تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای دو سرگیردار ساخته شده از مواد مرکب

ایوب انتظاری[۱]، روح‌الله دهقانی فیروزآبادی[۲]، محمدعلی کوچک‌زاده[۳]

دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۸۹/۰۵/۱۶

تاریخ ارزیابی نهایی: ۱۳۹۰/۰۸/۱۸

چکیده

هدف از انجام این تحقیق، استخراج و حل معادلات غیرخطی حاکم بر ارتعاشات پوسته استوانه‌ای ساخته شده از مواد مرکب لایه‌ای با لایه‌چینی متعامد، با استفاده از اصل همیلتون (Hamilton's principle) و روش گالرکین است. کرنش‌ها از نوع غیرخطی ون‌کارمن (Von karman) بوده و شرایط مرزی دو سر گیردار، فرض شده است. بسط مودال پاسخ، به‌صورت مجموع چند مود در نظر گرفته شده است که با جای‌گذاری مستقیم این بسط در معادله غیرخطی حاکم بر مبنای کرنش‌های ون‌کارمن، و با استفاده از روش گالرکین، معادلات غیرخطی حاکم بر مختصات تعمیم‌یافته‌ی هریک از مودها استخراج می‌شود. معادلات حاکم به‌دست آمده با استفاده از روش رانگ-کوتا مرتبه چهار حل می‌شود. با استفاده از روش حل ارائه شده، پاسخ ارتعاشی پوسته تحت بار دینامیکی مشخص، تحلیل شده و اثر پارامتری‌هایی چون نوع لایه‌چینی، تعداد موج‌ها و هندسه بر ارتعاشات پوسته مورد مطالعه قرار می‌گیرد. فرکانس‌های به دست آمده از روش حل ارائه شده در این تحقیق، با نتایج حاصل از نرم‌افزار اجزای محدود و نتایج دیگر محققین مقایسه و مطابقت داده شده است.

کلیدواژه:

ارتعاشات، پوسته ساخته شده از مواد مرکب، روش مودال، معادلات غیرخطی، گالرکین.

مقدمه

پوسته‌های استوانه‌ای دایروی در طراحی مهندسی کاربرد گسترده دارد. کاربرد آن‌ها به‌ویژه در سازه‌های هوافضایی، آشکار است. در ساخت بخش‌های اصلی هواپیماها، موشک‌ها، راکت‌ها و غیره از این نوع سازه‌ها کمک گرفته می‌شود. دلایل به‌کارگیری سازه‌های پوسته استوانه‌ای عموماً مربوط به مزیت اصلی آن‌ها در هندسه‌شان است. به ازای حجم مشخص، پوسته‌های استوانه‌ای دایروی دارای حداقل مساحت سطح است. این سازه‌ها ویژگی‌های مطلوبی مانند سطح خیس کم (حداقل پسا) و انتقال حرارت پایین را دارا است. برای داشتن حداقل وزن، به‌کارگیری مواد با نسبت استحکام به وزن بالا ضروری است. مواد مرکب قادر به تأمین چنین ویژگی هستند. از دیگر ویژگی‌های مواد مرکب می‌توان به سفتی ویژه بالا و خواص ضد خوردگی آن اشاره کرد.

در بسیاری از کاربردهای عملی، استفاده از تئوری خطی کلاسیک (CLT) برای تحلیل رفتار دینامیکی، به‌ویژه با دامنه تغییر شکل بزرگ، دارای دقت کافی نیست. هنگامی که تغییر شکل پوسته در راستای شعاع مرتبه‌ای از ضخامت باشد، اثرات غیرخطی آشکار شده، و منجر به پاسخ‌های پیچیده می‌شود. این اثرات شامل وابستگی فرکانس‌های متغیر با دامنه است. بنابراین باید این رفتار دینامیکی توسط تئوری غیرخطی پوسته‌ها، تحلیل شود.

مطالعات انجام شده در زمینه ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای دایروی بسیار گسترده است. در بیش‌تر مطالعات انجام شده، پوسته‌ها با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده فرض شده، و مطالعات زیادی روی شرایط مرزی مختلف به خصوص دوسرگیردار و اثر آن روی پاسخ غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای صورت نگرفته است. در ادامه به اصلی‌ترین مطالعاتی که در این زمینه انجام شده اشاره شده است.

ماتسوزوکی و کوبایاشی [1] ارتعاشات دامنه بزرگ در پوسته‌های استوانه‌ای دایروی با تکیه‌گاه دوسر درگیر را به‌طور تئوری و تجربی مورد مطالعه قرار دادند. تحلیل آن‌ها روی تئوری پوسته‌های غیرخطی دونل (Donnell) استوار بود و از یک بسط مود ساده با

---

۱. کارشناس ارشد سازه‌های هوایی

۲. استادیار

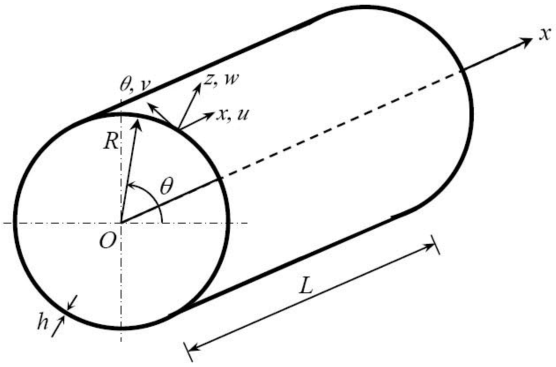
۳. دانشیار، (نویسنده مخاطب)، mak@sharif.edu

دو درجه آزادی استفاده کردند. چیا [۲] ارتعاشات آزاد غیرخطی و کمانش صفحات استوانه‌ای دایروی لایه‌ای متقارن و نامتقارن با شرایط مرزی مختلف را بررسی کرد. یو و چیا [۳] با استفاده از تئوری پوسته دارای شعاع انحنای بزرگ و غیرخطی دونل، ارتعاشات آزاد و کمانش پوسته‌های استوانه‌ای لایه‌ای با لایه‌چینی متعامد غیرمتقارن با شرایط مرزی گیردار و ساده را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند. در این تحقیق میدان جابه‌جایی تنها در جهت عرضی با بسطی تشکیل شده از چند مود استفاده شده است. دستگاه معادلات غیرخطی حاکم تنها برای ارتعاشات آزاد به‌دست آمده و به‌روش تعادل هارمونیک (Harmonic balance) حل شده است. ارتعاشات دامنه بزرگ پوسته‌های استوانه‌ای دایروی دوسردرگیر عمودی که تا قسمتی از سطح‌های مختلف آن از آب پرشده، به‌طور تجربی توسط چیبا [۴] مورد مطالعه قرار گرفت. آقای آبه و همکاران [۵] خصوصیات ارتعاش آزاد غیرخطی مودهای اول و دوم ارتعاشی پوسته‌های دارای شعاع انحناء بزرگ لایه‌ای با لبه‌های گیردار را بررسی کردند. آمابیلی [۶] ارتعاشات با دامنه بزرگ (غیرخطی هندسی) پوسته‌های استوانه‌ای دایروی با شرایط مرزی مختلف که تحت تحریک هارمونیک شعاعی قرار دارد در دو حالت خالی و پر از سیال را مورد مطالعه قرار داد. کاراگیوزیس و همکاران [۷] ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای دایروی خالی و پر از سیال، با شرایط دوسرگیردار تحت نیروی تحریک هارمونیک شعاعی را بررسی کردند. پلیکانو [۸] به بررسی ارتعاشات خطی و غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای دایروی تحت شرایط مرزی مختلف پرداخت. او از تئوری سندرز-کویتر بهره گرفت و میدان‌های جابه‌جایی را به صورت ترکیب سری‌های دوتایی توابع هارمونیک و چند جمله‌ای‌های چیبشف بسط داد. شاو و ما [۹] ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای لایه‌ای با شرایط مرزی دلخواه را با استفاده از بسط سری فوریه مورد تحلیل قرار دادند. با توجه به آن‌چه گفته شد، شناخت رفتار دقیق دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای دو سرگیردار، استفاده از روش‌ها و تئوری‌های مختلف را ضروری می‌سازد.

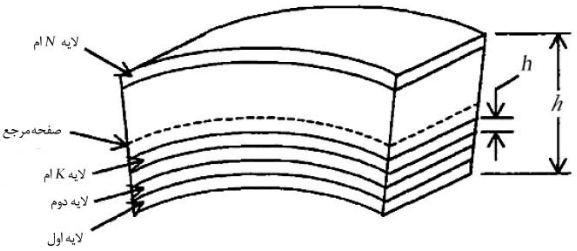
در این تحقیق، ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای دایروی دوسر درگیر از جنس مواد مرکب لایه‌ای با لایه‌چینی متعامد، مورد تحلیل قرار گرفته است. با استفاده از توابع قابل استفاده متناظر در تیر و روش گالرکین، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاش آزاد خطی پوسته به‌دست می‌آید. بسط مودال پاسخ به‌صورت مجموع چند مود در نظر گرفته شده است که با جای‌گذاری در رابطه اصل همیلتون به‌همراه استفاده از روش گالرکین، دستگاه معادله توصیف‌کننده ارتعاشات غیرخطی سامانه به‌طور مستقیم به‌دست می‌آید. با حل این دستگاه به‌روش رانگ-کوتا مرتبه چهار، می‌توان رفتار دینامیکی سامانه تحت بارگذاری مشخص را بررسی کرد.

معادلات حاکم

شکل ۱ یک پوسته استوانه‌ای با شعاع متوسط R، طول L و ضخامت h را نشان می‌دهد. در شکل ۲ چیدمان لایه‌های پوسته ساخته شده از ماده مرکب، نمایش داده شده است. u، v و w مولفه‌های تغییر مکان در جهت‌های محوری (x)، محیطی (θ) و شعاعی (z) است.



شکل ۱. هندسه پوسته استوانه‌ای و مختصات مرجع



شکل۲. چیدمان لایه‌های پوسته استوانه‌ای ساخته شده از مواد مرکب

بر پایه فرضیات غیرخطی هندسی ون‌کارمن، جابه‌جایی‌های صفحه‌ای u و v بسیار کوچک بوده و در روابط کرنش- جابه‌جایی فقط آن دسته از عبارت‌هایی که به w (جابه‌جایی در جهت عرضی) وابسته‌اند، باقی می‌ماند و از دیگر عبارت‌های غیرخطی صرف نظر می‌شود. چرخش‌ها نسبت به صفحه مرجع پوسته تغییر شکل نیافته، ناچیز بوده و چرخش‌ها حول بردارهای عمود بر صفحه مرجع قابل چشم‌پوشی است [۱۰ و ۱۱]. بنا بر فرضیات اخیر روابط کرنش- جابه‌جایی ون‌کارمن در صفحه مرجع (میانی) برای پوسته استوانه‌ای دایروی به‌صورت زیر است [۱۲]:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{x,0} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\
\varepsilon_{\theta,0} &= \frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{R\partial \theta}\right)^2 \\
\gamma_{x\theta,0} &= \frac{\partial u}{R\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{R\partial \theta} \\
\kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
\kappa_\theta &= -\frac{\partial^2 w}{R^2\partial \theta^2} \\
\kappa_{x\theta} &= -2\frac{\partial^2 w}{R\partial x\partial \theta}
\end{aligned} \qquad (۱)
$$

روابط بین مولفه‌های کرنش سطح مرجع با منتجه‌های تنش در پوسته‌های ساخته شده از مواد مرکب لایه‌ای با لایه‌چینی متعامد، بر پایه تئوری کلاسیک لایه‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۳]:

$$
\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x,0} \\ \varepsilon_{\theta,0} \\ \gamma_{x\theta,0} \\ \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} \qquad (۲)
$$

که در آن، N_x، N_θ، $N_{x\theta}$، M_x، M_θ و $M_{x\theta}$ منتجه‌های تنشی، و A_{ij}،B_{ij} و D_{ij}، به‌ترتیب سفتی محوری، محوری - خمشی، سفتی خمشی، بوده و از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
A_{ij} &= \sum_{k=1}^{N} \bar{Q}_{ij}^{(k)}\left(\mathrm{h}_k - \mathrm{h}_{k-1}\right), \\
B_{ij} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \bar{Q}_{ij}^{(k)}\left(\mathrm{h}_k^2 - \mathrm{h}_{k-1}^2\right), \qquad (i,j=1,2,6) \\
D_{ij} &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N} \bar{Q}_{ij}^{(k)}\left(\mathrm{h}_k^3 - \mathrm{h}_{k-1}^3\right),
\end{aligned} \qquad (۳)
$$

که در آن h ضخامت هر لایه و $\bar{Q}_{ij}$ ماتریس سفتی کاهش یافته است. معادلات غیرخطی حرکت دونل، در عبارت‌های منتجه‌های تنشی با در نظر گرفتن عبارت‌های اینرسی صفحه‌ای به‌صورت زیر قابل ارائه است [۱۲]:

$$
N_{x,x} + \frac{1}{R}N_{x\theta,\theta} = \rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (۴)
$$

$$
N_{x\theta,x} + \frac{1}{R}N_{\theta,\theta} = \rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad (۵)
$$

$$
\begin{aligned}
&-M_{x,xx} - \frac{2}{R}M_{x\theta,x\theta} - \frac{1}{R^2}M_{\theta,\theta\theta} + \frac{1}{R}N_\theta \\
&-\frac{2}{R}N_{x\theta}w_{,\theta x} - N_x w_{,xx} - \frac{1}{R^2}N_\theta w_{,\theta\theta} \\
&+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_z
\end{aligned} \qquad (۶)
$$

که در آن ρ چگالی، و q_z نیروی اعمال شده در جهت شعاعی است.

ارتعاشات آزاد خطی

با جای‌گذاری معادلات (۱) و (۲) در معادلات (۴) تا (۶) و حذف عبارت‌های غیرخطی و نیروی عرضی q_z و نوشتن رابطه به فرم ماتریسی داریم:

$$
\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho h & 0 & 0 \\ 0 & \rho h & 0 \\ 0 & 0 & -\rho h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix} \qquad (۷)
$$

L_{ij}ها عملگرهای دیفرانسیلی هستند که رابطه آن‌ها در پیوست (الف) آمده است. شرایط مرزی (در $x=0$ و $x=L$) در حالتی که پوسته استوانه‌ای دایروی دوسردرگیر باشد به‌صورت زیر است:

$$
u=0,\ v=0,\ w=0,\ w_{,x}=0 \qquad (۸)
$$

در ابتدا برای حل ارتعاشات آزاد خطی، میدان جابه‌جایی با فرض ارضاء شدن کلیه شرایط مرزی به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۱۴]:

$$
\begin{aligned}
u(x,\theta,t) &= \bar{u}(x,\theta)e^{i\omega t} \\
v(x,\theta,t) &= \bar{v}(x,\theta)e^{i\omega t} \\
w(x,\theta,t) &= \bar{w}(x,\theta)e^{i\omega t}
\end{aligned} \qquad (۹)
$$

که در آن $\bar{u}(x,\theta)$، $\bar{v}(x,\theta)$ و $\bar{w}(x,\theta)$ به‌ترتیب شکل مودها در جهت محوری، محیطی و عرضی بوده و می‌تواند به‌صورت زیر فرض شود [۱۴]:

$$
\begin{aligned}
\bar{u}(x,\theta) &= U f_{11}(x,\theta) \\
\bar{v}(x,\theta) &= V f_{21}(x,\theta) \\
\bar{w}(x,\theta) &= W f_{31}(x,\theta)
\end{aligned} \qquad (۱۰)
$$

در رابطه (۱۰)، U، V و W بردارهای ویژه و ضرایب نامعلومی است که دامنه مرتبط با شکل مود نظیر را تأمین می‌کند. $f_{ij}(x,\theta)$ها توابعی است که افزون بر ارائه شکل مود قابل قبول، شرایط مرزی هندسی مسئله را نیز ارضاء می‌کند و به‌صورت زیر فرض می‌شود [۱۵].

$$
\begin{aligned}
f_{11}(x,\theta) &= \Phi_m(x)\cos(n\theta) \\
f_{21}(x,\theta) &= \Psi_m(x)\sin(n\theta) \\
f_{31}(x,\theta) &= \Psi_m(x)\cos(n\theta)
\end{aligned} \qquad (۱۱)
$$

که در آن m و n به ترتیب تعداد نیم‌موج‌های طولی و تعداد موج‌های محیطی تشکیل شده در هر مود ($r=1,2,3,\dots,N$) و:

$$
\begin{aligned}
\Phi_m(x) &= -\sin\frac{\mu}{R}\left(\frac{L}{2}-x\right) + k\sinh\frac{\mu}{R}\left(\frac{L}{2}-x\right) \\
\Psi_m(x) &= \cos\frac{\mu}{R}\left(\frac{L}{2}-x\right) + k\cosh\frac{\mu}{R}\left(\frac{L}{2}-x\right)
\end{aligned} \qquad (۱۲)
$$

برای mهای فرد و:

$$
\begin{aligned}
\Phi_m(x) &= \cos\frac{\mu}{R}\left(\frac{L}{2}-x\right) + k\cosh\frac{\mu}{R}\left(\frac{L}{2}-x\right) \\
\Psi_m(x) &= -\sin\frac{\mu}{R}\left(\frac{L}{2}-x\right) + k\sinh\frac{\mu}{R}\left(\frac{L}{2}-x\right)
\end{aligned} \qquad (۱۳)
$$

برای mهای زوج و:

$$k=\frac{\sin\left(\mu L/2R\right)}{\sinh\left(\mu L/2R\right)} \qquad (۱۴)$$

که در آن، μها از حل دو معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$\tan\left(\mu L/2R\right)\pm\tanh\left(\mu L/2R\right)=0 \qquad (۱۵)$$

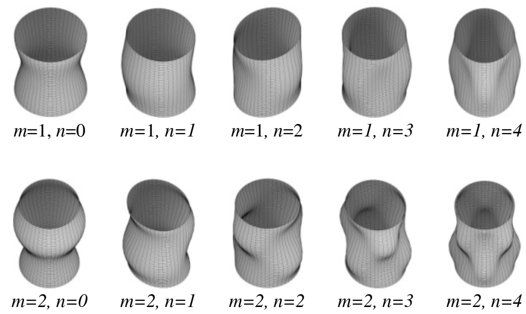
با استفاده از روش گالرکین، چنانچه $\bar{u}(x,\theta)$، $\bar{v}(x,\theta)$ و $\bar{w}(x,\theta)$ به ترتیب در معادلات (۷) ضرب شود، با انتگرال‌گیری روی مرزهای استوانه، معادلات زیر را در فرم ماتریسی نتیجه می‌دهد:

$$\begin{bmatrix}\rho h\omega^2+k_{11} & k_{12} & k_{13}\\ k_{21} & \rho h\omega^2+k_{22} & k_{23}\\ k_{31} & k_{32} & -\rho h\omega^2+k_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U\\V\\W\end{Bmatrix}=0 \qquad (۱۶)$$

که در آن k_{rs} از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$k_{rs}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{l}L_{rs}\{f_{s1}\}f_{r1}\,dx\,d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{l}f_{r1}^{2}\,dx\,d\theta} \qquad (۱۷)$$

در معادله (۱۶) برای داشتن جواب، دترمینان ماتریس باید صفر شود. با حل این معادله، برای هر ترکیبی از m و n، سه فرکانس طبیعی به‌دست خواهد آمد که پایین‌ترین آن‌ها مربوط به مودی است که در آن مولفه عرضی جابه‌جایی غالب است. تعدادی از شکل مودها در حالتی که جابه‌جایی شعاعی غالب است در شکل ۳ نشان داده شده است. بنابراین فرکانس طبیعی ω سامانه به‌دست می‌آید. با تعیین فرکانس طبیعی و جای‌گذاری آن در معادله (۱۶)، می‌توان بردارهای ویژه U، V و W را تعیین کرد.



شکل۳. شکل مودها به ازای تعداد موج‌های مشخص m و n

به این ترتیب، میدان جابه‌جایی در جهت محوری (x)، محیطی (θ) و شعاعی (z) به شرح زیر قابل توصیف است:

$$\begin{aligned}u(x,\theta,t)&=\sum_{r=1}^{N}\xi_r(t)\bar{u}_r(x,\theta)\\ v(x,\theta,t)&=\sum_{r=1}^{N}\xi_r(t)\bar{v}_r(x,\theta)\\ w(x,\theta,t)&=\sum_{r=1}^{N}\xi_r(t)\bar{w}_r(x,\theta)\end{aligned} \qquad (۱۸)$$

که در آن، $\xi_r(t)$ ها مختصات تعمیم یافته مودال، تنها مجهولات مسئله و توابع غیرخطی زمانی است. زیرنویس $r(r=1, 2, 3,\ldots,N)$ نشان‌دهنده شماره مود ارتعاشی است.

معادلات غیرخطی حاکم بر ارتعاشات

انرژی کرنش (U_s)، انرژی جنبشی (T_s)، و کار انجام شده توسط نیروهای خارجی (W_s) روی پوسته به ترتیب از روابط (۱۹)، (۲۰) و (۲۱) محاسبه می‌شود [۱۱]:

$$\begin{aligned}U_s=\frac{1}{2}\int_0^{L}\int_0^{2\pi}&\left[N_x\varepsilon_{x,0}+N_\theta\varepsilon_{\theta,0}+N_{x\theta}\gamma_{x\theta,0}\right.\\ &\left.+M_x\kappa_x+M_\theta\kappa_\theta+M_{x\theta}\kappa_{x\theta}\right]R\,d\theta\,dx\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

$$T_s=\frac{1}{2}\rho_s h\int_0^{2\pi}\int_0^{L}\left(\dot{u}^2+\dot{v}^2+\dot{w}^2\right)dx\,R\,d\theta \qquad (۲۰)$$

$$W_s=\int_0^{2\pi}\int_0^{L}\left(q_x u+q_\theta v+q_z w\right)dx\,R\,d\theta \qquad (۲۱)$$

نقطه بالای علائم، مشتق نسبت به زمان را نشان می‌دهد. q_x، q_θ و q_z به‌ترتیب نیروهای توزیع شده در واحد سطح در جهت محوری، محیطی و شعاعی است. طبق اصل همیلتون داریم [۱۶]:

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta U_s-\delta T_s-\delta W_s\right)dt=0 \qquad (۲۲)$$

تغییرات انرژی کرنش الاستیک (δU_s) و انرژی جنبشی (δT_s) پوسته و تغییرات کار انجام شده توسط نیروهای خارجی روی پوسته (δW_s) از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1}\delta U_s\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^{L}\int_0^{2\pi}&\left(N_x\,\delta\varepsilon_{x,0}+N_\theta\,\delta\varepsilon_{\theta,0}+N_{x\theta}\,\delta\gamma_{x\theta,0}\right.\\ &\left.+M_x\,\delta\kappa_x+M_\theta\,\delta\kappa_\theta+M_{x\theta}\,\delta\kappa_{x\theta}\right)R\,d\theta\,dx\,dt\end{aligned} \qquad (۲۳)$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta T_s\,dt=-\rho_s h\int_{t_o}^{t_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{L}\left(\ddot{u}\,\delta u+\ddot{v}\,\delta v+\ddot{w}\,\delta w\right)R\,dx\,d\theta\,dt \qquad (۲۴)$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta W_s\,dt=R\int_{t_0}^{t_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{L}\left(q_x\,\delta u+q_\theta\,\delta v+q_z\,\delta w\right)dx\,d\theta\,dt \qquad (۲۵)$$

با وارد کردن روابط (۲۳) تا (۲۵) در رابطه (۲۲)، معادله غیرخطی حاکم بر پوسته بر پایه کرنش‌های ون‌کارمن استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^{L}\int_0^{2\pi}\Bigg[\Bigg\{&N_x\left(R\frac{\partial(\delta u)}{\partial x}+R\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial(\delta w)}{\partial x}\right)+M_x\left(-R\frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2}\right)\\ &+N_\theta\left(\frac{\partial(\delta v)}{\partial\theta}+\delta w+\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial(\delta w)}{\partial\theta}\right)+M_\theta\left(-\frac{\partial^2(\delta w)}{R\,\partial\theta^2}\right)\\ &+N_{x\theta}\left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial\theta}+R\frac{\partial(\delta v)}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial(\delta w)}{\partial\theta}+\frac{\partial(\delta w)}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)\\ &+M_{x\theta}\left(-2\frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x\,\partial\theta}\right)\Bigg\}+\rho_s hR\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u+\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\delta v+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\right)\\ &-R\left(q_x\,\delta u+q_\theta\,\delta v+q_z\,\delta w\right)\Bigg]d\theta\,dx\,dt=0\end{aligned} \qquad (۲۶)$$

که با جای‌گذاری بسط مودال پاسخ (۱۸) در رابطه (۲۶)، به‌همراه استفاده از روش گالرکین، معادلات غیرخطی حاکم بر مختصات تعمیم یافته هر یک از مودها، به فرم زیر به‌دست می‌آید:

$$\int_{t_0}^{t_1}\Big\{\sum_{k=1}^{N} d_{r,k}\,\ddot{\xi}_k(t)+\sum_{k=1}^{N}c_{r,k}\,\xi_k(t) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} a_{r,ijk}\,\xi_i(t)\xi_j(t)\xi_k(t) + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} b_{r,jk}\,\xi_j(t)\xi_k(t) - F_r\Big\}dt=0 \qquad (۲۷)$$

$a_{r,ijk}$، $b_{r,jk}$، $c_{r,k}$ و $d_{r,k}$ ضرایب ثابتی هستند که با انتگرال‌گیری به‌دست می‌آیند و نتایج در پیوست (ب) آورده شده است. r شماره معادله و مود ارتعاشی و F_r کار تعمیم یافته نیروی خارجی است. در این تحقیق، فرض بر وارد شدن تک نیروی شعاعی هارمونیک است، بنابراین نیروی وارد شده در جهت محوری و محیطی صفر در نظر گرفته شده است.

$$F_r=\int_0^{2\pi}\int_0^{L} q_z\,\bar{w}_r(x,\theta)\,dx\,R\,d\theta \qquad (۲۸)$$

تک نیروی توزیع شده عرضی خارجی (q_z) اعمال شده به پوسته در اثر اعمال نیروی متمرکز شعاعی $\tilde{f}$ حاصل می‌شود:

$$q_z=\tilde{f}\,\delta(x-x_0)\,\delta(R\theta-R\theta_0)\cos(\omega t) \qquad (۲۹)$$

که δ تابع دلتای دیراک، $\tilde{f}$ دامنه نیروی شعاعی و x_0 و θ_0 به‌ترتیب نشان‌دهنده موقعیت محوری و زاویه‌ای نقطه اعمال نیرو و ω فرکانس تحریک است. در حل عددی، محل اعمال نیرو در نقطه $x_0=L/2$ و $\theta_0=0$ درنظر گرفته شده است. بنابراین F_r به‌صورت زیر خواهد شد:

$$F_r=\tilde{f}\cos(\omega t)\,\bar{w}_r(L/2,0) \qquad (۳۰)$$

رابطه (۲۷)، دستگاه معادلات توصیف‌کننده ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای دایروی دوسر درگیر ساخته شده از مواد مرکب لایه‌ای با لایه‌چینی متعامد را تشکیل می‌دهد.

نتایج و بحث

هندسه پوسته مبنا که محاسبات بر پایه آن انجام شده است در جدول ۱ داده شده است.

جدول ۱- مشخصات هندسی پوسته مبنا بر حسب **mm**

شعاع (R)	۱۰
ضخامت هر لایه (h)	۰.۱۲۵
طول (L)	۵۰

پوسته با دو نوع جنس ماده مرکب تقویت شده با الیاف از نوع گرافیت/اپوکسی و فلز همسانگرد همگن آلومینیوم مورد تحلیل قرار گرفته که خواص مکانیکی آن‌ها در جدول ۲ داده شده است.

جدول ۲. ویژگی‌های مواد تک لایه

ویژگی	گرافیت/اپوکسی	آلومینیوم
چگالی (ρ) kg/m^3	۱.۶	۲.۷
مدول الاستیسیته (E_1) GPa	۱۳۸	۷۲.۴
مدول الاستیسیته (E_2) GPa	۹	۷۲.۴
مدول برشی (G_{12}) GPa	۶	۲۷.۸۵
ضریب پواسون (ν)	۰.۳	۰.۳

در این مقاله چهار نوع چیدمان در پوسته لایه‌ای گرافیت/اپوکسی فرض شده که دو تای آن‌ها با لایه‌چینی متعامد شامل [۰/۹۰/۰/۰] و [۹۰/۰/۰/۹۰/۰] و دوتای دیگر با چیدمان [۰/۰/۰/۰] و [۹۰/۹۰/۹۰/۹۰] است. چیدمان لایه‌ها برای کلیه شکل‌ها غیر از مواردی که در شکل ذکر شده، [۰/۹۰/۰/۰] است. برای اطمینان از درستی نتایج به‌دست آمده در تحلیل حاضر، فرکانس‌های طبیعی به‌دست آمده از روش تحلیلی با نتایج روش اجزای محدود برای ۱۵ مود اول ارتعاشی پوسته استوانه‌ای دوسرگیردار از جنس آلومینیوم و با مشخصات هندسی پوسته مبنا در جدول ۳ و ضخامت ۰.۵ میلی‌متر، مقایسه شده است. تحلیل اجزای محدود توسط نرم‌افزار Ansys (۱۲۵×۴۸۰ المان، ۴۸۰ در جهت محیطی و ۱۲۵ در جهت طولی و نوع المان مورد استفاده SHELL93) انجام گرفته است. نتایج مقایسه تطابق خوبی را نشان می‌دهد.

همچنین با استفاده از روش حل ارائه شده در این تحقیق، فرکانس طبیعی اصلی (m=1,n=6) برای پوسته استوانه‌ای با مشخصات l=520mm، R=149.4mm، h=.519mm، E=1.98×10^{11}Pa، ρ=7800kg/m^3، ν=0.3 در مرجع [۷]، محاسبه شده و با نتایج موجود در این مرجع مقایسه و در جدول ۴ نشان داده شده است.

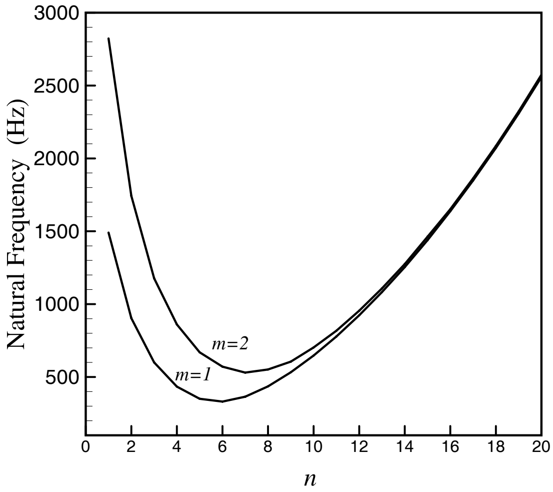
جدول ۳. مقایسه فرکانس‌های طبیعی روش ارائه شده نسبت به روش اجزای محدود برای پوسته آلومینیومی

اختلاف(٪)	کار حاضر	اجزا محدود	n	m	شماره مود
	فرکانس طبیعی (Hz)			مود	
۲.۹	۴۱۱.۸	۳۹۹.۸۵	۵	۱	۱
۲.۸	۴۴۶.۹۸	۴۳۴.۴۳	۴	۱	۲
۲.۵۲	۴۸۸.۱۵	۴۷۵.۸۴	۶	۱	۳
۱.۹۸	۶۲۷.۴۰	۶۱۴.۹۲	۷	۱	۴
۳.۰۹	۶۵۲.۷۵	۶۳۲.۵۵	۳	۱	۵
۳.۲۸	۶۹۰.۸۶	۶۶۸.۱۹	۶	۲	۶
۲.۹۰	۷۴۰.۷۰	۷۱۹.۲۱	۷	۲	۷
۲.۴۴	۷۵۹.۷۴	۷۴۱.۱۵	۵	۲	۸
۱.۶۵	۸۰۶.۱۷	۷۹۲.۸۶	۸	۱	۹
۱.۹۷	۸۷۰.۳۶	۸۵۳.۱۵	۸	۲	۱۰
۲.۲۷	۹۶۵.۳۴	۹۴۳.۳۵	۷	۳	۱۱
۲.۹۹	۱۰۰۸.۳۰	۹۷۸.۰۷	۴	۲	۱۲
۲.۲۱	۱۰۱۵.۱۶	۹۹۲.۷۰	۸	۳	۱۳
۱.۶۸	۱۰۱۸.۰۶	۱۰۰۰.۹۰	۹	۱	۱۴
۲.۵۱	۱۰۴۲.۶۰	۱۰۱۶.۴۰	۶	۳	۱۵

جدول ۴. مقایسه فرکانس‌طبیعی پوسته با نتایج موجود در مرجع [۷].

Model	Frequency (Hz)
Rayleigh–Ritz code DIVA	۳۱۵.۱
Model[1](Donnell's nonlinear shallow-shell theory)	۳۴۰.۳
Model[2] (variational approach)	۳۲۶.۷
Present Work	۳۲۵.۲

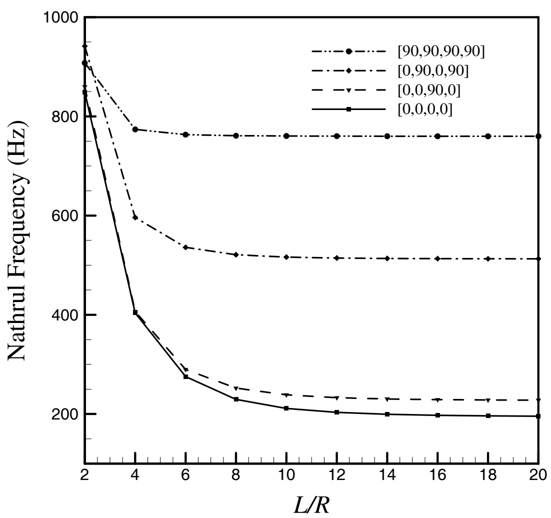
با توجه به شکل ۴، با افزایش تعداد موج‌های محیطی، فرکانس‌های طبیعی ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. فرکانس طبیعی اول برای پوسته مبنا گرافیت/اپوکسی در $n = 6$ و $m = 1$ اتفاق می‌افتد.



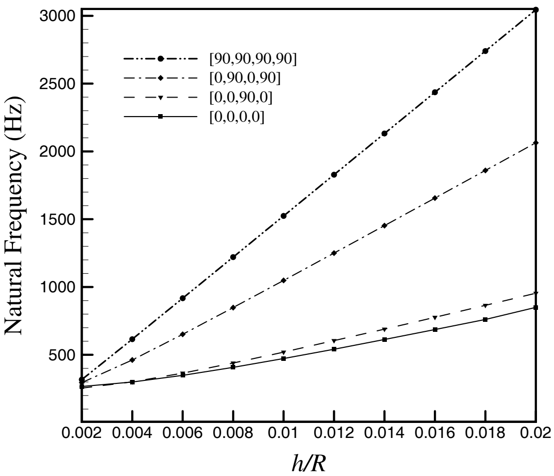
شکل۴. تغییرات فرکانس طبیعی نسبت به تعداد موج‌های محیطی (n)

در اشکال ۵ و ۶ تأثیر هندسه پوسته روی فرکانس‌های طبیعی، برای چهار نوع چیدمان در لایه‌ها، نمایش داده شده است. با افزایش طول استوانه، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. در شکل ۶ اثر ضخامت بر فرکانس طبیعی نشان داده شده است. با افزایش ضخامت، فرکانس طبیعی پوسته افزایش می‌یابد. شکل ۷ اثر چیدمان لایه‌ها بر فرکانس طبیعی را نشان می‌دهد. دو روند مهم به‌طور واضح قابل مشاهده است. اول این‌که نسبت تعداد لایه با الیاف جانبی (لایه‌های ۹۰ درجه) به تعداد لایه‌ها با الیاف‌های طولی (لایه‌های صفر درجه) اثر بیش‌تری روی فرکانس‌های طبیعی دارد. دوم این‌که تعداد بیش‌تر لایه‌ها با الیاف جانبی (لایه‌های ۹۰ درجه) فرکانس طبیعی بالاتری را در پی خواهد داشت.

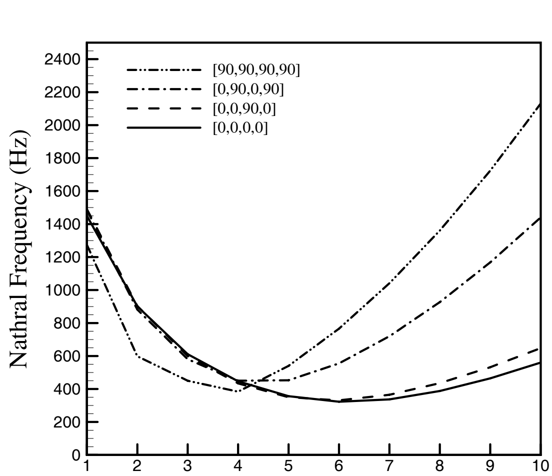
همچنین در این تحقیق، پاسخ ارتعاشی پوسته مبنا برای ۶ مود اول بررسی شده است. مشخصات شش مود اول پوسته در جدول ۵ آورده شده است. با استفاده از نرم‌افزار Maple، فرکانس‌های طبیعی، دامنه شکل مودها و ضرایب $a_{r,ijk}$، $b_{r,jk}$، $c_{r,k}$ و $d_{r,k}$ تعیین شده‌اند. این ضرایب در کد نوشته شده در محیط برنامه‌نویسی نرم‌افزار Matlab، فراخوانده شده و با تشکیل دستگاه معادله (۲۷)، به روش رانگ-کوتا مرتبه چهارم حل شده است.



شکل۵. اثر L/R بر فرکانس طبیعی برای انواع مختلف لایه‌چینی

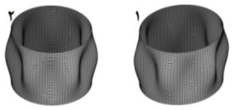
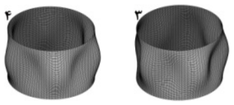
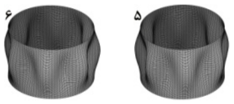


شکل۶. اثر h/R بر فرکانس طبیعی برای انواع مختلف لایه‌چینی



شکل۷. اثر نوع لایه چینی بر فرکانس‌های طبیعی پوسته مبنا

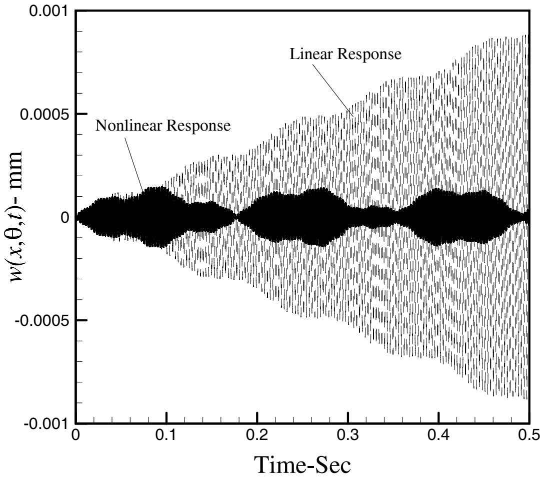
جدول ۵. مشخصات شش مود اول پوسته مبنا

شماره مود	m	n	فرکانس طبیعی (Hz)	شکل مود
۱	۱	۶	۳۳۱.۲۷۳	
۲	۱	۶	۳۳۱.۲۷۳	
۳	۱	۵	۳۵۰.۳۰۳	
۴	۱	۵	۳۵۰.۳۰۳	
۵	۱	۷	۳۶۴.۸۸۲	
۶	۱	۷	۳۶۴.۸۸۲	

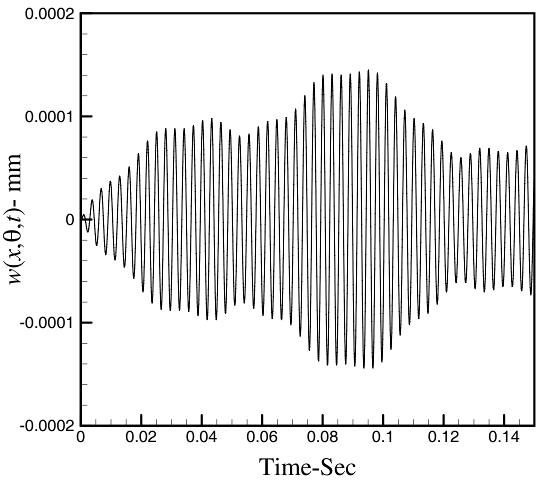
معادله (۲۷) با چشم‌پوشی از عبارت‌های غیرخطی، به یک دستگاه معادله خطی ساده می‌شود. با حل این دستگاه خطی و مقایسه نتایج آن با حل دستگاه معادله غیرخطی اصلی (۲۷)، می‌توان تأثیر عبارت‌های غیرخطی در پاسخ ارتعاشی یک پوسته استوانه‌ای دایروی را مشاهده کرد. به‌طور مثال اگر پوسته استوانه‌ای مبنا، با فرکانس طبیعی اول سامانه یعنی $\omega=\omega_1$=۳۳۱.۲۷۳ تحریک شود، بدیهی است در حالتی که از عبارت‌های غیرخطی صرف‌نظر شده و دستگاه معادله خطی است، دامنه ارتعاشی سامانه با گذشت زمان افزایش یافته و دچار بسامدافزایی می‌شود. در حالی که از حل دستگاه معادله غیرخطی اصلی، در سامانه بسامدافزایی رخ نداده و دامنه ارتعاشات محدود به‌دست می‌آید و این به‌علت وجود عبارت‌های غیرخطی است که باعث محدود شدن دامنه ارتعاشات می‌شود. بنابراین اثرات غیرخطی باعث محدود شدن دامنه ارتعاشات حتی در شرایط تحریک با فرکانس طبیعی می‌شود.

شکل ۸ پاسخ ارتعاشی شعاعی در حالتی که سامانه با فرکانس طبیعی اول تحریک شود در دو حالت خطی و غیرخطی را نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۸، رفتار ارتعاشی در دو حالت خطی و غیرخطی در ابتدای نوسان مشابه است ولی با گذشت زمان بسیار کوتاه، عبارت‌های غیرخطی اثر خود را نشان داده و از بزرگ‌تر شدن دامنه ارتعاش جلوگیری می‌کند این در حالی است که حل خطی، واگرا شدن دامنه ارتعاش را در فاصله زمانی کوتاه نشان می‌دهد. این رفتار در اشکال ۹ تا ۱۳ نیز مشاهده می‌شود. در شکل ۱۱ نمودار فازی حاصل از حل دستگاه خطی که در فرکانس طبیعی اول تحریک شده، ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که در حالت

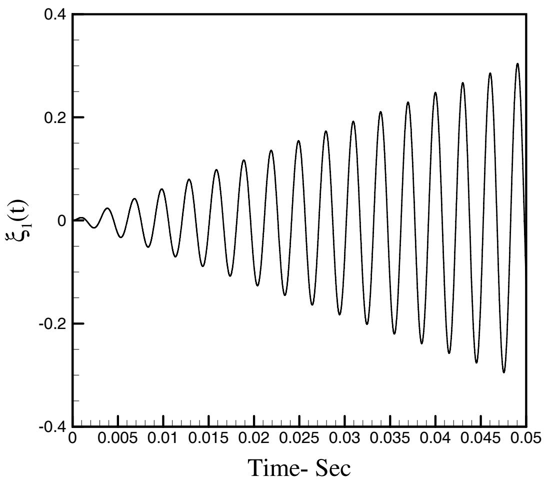
خطی، سامانه دارای سیکل حدی (Limit Cycle) نیست. سیکل حدی حاصل از حل معادلات غیرخطی در شکل ۱۳ نشان داده شده است.



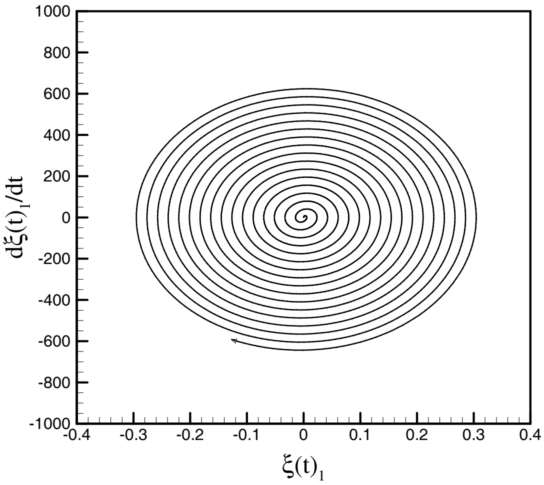
شکل۸. مقایسه پاسخ ارتعاشی شعاعی خطی با غیرخطی ($\omega=\omega_1$)



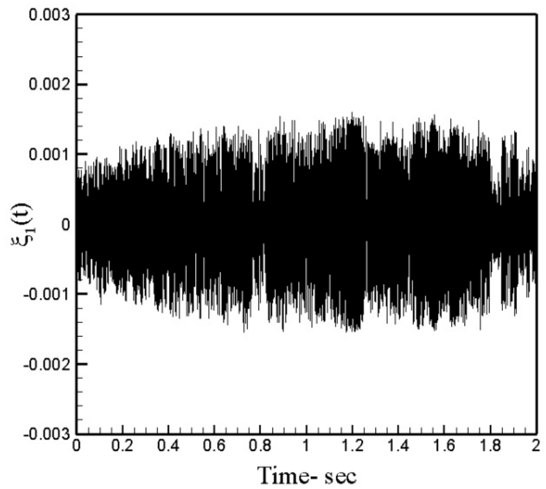
شکل۹. پاسخ ارتعاشی شعاعی غیرخطی ($\omega=\omega_1$)



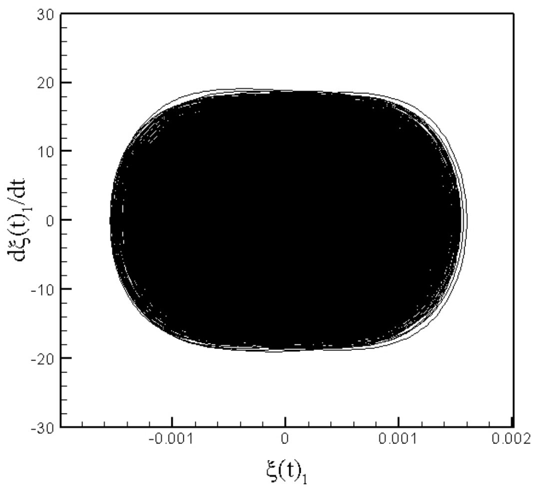
شکل۱۰. پاسخ زمانی حل خطی تحریک در فرکانس طبیعی اول



شکل۱۱. نمودار فازی حل خطی تحریک در فرکانس طبیعی اول



شکل۱۲. پاسخ زمانی حل غیرخطی تحریک در فرکانس طبیعی اول



شکل۱۳. نمودار فازی حل غیرخطی تحریک در فرکانس طبیعی اول

نتیجه‌گیری

در ایـن مقالـه یـک رونـد کلـی بـرای حـل ارتعاشـات غیرخطـی پوسته‌های استوانه‌ای دایروی از جنس ماده مرکب که تحت شـرایط مـرزی دوسـرگیردار قـرار دارد، ارائـه شـد. دسـتگاه معادلـه توصیف‌کننده ارتعاشات غیرخطی در این تحقیق مستقیماً از رابطـه همیلتون بـه‌دست آمـد و چـون حـل تحلیلـی بـر پایـه روش مـودال صورت می‌گیرد، لذا غیرخطی بودن مسئله را می‌توان بـا اسـتفاده از چنـد مـود، تحلیـل کـرده و دقـت تحلیـل را بـالا بـرد. بـرای تحلیـل ارتعاشات غیرخطی و پایداری پوسـته، کـد نـرم‌افـزاری کـه قابلیـت افـزودن آثـاری چـون بارگـذاری آئروالاسـتیک، بارگـذاری هیدروالاستیسیته داخلی را دارد، تهیه شده است. اثرات هندسه، نـوع لایه‌چینی و تعداد موج‌ها روی فرکانس‌های طبیعی بررسـی گردیـد. اثرات غیرخطی روی دامنه ارتعاشات پوسته بررسی گردیـد. اثـرات غیرخطی باعـث محـدود شـدن دامنـه ارتعاشـات حتـی در شـرایط تحریک با فرکانس طبیعی می‌شود.

مراجع

1. Matsuzaki Y., and Kobayashi S., A Theoretical and Experimental Study of the Nonlinear Flexural Vibration of Thin Circular Cylindrical Shells with Clamped Ends. *Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*, v. 12, 1969, pp. 55–62.
2. Chia C. Y., Non-Linear Free Vibration and Post buckling of Symmetrically Laminated Orthotropic Imperfect Shallow Cylindrical Panels with Two Adjacent Edges Simply Supported and the Other Edges Clamped. *International Journal of Solids and Structures*, v. 23, 1987, pp. 1123–1132.
3. Iu V. P., and Chia C. Y., Non-Linear Vibration and Post buckling of Unsymmetric Cross-Ply Circular Cylindrical Shells. *International Journal of Solid Structures*, v. 24, 1988, pp. 195–210.
4. Chiba M., Experimental Studies on a Nonlinear Hydroelastic Vibration of a Clamped Cylindrical Tank Partially Filled with Liquid. *Journal of Pressure Vessel Technology*, v. 115, 1993, pp. 381–388.
5. Abe A., Kobayashi Y., and Yamada G., Non-linear Vibration Characteristics of Clamped Laminated Shallow Shell. *Journal of Sound and vibration*, v. 234, n. 3, 2000, pp. 405-426.
6. Amabili M., Nonlinear Vibrations of Circular Cylindrical Shells with Different Boundary Conditions. *AIAA Journal*, v. 41, n. 6, June 2003.
7. Karagiozisa K.N., Amabili M., Padoussisa M.P., and Misra A.K., Nonlinear vibrations of fluid-filled clamped circular cylindrical shells. *Journal of Fluids and Structures*, v. 21, 2005, pp. 579–595.
8. Pellicano F., Linear and Nonlinear Vibrations of Shells. *2nd International Conference on Nonlinear Normal Modes and Localization in Vibrating Systems*, Samos, June 19-23 2006.
9. Shao Z.S., and Ma G.W., Series Expansion Method Free Vibration Analysis of Laminated Cylindrical Shells by Using Fourier. *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, v. 20, n. 551, 2007.
10. Qatu M. S., *Vibration of Laminated Shells and Plates*. Elsevier Academic Press, Oxford, 2004.
11. Amabili M., *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates*. Cambridge University Press, Italy, 2008.
12. Brush D. O., and Almroth B. O., *Buckling of Bars, Plates, and Shells*. McGraw-Hill, Scarborough, CA, 1975.
13. Hyer M. W., *Stress Analysis of Fiber-Reinforced Composite Materials*., McGraw-Hill, New York, 1998.
14. Soedel W., *Vibrations of Shells and Plates*. Second Edition, Marcel Dekker, New York, 1993.
15. Hirano Y., *Nonlinear Vibrations of Composite Material Shells*. Ph.D. thesis, University of Delaware, 1988
16. Rao S., *Vibration of Continuous Systems*. John Wiley &

پیوست الف)

مقادیر L_{ij} معادلات خطی شده دونل:

$$L_{11}(\ )=A_{11}(\ )_{,xx}+\frac{A_{66}}{R^2}(\ )_{,\theta\theta} \qquad L_{12}(\ )=\frac{A_{12}+A_{66}}{R}(\ )_{,x\theta}$$

$$L_{13}(\ )=-B_{11}(\ )_{,xxx}-\frac{D_{12}+2D_{66}}{R^2}(\ )_{,x\theta\theta}+\frac{A_{12}}{R}(\ )_{,x} \qquad L_{22}(\ )=A_{66}(\ )_{,xx}+\frac{A_{22}}{R^2}(\ )_{,\theta\theta}$$

$$L_{23}(\ )=-\frac{B_{12}+2B_{66}}{R^2}(\ )_{,xx\theta}+\frac{A_{22}}{R^2}(\ )_{,\theta}-\frac{B_{22}}{R^3}(\ )_{,\theta\theta\theta}$$

$$L_{33}(\ )=\frac{2B_{12}}{R}(\ )_{,xx}+D_{11}(\ )_{,xxxx}+\frac{2(D_{12}+2D_{66})}{R^2}(\ )_{,xx\theta\theta}+\frac{2B_{22}}{R^3}(\ )_{,\theta\theta}+\frac{D_{22}}{R^4}(\ )_{,\theta\theta\theta\theta}+\frac{A_{22}}{R^2}(\ )$$

پیوست ب)

ضرایب دستگاه معادلات حاکم بر ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای دایروی:

$$\begin{aligned}
a_{r,ijk}=\int_0^L\int_0^{2\pi}\Bigg[&\left(\frac{R\,A_{11}}{2}\bar{w}_{r,x}\right)\bar{w}_{i,x}(x,\theta)\bar{w}_{j,x}(x,\theta)\bar{w}_{k,x}(x,\theta)+\left(\frac{A_{22}}{2R^3}\bar{w}_{r,\theta}\right)\bar{w}_{i,\theta}(x,\theta)\bar{w}_{j,\theta}(x,\theta)\bar{w}_{k,\theta}(x,\theta)\\
&+\left(\frac{A_{12}}{2R}\bar{w}_{r,x}+\frac{A_{66}}{R}\bar{w}_{r,x}\right)\bar{w}_{i,x}(x,\theta)\bar{w}_{j,\theta}(x,\theta)\bar{w}_{k,\theta}(x,\theta)+\left(\frac{A_{12}}{2R}\bar{w}_{r,\theta}+\frac{A_{66}}{R}\bar{w}_{r,\theta}\right)\bar{w}_{i,x}(x,\theta)\bar{w}_{j,x}(x,\theta)\bar{w}_{k,\theta}(x,\theta)\Bigg]d\theta\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{r,jk}=\int_0^L\int_0^{2\pi}\Bigg[&\left(\frac{A_{12}}{2}\bar{w}_{r}+\frac{RA_{11}}{2}\bar{u}_{r,x}-\frac{RB_{11}}{2}\bar{w}_{r,xx}-\frac{B_{12}}{2R}\bar{w}_{r,\theta\theta}+\frac{A_{12}}{2}\bar{v}_{r,\theta}\right)\bar{w}_{j,x}(x,\theta)\bar{w}_{k,x}(x,\theta)\\
&+\left(\frac{A_{12}}{2R}\bar{u}_{r,x}-\frac{B_{12}}{2R}\bar{w}_{r,xx}+\frac{A_{22}}{2R^2}\bar{v}_{r,\theta}+\frac{A_{22}}{2R^2}\bar{w}_{r}-\frac{B_{22}}{2R^3}\bar{w}_{r,\theta\theta}\right)\bar{w}_{j,\theta}(x,\theta)\bar{w}_{k,\theta}(x,\theta)\\
&+\left(\frac{A_{22}}{R^2}\bar{w}_{r,\theta}\right)\bar{v}_{j,\theta}(x,\theta)\bar{w}_{k,\theta}(x,\theta)+\left(\frac{A_{66}}{R}\bar{w}_{r,x}\right)\bar{u}_{j,\theta}(x,\theta)\bar{w}_{k,\theta}(x,\theta)+\left(R\,A_{11}\bar{w}_{r,x}\right)\bar{u}_{j,x}(x,\theta)\bar{w}_{k,x}(x,\theta)\\
&+\left(A_{66}\bar{w}_{r,\theta}\right)\bar{v}_{j,x}(x,\theta)\bar{w}_{k,x}(x,\theta)+\left(A_{66}\bar{w}_{r,x}\right)\bar{v}_{j,x}(x,\theta)\bar{w}_{k,\theta}(x,\theta)+\left(\frac{A_{12}}{R}\bar{w}_{r,\theta}\right)\bar{u}_{j,x}(x,\theta)\bar{w}_{k,\theta}(x,\theta)\\
&+\left(A_{66}\bar{v}_{r,x}-\frac{2B_{66}}{R}\bar{w}_{r,x\theta}+\frac{A_{66}}{R}\bar{u}_{r,\theta}\right)\bar{w}_{j,x}(x,\theta)\bar{w}_{k,\theta}(x,\theta)+\left(A_{12}\bar{w}_{r,x}\right)\bar{w}_{j}(x,\theta)\bar{w}_{k,x}(x,\theta)\\
&+\left(\frac{A_{66}}{R}\bar{w}_{r,\theta}\right)\bar{u}_{j,\theta}(x,\theta)\bar{w}_{k,x}(x,\theta)+\left(\frac{A_{22}}{R^2}\bar{w}_{r,\theta}\right)\bar{w}_{j}(x,\theta)\bar{w}_{k,\theta}(x,\theta)+\left(A_{12}\bar{w}_{r,x}\right)\bar{v}_{j,\theta}(x,\theta)\bar{w}_{k,x}(x,\theta)\\
&-\left(\frac{B_{12}}{R}\bar{w}_{r,\theta}\right)\bar{w}_{j,xx}(x,\theta)\bar{w}_{k,\theta}(x,\theta)-\left(\frac{B_{22}}{R^3}\bar{w}_{r,\theta}\right)\bar{w}_{j,\theta\theta}(x,\theta)\bar{w}_{k,\theta}(x,\theta)-\left(R\,B_{11}\bar{w}_{r,x}\right)\bar{w}_{j,xx}(x,\theta)\bar{w}_{k,x}(x,\theta)\\
&-\left(\frac{2B_{66}}{R}\bar{w}_{r,x}\right)\bar{w}_{j,x\theta}(x,\theta)\bar{w}_{k,\theta}(x,\theta)-\left(\frac{2B_{66}}{R}\bar{w}_{r,\theta}\right)\bar{w}_{j,x\theta}(x,\theta)\bar{w}_{k,x}(x,\theta)-\left(\frac{B_{12}}{R}\bar{w}_{r,x}\right)\bar{w}_{j,\theta\theta}(x,\theta)\bar{w}_{k,x}(x,\theta)\Bigg]d\theta\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{r,k}=\int_0^L\int_0^{2\pi}\Bigg[&\left(A_{12}\bar{u}_{r,x}-B_{12}\bar{w}_{r,xx}+\frac{A_{22}}{R}\bar{v}_{r,\theta}+\frac{A_{22}}{R}\bar{w}_{r}-\frac{B_{22}}{R^2}\bar{w}_{r,\theta\theta}\right)\bar{w}_{k}(x,\theta)\\
&+\left(A_{12}\bar{v}_{r,\theta}+A_{12}\bar{w}_{r}+R\,A_{11}\bar{u}_{r,x}-R\,B_{11}\bar{w}_{r,xx}-\frac{B_{12}}{R}\bar{w}_{r,\theta\theta}\right)\bar{u}_{k,x}(x,\theta)\\
&+\left(-2B_{66}\bar{w}_{r,x\theta}+A_{66}\bar{u}_{r,\theta}+R\,A_{66}\bar{v}_{r,x}\right)\bar{v}_{k,x}(x,\theta)+\left(A_{12}\bar{u}_{r,x}-B_{12}\bar{w}_{r,xx}+\frac{A_{22}}{R}\bar{v}_{r,\theta}+\frac{A_{22}}{R}\bar{w}_{r}-\frac{B_{22}}{R^2}\bar{w}_{r,\theta\theta}\right)\bar{v}_{k,\theta}(x,\theta)\\
&+\left(A_{66}\bar{v}_{r,x}+\frac{A_{66}}{R}\bar{u}_{r,\theta}-\frac{2B_{66}}{R}\bar{w}_{r,x\theta}\right)\bar{u}_{k,\theta}(x,\theta)+\left(\frac{D_{12}}{R}\bar{w}_{r,\theta\theta}-R\,B_{11}\bar{u}_{r,x}+R\,D_{11}\bar{w}_{r,xx}-B_{12}\bar{v}_{r,\theta}-B_{12}\bar{w}_{r}\right)\bar{w}_{k,xx}(x,\theta)\\
&+\left(-\frac{B_{12}}{R}\bar{u}_{r,x}+\frac{D_{12}}{R}\bar{w}_{r,xx}-\frac{B_{22}}{R^2}\bar{v}_{r,\theta}-\frac{B_{22}}{R^2}\bar{w}_{r}+\frac{D_{22}}{R^3}\bar{w}_{r,\theta\theta}\right)\bar{w}_{k,\theta\theta}(x,\theta)+\left(-2B_{66}\bar{v}_{r,x}-\frac{2B_{66}}{R}\bar{u}_{r,\theta}+\frac{4D_{66}}{R}\bar{w}_{r,x\theta}\right)\bar{w}_{k,x\theta}(x,\theta)\Bigg]d\theta\,dx
\end{aligned}$$

$$d_{r,k}=\int_0^L\int_0^{2\pi}\rho_s hR\left[\bar{u}_r(x,\theta)\,\bar{u}_k(x,\theta)+\bar{v}_r(x,\theta)\,\bar{v}_k(x,\theta)+\bar{w}_r(x,\theta)\,\bar{w}_k(x,\theta)\right]d\theta\,dx$$

$$F_r=\int_0^L\int_0^{2\pi}R\left(q_x\,\bar{u}_r(x,\theta)+q_\theta\bar{v}_r(x,\theta)+q_z\,\bar{w}_r(x,\theta)\right)d\theta\,dx$$