۱۰/۴۰۳	۱۱/۷۶۰	۳/۸۳۱
۶۰	۳/۰۸۵	۰	۱۵۰	۰/۴۴۲	۳۰۱/۷۶۳	۱۴/۳۲۷	۳/۸۲۸
۷۰	۳/۰۸۶	۰	۲۱۰	۰/۴۴۵	۳۶۱/۱۱۲	۸/۱۸۷	۳/۸۹۲
۱۴۰	۳/۰۸۲	۰	۱۷۰	۰/۴۲۷	۴۱۰/۸۳۴	۲۰/۵۶۸	۳/۹۱۹
۱۵۰	۳/۰۸۲	۰	۲۲۵	۰/۴۷۱	۳۲۹/۱۱۸	۲۷/۲۰۲	۳/۸۸۲
۱۵۵	۳/۰۸۲	۰	۲۰۰	۰/۴۳۴	۴۰۴/۱۰۱	۱۵/۹۸۰	۳/۹۲۰
۱۶۰	۳/۰۸۲	۰	۱۶۳	۰/۴۳۱	۳۳۱/۰۰۸	۱۹/۱۳۸	۳/۸۴۴
۱۷۰	۳/۰۸۴	۰	۲۲۰	۰/۴۵۹	۳۵۵/۷۶۱	۲۴/۹۴۳	۳/۸۹۸
۱۷۴	۳/۰۸۸	۰	۱۷۵	۰/۴۲۶	۳۴۵/۵۶۴	۱۶/۵۴۰	۳/۸۵۹
۱۸۰	۳/۰۸۶	۰	۱۴۲	۰/۴۵۳	۳۳۵/۸۱۲	۲۶/۷۶۰	۳/۸۷۴

جدول ۳. شرایط اولیه در مدارهای LEO و لونار قطبیو Δv کل مورد نیاز برای اتصال دو مسیر پروازی برای Ω های مختلف.

ω_i (deg)	Δv_i (km/s)	Ω (deg)	ω_f (deg)	Δv_f (km/s)	Δv (m/s)	Δt_{tot} $(days)$	Δv_{tot} (km/s)
۳۰۴	۳/۰۸۴	۹۰	۳۲۰	۰/۴۸۱	۲۶۱/۸۰۳	۱۵/۹۳۰	۳/۸۲۶
۳۱۰	۳/۰۸۱	۹۰	۳۰	۰/۴۷۹	۳۲۱/۱۱۶	۲۰/۸۳۹	۳/۸۸۱
۳۲۶	۳/۰۸۰	۹۰	۴۰	۰/۴۸۹	۲۹۱/۰۴۳	۱۲/۱۱۳	۳/۸۶۰
۸۵	۳/۰۸۹	۹۰	۳۴۰	۰/۴۵۷	۳۷۱/۳۲۱	۲۵/۰۹۱	۳/۹۱۷
۲۱۰	۳/۰۸۲	۱۸۰	۵۰	۰/۴۷۵	۲۵۲/۳۲۱	۱۰/۱۱۳	۳/۸۰۷
۲۳۰	۳/۰۸۴	۱۸۰	۲۵	۰/۴۳۴	۳۲۰/۴۳۱	۵/۲۵۶	۳/۸۳۸
۲۴۰	۳/۰۸۵	۱۸۰	۳۳۰	۰/۴۴۲	۳۰۱/۷۶۳	۱۴/۳۲۷	۳/۸۲۸
۱۳۰	۳/۰۸۱	۲۷۰	۲۱۰	۰/۴۷۹	۳۲۱/۱۱۶	۲۰/۸۳۹	۳/۸۸۱
۱۴۶	۳/۰۸۰	۲۷۰	۲۲۰	۰/۴۸۹	۲۹۱/۰۴۳	۱۲/۱۱۳	۳/۸۶۰
۲۶۵	۳/۰۸۹	۲۷۰	۱۶۰	۰/۴۵۷	۳۷۱/۳۲۱	۲۵/۰۹۱	۳/۹۱۷



شکل ۱۸: مقایسه نمودارهای Δv بر حسب ω برای انتقال از مدار لونارقطبی به محدوده پوانکاره در حالت حضور(پایین) و عدم حضور اغتشاشات(بالا) در $\Omega = ۰$ درجه



شکل ۱۹: مقایسه نمودارهای Δv بر حسب ω برای انتقال از LEO به محدوده پوانکاره در حالت حضور (پایین) و عدم حضور اغتشاشات(بالا) در $\Omega = ۰$ درجه و $i = ۱۵$ درجه

جدول ۴. مقایسه ایمپالس مورد نیاز و زمان انتقال از مدار لونارقطبی به محدوده پوانکاره در حالت حضور و عدم حضور اغتشاشات در $\Omega = ۰$ درجه

$\omega(\mathbf{deg})$	عدم حضور اغتشاشات		حضور اغتشاشات	
	$\Delta v(km/s)$	$\Delta t(days)$	$\Delta v(km/s)$	$\Delta t(days)$
۲۳۰	۰/۴۷۵	۳/۱۸۵	۰/۵۳۷	۳/۳۳۴
۱۳۰	۰/۴۷۶	۱/۷۶۰	۰/۵۳۶	۱/۸۹۰
۲۰۵	۰/۴۳۴	۱/۶۶۷	۰/۵۰۴	۱/۷۴۸
۱۴۵	۰/۴۴۹	۱/۵۱۹	۰/۵۱۳	۱/۵۹۴
۱۶۰	۰/۴۳۳	۱/۲۷۷	۰/۴۹۹	۱/۳۴۰
۱۸۵	۰/۴۳۰	۱/۴۳۸	۰/۴۹۸	۱/۵۰۹
۲۱۰	۰/۴۴۵	۱/۸۵۱	۰/۵۱۴	۱/۹۴۵
۱۷۰	۰/۴۲۷	۱/۴۵۳	۰/۴۹۳	۱/۵۲۶

جدول ۵: مقایسه ایمپالس مورد نیاز و زمان انتقال از LEO به محدوده پوانکاره در حالت حضور و عدم حضور اغتشاشات در $i = ۱۵$ درجه و $\Omega = ۰$ درجه

$\omega(\mathbf{deg})$	عدم حضور اغتشاشات		حضور اغتشاشات	
	$\Delta v(km/s)$	$\Delta t(days)$	$\Delta v(km/s)$	$\Delta t(days)$
۱۴۷	۳/۰۸۳	۱۰/۸۲۳	۳/۱۴۰	۱۱/۶۶۴
۱۵۲	۳/۰۸۲	۱۱/۰۴۱	۳/۱۴۰	۱۱/۷۵۹
۱۵۵	۳/۰۸۲	۱۱/۱۴۷	۳/۱۴۰	۱۲/۲۰۱
۱۵۸	۳/۰۸۲	۱۱/۰۹۷	۳/۱۴۰	۱۲/۰۷۶
۱۶۰	۳/۰۸۲	۱۱/۵۸۰	۳/۱۴۰	۱۲/۶۲۲
۱۷۰	۳/۰۸۴	۱۱/۳۰۵	۳/۱۴۰	۱۲/۴۳۱
۱۷۵	۳/۰۸۵	۱۱/۸۴۴	۳/۱۴۰	۱۲/۷۹۱
۱۸۰	۳/۰۸۶	۱۲/۰۷۹	۳/۱۴۰	۱۳/۰۸۲

با توجه به داده های جداول ۴ و ۵، می‌توان گفت در حالت حضور اغتشاشات، مقدار Δv در حالت حل رو به عقب در حدود ۱۵ درصد و حالت حل رو به جلو، حدود ۲ درصد و هم چنین زمان انتقال در حالت حل رو به عقب حدود ۵ درصد و در حالت حل رو به جلو حدود ۱۰ درصد افزایش یافته است. هم چنین همانطور که از نمودار ۱۹ مشخص است، شرایط اولیه مجاز برای رسیدن به نقطه لاگرانژ نسبت به حالت عدم حضور اغتشاشات محدودتر شده است. در جدول ۶ نتایج حاصل از انتقال از LEO با شیب مداری بین ۰ تا ۵۰ به مدار لونار قطبی آورده شده و با روش هوهمان غیر هم صفحه[۱] مقایسه گردیده است. با توجه به این نتایج، روش مطرح شده زمانبرتر از روش هوهمان بوده ولی Δv مورد نیاز جهت این انتقال بین ۲ تا ۱۲ درصد بهتر از روش هوهمان بدست آمده است. در صورتی که اغتشاشات پخی زمین و تشعشعات خورشیدی به معادلات حرکت نیز اضافه شود، مطابق جدول ۷ و با توجه به نتایج ارائه شده در بخش قبل، زمان رسیدن حدود ۵ درصد و هم چنین Δv مورد نیاز حدود ۴ درصد افزایش می یابد که در مجموع باز هم نسبت به روش هوهمان بهتر عمل کرده است.

جدول ۶. مقایسه روش RTBP با هوهمان برای انتقال از LEO به مدار لونار قطبی.

نوع انتقال	Δv_{tot} (km/s)	Δt_{tot} $(days)$
RTBP	۳/۷۵-۳/۹۲	۵-۳۰
هوهمان	۴-۴/۲	۵

جدول ۷. مقایسه روش RTBP در حالت حضور و عدم حضور اغتشاشات.

نوع انتقال	Δv_{tot} (km/s)	Δt_{tot} $(days)$
RTBP	۳/۷۵-۳/۹۲	۵-۳۰
RTBP+ اغتشاشات	۳/۸۵-۴/۰۴	۵-۳۲

۶. نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر یک روش جدید جهت انتقال از LEO به مدار لونار ارائه گردید. در این روش از ویژگی های نقاط تعادلی مسئله سه جسم محدود سیستم زمین–ماه استفاده شده تا بتوان برای انتقال به مدارلونار یک مسیر پروازی بهبودیافته از لحاظ انرژی طراحی کرد. با توجه به نتایج حاصله، روش مطرح شده زمانبرتر از روش هوهمان بوده ولی Δv مورد نیاز جهت این انتقال بین ۲ تا ۱۲ درصد بهتر از روش هوهمان بدست آمده است. در صورتی که اغتشاشات پخی زمین و فشار تشعشعات خورشیدی نیز به معادلات حرکت اضافه شود، زمان رسیدن حدود ۵ درصد و هم چنین Δv مورد نیاز حدود ۴ درصد افزایش می‌یابد که در مجموع باز هم نسبت به روش هوهمان بهتر عمل کرده است.

۷. مآخذ

[1] Curtis, H.D.: Orbital Mechanics for Engineering Students 3thed, New York:McGraw-Hill, 2010.

[2] Koon, Wang sang, Martin, W.Lo, Marsden, Jerrold E., Dynamical Systems, the Three Body Problem and Space Mission Design, 2006.

[3]SabooriDarabi,E., Zardashti,R., Kordjazi,H., Esmaeli,M.: stability of Lagrangian Points in Sun-Earth system & RTBP, April, 2016. (In Persian)

[4] Parker, Jeffrey S.: Families of Low- Energy Lunar Halo Transfers, AAS 06-132, 2006.

[5] Parker, Jeffrey S. and Born, George H.: Direct Lunar Halo Orbit Transfers, 17th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Conference, Sedona, Arizona, 2008.

[6] Ozimek, M.T. and Howell, K.C.: Low- Thrust Transfers in the Earth- Moon system, including applications to Libration Point Orbits, AAS/AIAA Astrodaynamics Specialist Conference, Mackinac Island, 2010.

[7] Alessi, Elisa Maria, Gomez, Gerard, Masdemont, Josep J.: Two- Manoeuvers Transfers between LEOs and Lissajous Orbits in the Earth- Moon system, Advances in Space Research,Vol. 45, pp. 1276-1291, 2010.

[8] Kyle Wolma: The use of Lagrangian Points for Lunar Exploration, Settlement, and Support, ASEN 5050 Spaceflight Dynamics Final Project, 2012.

[9] Zhengtao Zhang, XiyunHou: Transfer orbits to the Earth-Moon triangular libration points, Advances in Space Research, Vol. 55 ,pp. 2899-2913, 2015.

[10] Elenna, AA. Analytical Treatment of the Earth Oblateness& Solar Radiation Pressure Effects on an Artificial Satellite I. the Equations of Motion, Mathematics & Computation, 2003.

[11] Adnan, M.SK.Razali, R., Azlin, Md. & Said, Md.: Study of Perturbation Effect on Satellite Orbit Using Cowell's Method, School of Aerospace Engineering, 2013.

[12] Gomez,G., Llibre,J., Martinez,R., Simo,C: Dynamics and Mission Design Near Libration Points, World Scientific Publishing, 2001.

[13] Battin, Richard H.: An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodaynamics, AIAA education series, 2001.

پی‌نوشت

1. Hallo Orbit
2. Station Keeping
3. Impulse
4. Hamiltonian
5. Oblateness
6. Cowell Method
7 . Restricted Three Body Problem
10. Jeffrey