

مدل سازی دینامیکی غیر خطی بازوی انعطاف پذیر با گسسته سازی اجزای محدود

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۸/۱۰

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۰/۱۸

هادی دارابی^۱، محمدرضا الهامی^۲

۱ دانشجوی دکتری، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه جامع امام حسین، تهران

۲ دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه جامع امام حسین، تهران. melhami@ihu.ac.ir

چکیده

در این مقاله مدل سازی دینامیکی بازوهای رباتیک با اعضای انعطاف پذیر بررسی می شود. روش حل براساس معادله لاگرانژ و گسسته سازی به روش المان محدود است. برای به دست آوردن فرم بسته معادله های دینامیکی برای بازوهای رباتیک با اعضای انعطاف پذیر از محاسبات نمادین در جعبه ابزار ریاضیات سمبولیک متلب استفاده شده است. سپس معادله های غیرخطی دینامیکی یک ربات تک لینکی استخراج شده است و با نتایج ارائه شده در سایر مراجع مقایسه شده است. در این پژوهش اثرات غیرخطی مانند مؤلفه های گریز از مرکز، کوریولیس و اثر گرانش در نظر گرفته شده است. سپس معادلات به دست آمده، با استفاده از روش رانگ گوتا برای سطوح مختلف گشتاور تحریک شبیه سازی شده است. نتایج شبیه سازی نشان می دهد که در سطوح پایین گشتاور تحریک، مدل خطی و غیرخطی نتایج یکسانی دارند؛ در حالی که با افزایش سطح تحریک اختلاف مدل خطی و غیرخطی افزایش می یابد و اندازه مؤلفه های الاستیک در مدل غیرخطی کوچک تر می شود.

واژه های کلیدی: ربات انعطاف پذیر، المان محدود، روش لاگرانژ، مدل سازی

Nonlinear modeling of flexible manipulator with finite element discretization

Hadi Darabi¹, Mohammad Reza Elhami²

1 Ph.D. Candidate, Mechanical Engineering Department, Technical and Engineering Faculty, Imam Hossein University, Tehran, Iran

2 Associate Professor, Mechanical Engineering Department, Technical and Engineering Faculty, Imam Hossein University, Tehran, Iran, melhami@ihu.ac.ir

Abstract

In this paper, dynamic modeling of flexible links manipulators is discussed. The modeling approach is based on the Lagrange equations and finite element discretization method. In order to obtain the closed form of dynamic equations for flexible links manipulators, symbolic calculation in MATLAB's symbolic mathematics toolbox is utilized, then the nonlinear dynamic equations of a single-link manipulator have been obtained and compared with the results presented in other references. In this study, the nonlinear effects of centrifugal, Coriolis and gravity are Also considered which is rarely studied in other contributions. Then the equations of motion are solved by the Runge-Kutta method for different levels of excitation torque. The simulation results show that at low levels of excitation torque, the linear and non-linear models have the same results, while with the increase of the excitation level, the difference between the linear and non-linear models is considerable and the size of the elastic components in the non-linear model becomes smaller.

Keywords: flexible manipulator, finite element, Lagrange method, modeling.

۱۲۱

سال ۱۱ - شماره ۲

پاییز و زمستان ۱۴۰۱

نشریه علمی

دانش و فناوری هوا فضا





۱. مقدمه

بازوهای رباتیک انعطاف پذیر در ایستگاه‌های فضایی، بازرسی مخازن سوخت هسته‌ای و تحقیقات زیرآب کاربرد دارد. یکی از موارد کاربرد ربات‌های انعطاف پذیر، صنعت فضایی است. به دلیل ملاحظات وزنی ربات‌های فضایی باید سبک باشند تا بتوانند به فضا پرتاب شوند. به منظور کاهش وزن بازوهای رباتیک، سطح مقطع اجزا کاهش می‌یابد و با کاهش سطح مقطع، انعطاف پذیری ربات بیشتر نمایان می‌شود. به طور کلی با افزایش نسبت بار حمل شده به وزن ربات، سرعت حرکت و پهنای باند کنترل، انعطاف پذیری بازوی رباتیک نمود بیشتری پیدا می‌کند. انعطاف پذیری، باعث ایجاد خطای حالت ماندگار، خطا در ردیابی مسیر و ارتعاشات در مجری نهایی ربات می‌شود. با توجه به دینامیک غیرخطی بازوهای انعطاف پذیر، مدل سازی بهینه و کارآمد بازو برای کنترل مبتنی بر مدل پیش‌نیازی اساسی است [۱].

به دلیل ماهیت پیوسته اعضای ربات انعطاف پذیر، برای مدل سازی دینامیکی از روش‌های گسسته سازی مختلف برای تقریب اعضای پیوسته استفاده می‌شود. این روش‌ها شامل، روش مدهای فرضی^۱، روش اجزای محدود، روش تفاضل محدود و روش پارامتر بندی مدل^۲ است.

روش مدهای فرضی یک تقریب بر پایه سیستم مختصات تعمیم یافته است و از یک ترکیب خطی تعداد محدودی از شکل‌های مد برای تقریب پاسخ سیستم استفاده می‌کند [۲]. مزیت مناسب این روش برای طراحی کنترلر این است که مدل به دست آمده مرتبه پایینی دارد؛ اما انتخاب مدهای فرضی صحیح، سراسر است نیست و برای توصیف میزان تغییر شکل نمی‌توان مستقیم از شکل مدها استفاده کرد. با افزایش تعداد مدهای فرض شده، مدل‌های دینامیکی دقیق تری

انتظار می‌رود، اما مدل برای طراحی کنترلر پیچیده تر خواهد بود. به همین دلیل، اغلب تعداد مدهای فرضی، به یک عدد کوچک محدود می‌شود تا مدل مرتبه کاهش یابد و مدل برای کنترل بی‌درنگ مناسب باشد.

در روش اجزای محدود، اعضای پیوسته مسئله به تعداد متناهی المان تقسیم می‌شود. تابع تقریبی که در هر المان فرض می‌شود. برای نشان دادن تابع میدان مجهول در حوزه حل استفاده می‌شود. توابع تقریبی، توابع درون‌یابی عددی عملکرد مجهول و مشتقات آن در داخل هر المان به ازای مقادیر در گره‌های آن المان است. به این ترتیب یک سیستم پیوسته به یک سیستم با ابعاد محدود تبدیل می‌شود [۲].

روش المان محدود برای مدل سازی دینامیک روبات‌های انعطاف پذیر که شامل چند عضو با انواع مختلف مفصل هستند، مناسب تر از سایر روش‌ها است [۳]. علاوه بر این، المان محدود قادر به مدیریت شرایط غیرخطی و بی‌نظمی در ساختار و شرایط مرزی مختلط است [۴]. روش المان نسبت به سایر روش‌ها دقیق تر اما بار محاسباتی بیشتری دارد [۵]. همچنین در روش المان محدود، قیدهای سینماتیکی را ساده تر می‌توان به سیستم اعمال کرد. این قیدها اغلب به دلیل تعامل با محیط یا همکاری ربات‌ها و ایجاد زنجیره بسته سینماتیکی به مسئله وارد می‌شود.

برای به دست آوردن معادلات حرکت بازوهای انعطاف پذیر، المان محدود همراه با رویکردهای تحلیلی مختلف استفاده شده است؛ مانند رویکرد مبتنی بر معادله‌های لاگرانژ [۶-۹] بر اساس معادله‌های نیوتن اوایلر [۱۰، ۱۱] و رویکرد مبتنی بر معادله‌های کین [۱۲]. مدل سازی ربات‌های انعطاف پذیر از نظر تعداد اعضا و ابعاد قابل دسته بندی است. بسیاری از مدل‌ها برای ربات‌های تک لینکی توسعه داده شده‌اند [۴، ۱۳]. مشابه مورد ربات تک لینکی، روش المان محدود

و مدهای فرضی نیز برای مدل‌سازی ربات‌های انعطاف‌پذیر دو عضوی بررسی شده است. یانگ و سادلر [۱۴] و دوگانو و استفانپولوس [۱۵] مدل‌های المان محدود را برای توصیف انحراف یک ربات انعطاف‌پذیر دو عضوی توسعه داده‌اند. لوکا و سیسیلیانو از روش مدهای فرضی برای به‌دست آوردن یک مدل دینامیکی برای ربات‌های انعطاف‌پذیر چند عضوی استفاده کرده‌اند [۱۶]. سابودی و موریس یک روش سیستماتیک برای استخراج معادله‌های دینامیکی برای ربات با N عضو ارائه کرده‌اند که در آن از دو ماتریس تغییر شکل یکنواخت به‌ترتیب برای توصیف حرکات صلب و انعطاف‌پذیر استفاده شده است [۵]. کورایم و دهکردی مدل‌سازی دینامیکی ربات‌های همکار و متحرک را با روش گیبس و گسسته‌سازی مدهای فرضی انجام داده‌اند [۱۷]. فرم بسته معادله‌های دینامیکی برای ربات انعطاف‌پذیر تک‌عضوی با گسسته‌سازی اجزاء محدود، توسط توخی و همکاران ارائه شده است [۶]. برای ربات دو عضوی در [۱۸] فرم بسته معادله‌های دینامیکی با گسسته‌سازی به روش مدهای فرضی آمده است. چو و دانگ روش جدیدی برای مدل‌سازی دینامیکی ربات انعطاف‌پذیر دو عضوی عمومی که از یک مفصل منشوری و یک مفصل دورانی تشکیل شده است را ارائه داده‌اند علاوه‌براین، یک الگوریتم مبتنی بر روش دوبخشی^۳ برای تحلیل دینامیک معکوس روبات‌های انعطاف‌پذیر پیشنهاد شده است [۱۹]. در غالب تحقیقات انجام‌شده اثر نیروی وزن در نظر گرفته نشده است؛ اما بسیاری از ربات‌ها در صفحه عمودی کار می‌کنند و چشم‌پوشی از نیروی جاذبه می‌تواند خطای زیادی در کنترل و شبیه‌سازی ایجاد کند؛ پس در این تحقیق اثر نیروی جاذبه در مدل‌سازی لحاظ شده است. همچنین، در بسیاری از کارهای مشابه تغییر شکل الاستیک اجزاء، کوچک فرض شده و

معادله‌های بر اساس آن ارائه شده است. این رویکرد حجم معادله‌ها را کاهش داده ولی در ربات‌های خیلی انعطاف‌پذیر^۴ خطای قابل‌ملاحظه‌ای ایجاد می‌کند؛ اما در این مقاله خمش جزئی اجزا در نظر گرفته شده و به‌همین دلیل از روابط ارائه‌شده می‌توان برای ربات‌های خیلی انعطاف‌پذیر استفاده کرد. از دیگر ویژگی‌های این کار در نظر گرفتن نیروهای کوریولیس و گریز از مرکز است که در بسیاری از تحقیقات مشابه از آن‌ها صرف‌نظر شده است.

در قسمت بعد، روابط سینماتیکی و مدل دینامیکی یک بازوی صفحه‌ای چند عضوی با استفاده از گسسته‌سازی FEM و روش تحلیلی لاگرانژ توصیف شده است، مفاصل به‌صورت لولایی و ربات به‌صورت سری در نظر گرفته شده است. سپس با حل تحلیلی، معادله‌های دینامیکی ربات تک‌عضوی انعطاف‌پذیر ارائه شده است. گام بعدی شامل اعتبارسنجی مدل دینامیکی ربات تک‌عضوی است که با مقایسه مقاله‌های مشابه [۶، ۲۰، ۲۱] انجام شده است. در پایان نتیجه‌گیری و بحث نتایج آمده است.

۲. مدل‌سازی ربات انعطاف‌پذیر

در این قسمت روابط لازم برای استخراج معادله‌های دینامیکی برای ربات انعطاف‌پذیر سری با n عضو آمده است. مدل دینامیکی با استفاده از معادله لاگرانژ به دست آمده است؛ و روش گسسته‌سازی، المان محدود است. شماتیکی از بازوی انعطاف‌پذیر با دو عضو در شکل (۱) نشان داده شده است. ربات به‌صورت صفحه‌ای و تمام مفاصل لولایی هستند. هر یک از اجزا به‌صورت یک تیر انعطاف‌پذیر مدل شده است هر عضو آزادانه می‌تواند در صفحه خم شود اما در جهت عمود بر صفحه نمی‌تواند خم شود. در لولاها تویی که شامل موتور و گیربکس هستند، قرار دارند و در انتهای عضو آخر بار خارجی قرار



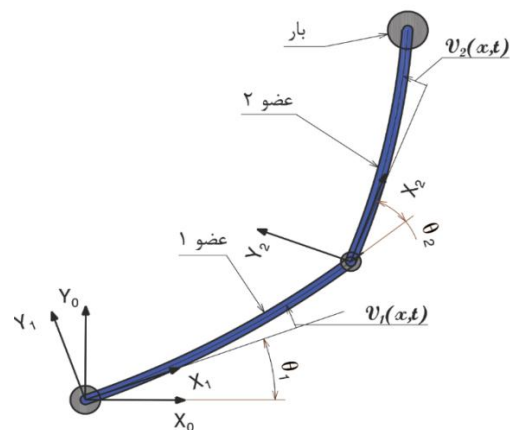


دارد. برای جلوگیری از پیچیدگی حاصل از تغییر طول عضو، طول عضو ثابت در نظر گرفته می شود. علاوه بر این، از تغییر شکل برشی و تأثیر نیروی محوری چشم پوشی می شود. ممان اینرسی مقطع I ، اینرسی تویی I_h ، چگالی عضو ρ و طول l در نظر گرفته شده است. وزن بار M_p و اینرسی بار، I_p است. شتاور کنترل $\tau_i(t)$ در مفصل توسط موتور محرک اعمال می شود. چارچوب $X_i Y_i$ روی محور عضو i قرار دارد، جابه جایی زاویه ای هر عضو از بازو نسبت به عضو قبلی توسط $\theta_i(t)$ نشان داده می شود. فرض می شود که ارتفاع بازو (که در جهت z اندازه گیری می شود) بیشتر از عرض آن باشد، بنابراین، بازوی رباتیک در صفحه افقی به طور محسوس لرزش (انعطاف پذیری) دارد.

ماتریس تبدیل صلب A_i از چارچوب $X_{i-1} Y_{i-1}$ به چارچوب $X_i Y_i$ به صورت معادله (۱) نشان داده می شود.

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{bmatrix} \quad (1)$$

ماتریس تبدیل الاستیک E_i حاصل از خمش الاستیک بازوی i به صورت معادله (۲) نشان داده می شود [۲۲].



شکل ۱. بازوی رباتیک انعطاف پذیر دو عضوی

$$E_i = \begin{bmatrix} 1 & -\left. \frac{\partial v_i(x_i, t)}{\partial x_i} \right|_{x_i=l_i} \\ \left. \frac{\partial v_i(x_i, t)}{\partial x_i} \right|_{x_i=l_i} & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

که در آن $v_i(x_i, t)$ خمش الاستیک عضو i در یک نقطه روی تیر به مختصات x_i ($0 \leq x_i \leq l_i$) است و ماتریس تبدیل کلی از چارچوب $X_0 Y_0$ به چارچوب $X_i Y_i$ به صورت بازگشتی با معادله (۳) نشان داده می شود.

$$T_i = T_{i-1} E_{i-1} A_i = \hat{T}_{i-1} A_i; \quad \hat{T}_0 = I \quad (3)$$

که در آن I ماتریس همانی است بردار موقعیت یک نقطه از عضو خم شده i در چارچوب همان عضو $(X_i Y_i)$ به صورت معادله (۴) نمایش داده می شود.

$${}^i r_i(x_i) = \begin{bmatrix} x_i \\ v_i(x_i, t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

${}^i r_i$ نشان دهنده مختصات یک نقطه از عضو i در چارچوب مرجع $(X_0 Y_0)$ است و موقعیت مرکز چارچوب متصل به عضو $i+1$ نسبت به چارچوب $X_i Y_i$ به صورت معادله (۵) است.

$${}^i P_{i+1} = {}^i r_i(l_i) \quad (5)$$

در صورتی که ${}^i P_i$ مختصات مرکز چارچوب i در چارچوب $(X_0 Y_0)$ باشد با توجه به تعریف ماتریس تبدیل، ${}^i r_i$ و ${}^i P_{i+1}$ را می توان به صورت معادله (۶) و (۷) بیان کرد:

$${}^i r_i = {}^0 P_i + {}^0 T_i {}^i r_i \quad (6)$$

$${}^0 P_{i+1} = {}^0 P_i + {}^i T_i {}^i P_{i+1} \quad (7)$$

برای به دست آوردن معادله های حرکت، باید انرژی جنبشی، پتانسیل و کار نیروهای غیر پایستار محاسبه شود. انرژی جنبشی سیستم می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$C = C_R + C_L + C_{PL} \quad (8)$$

که C_R انرژی جنبشی مربوط به روتور و C_L انرژی جنبشی مربوط به اجزای انعطاف پذیر و C_{PL} انرژی جنبشی مربوط به بار است. C_R برای عضو i ام برابر است با:

$$U_e = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \rho_i \int_0^{l_i} (EI)_i \left(\frac{d^2 v_i(x_i, t)}{dx_i^2} \right) dx_i \quad (15)$$

که E و I به ترتیب، مدول یانک و ممان سطح مقطع (ممان دوم اینرسی) عضو هستند. انرژی پتانسیل مربوط به گرانش با در نظر گرفتن سطح پتانسیل صفر در مبدأ به صورت معادله (۱۶) محاسبه می‌شود.

$$U_g = - \sum_{i=1}^n (\rho A)_i \int_0^{l_i} [g_x g_y] {}^0 r_i(x_i) dx_i \quad (16)$$

تا اینجا عباراتی برای انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی برحسب $v_i(x_i, t)$ تابع خمش تیر الاستیک و زوایای چرخش صلب $\theta_i(t)$ بیان شده است. در روش المان محدود v_i به صورت ضرب جابه‌جایی‌های گرهی $q_{ij}(t)$ در توابع شکل $N_{ij}(x_i)$ در نظر گرفته می‌شود.

$$v_i(x_i, t) = N_{ij}(x_i) q_{ij}(t) \quad (17)$$

تابع شکل برای تیر با المان دو گرهی به صورت معادله (۱۸) است.

$$N(x) = \left[\frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1, \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}, x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}, \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \right] \quad (18)$$

M_{Li} جرم مؤثر در انتهای عضو i ام است که برای عضو آخر برابر با جرم بار خارجی و برای سایر اعضا جرم اعضای انتهایی و جرم هاب اضافه می‌شود. و برای هر عضو ربات دو عضوی به صورت معادله (۱۹) محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} M_{L1} &= m_2 + m_{h2} + M_p \\ M_{L2} &= M_p \end{aligned} \quad (19)$$

و J_{ii} اینرسی مؤثر عضو i ام است و به روشی مشابه برای ربات دو عضوی برای هر عضو به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} J_{L1} &= J_{o2} + J_{h2} + J_p + M_p l_2^2 \\ J_{L2} &= J_p \end{aligned} \quad (20)$$

$$C_R = \frac{1}{2} G_i^2 J_{hi} \dot{\alpha}_i^2 \quad (9)$$

که G_i ضریب تبدیل گیربکس و J_{hi} اینرسی موتور و هاب است. که α_i سرعت زاویه‌ای روتور حول محور i است. انرژی جنبشی عضو الاستیک برابر است با:

$$C_{Li} = \frac{1}{2} \rho_i A_i \int_0^{l_i} {}^0 \dot{r}_i^T(x_i) {}^0 \dot{r}_i(x_i) dx_i \quad (10)$$

که در آن $\dot{r}_i(x_i)$ بردار سرعت نقاط است و از مشتق‌گیری زمانی از معادله (۴) به صورت معادله (۱۱) به دست می‌آید.

$${}^0 \dot{r}_i(x_i) = {}^0 \dot{P}_i + \dot{T}_i {}^i r_i(x_i) + T_i {}^i \dot{r}_i(x_i) \quad (11)$$

و \dot{P}_i از معادله (۵) به صورت معادله (۱۲) به دست می‌آید.

$${}^0 \dot{P}_{i+1} = {}^i \dot{r}_i(l_i) \quad (12)$$

انرژی جنبشی کل بازو به همین روش با معادله (۱۳) محاسبه می‌شود.

$$C_L = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \rho_i \int_0^{l_i} {}^0 \dot{r}_i^T(x_i) {}^0 \dot{r}_i(x_i) dx_i \quad (13)$$

انرژی جنبشی مربوط به بار خارجی به صورت معادله (۱۴) محاسبه می‌شود [۲۲].

$$C_{PL} = \frac{1}{2} M_p \dot{P}_{n+1}^T \dot{P}_{n+1} + \frac{1}{2} I_p \left(\dot{\Omega}_n + \dot{v}'_n(l_n) \right)^2 \quad (14)$$

که در آن $\dot{\Omega}_n = \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i + \sum_{k=1}^{n-1} \dot{v}'_k(l_k)$ برابر با سرعت زاویه‌ای مبدأ عضو n ام است انرژی پتانسیل از خم شدن عضو است. فرض می‌شود ارتفاع اعضای موردنظر، از ضخامت آن به‌طور قابل توجهی بزرگ‌تر است، می‌توان اثر جابه‌جایی‌های برشی را نادیده گرفت. به این ترتیب، انرژی پتانسیل بازو را می‌توان به صورت معادله (۱۵) نوشت [۲۲].



$$\begin{aligned}
& {}^0\dot{r}_i^T(x_i) {}^0\dot{r}_i(x_i) \\
& = \left({}^0\dot{P}_i + \dot{T}_i {}^i r_i(x_i) \right. \\
& \left. + T_i {}^i \dot{r}_i(x_i) \right)^T \left({}^0\dot{P}_i + \dot{T}_i {}^i r_i(x_i) \right. \\
& \left. + T_i {}^i \dot{r}_i(x_i) \right) \\
& = {}^0\dot{P}_i^T {}^0\dot{P}_i + {}^0\dot{P}_i^T \dot{T}_i {}^i r_i(x_i) \\
& + {}^0\dot{P}_i^T T_i {}^i \dot{r}_i(x_i) + {}^i r_i^T(x_i) \dot{T}_i^T {}^0\dot{P}_i \\
& + {}^i r_i^T(x_i) \dot{T}_i^T T_i {}^i r_i(x_i) \\
& + {}^i r_i^T(x_i) \dot{T}_i^T T_i {}^i \dot{r}_i(x_i) \\
& + {}^i \dot{r}_i^T(x_i) T_i^T {}^0\dot{P}_i \\
& + {}^i \dot{r}_i^T(x_i) T_i^T \dot{T}_i {}^i r_i(x_i) \\
& + {}^i \dot{r}_i^T(x_i) T_i^T T_i {}^i \dot{r}_i(x_i)
\end{aligned} \quad (23)$$

عبارت بالا را به صورت زیر ساده می کنیم.

$$\begin{aligned}
{}^0\dot{r}_i^T(x_i) {}^0\dot{r}_i(x_i) & = {}^0\dot{P}_i^T {}^0\dot{P}_i + 2 {}^0\dot{P}_i^T \dot{T}_i {}^i r_i(x_i) + 2 {}^0\dot{P}_i^T T_i {}^i \dot{r}_i(x_i) \\
& + {}^i r_i^T(x_i) \dot{T}_i^T \dot{T}_i {}^i r_i(x_i) \\
& + {}^i r_i^T(x_i) T_i^T T_i {}^i \dot{r}_i(x_i) \\
& + 2 {}^i \dot{r}_i^T(x_i) \dot{T}_i^T T_i {}^i \dot{r}_i(x_i)
\end{aligned} \quad (24)$$

عبارت بالا هنوز توسط هسته ریاضیات سمبولیک متلب قابل انتگرال گیری نیست. با توجه به خاصیت زیر در ضرب بردارها:

$$A^T B = \text{trace}(A B^T) \quad (25)$$

عبارات معادله (24) را با توجه به رابطه (25) به صورت زیر می نویسیم.

$$\begin{aligned}
& {}^0\dot{r}_i^T(x_i) {}^0\dot{r}_i(x_i) \\
& = {}^0\dot{P}_i^T {}^0\dot{P}_i + 2 {}^0\dot{P}_i^T \dot{T}_i {}^i r_i(x_i) + 2 {}^0\dot{P}_i^T T_i {}^i \dot{r}_i(x_i) \\
& + \text{trace}(\dot{T}_i {}^i r_i(x_i) {}^i r_i^T(x_i) \dot{T}_i^T) \\
& + \text{trace}(T_i {}^i \dot{r}_i(x_i) {}^i \dot{r}_i^T(x_i) T_i^T) \\
& + 2 \text{trace}(\dot{T}_i {}^i r_i(x_i) {}^i \dot{r}_i^T(x_i) T_i^T)
\end{aligned} \quad (26)$$

با جایگذاری (26) در رابطه (10) داریم.

$$\begin{aligned}
C_L & = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \rho_i \int_0^{l_i} {}^0\dot{r}_i^T(x_i) {}^0\dot{r}_i(x_i) dx_i \\
& = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \rho_i l_i {}^0\dot{P}_i^T {}^0\dot{P}_i \\
& + \sum_{i=1}^n \rho_i {}^0\dot{P}_i^T \dot{T}_i \int_0^{l_i} {}^i r_i(x_i) dx_i \\
& + \sum_{i=1}^n \rho_i {}^0\dot{P}_i^T T_i \int_0^{l_i} {}^i \dot{r}_i(x_i) dx_i \\
& + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \rho_i \text{trace}(\dot{T}_i \left(\int_0^{l_i} {}^i r_i(x_i) {}^i r_i^T(x_i) \right. \\
& \left. + \int_0^{l_i} {}^i \dot{r}_i(x_i) {}^i \dot{r}_i^T(x_i) \right. \\
& \left. + \int_0^{l_i} {}^i r_i(x_i) {}^i \dot{r}_i^T(x_i) \right)
\end{aligned} \quad (27)$$

معادله لاگرانژ برای سیستم های پایستار و نامقید به صورت معادله (21) است.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1 \dots N \quad (21)$$

که در آن q_i مختصات تعمیم یافته و Q_i ورودی های تعمیم یافته و N تعداد مختصات تعمیم یافته و L لاگرانژین است. وقتی معادلات لاگرانژ برای یک بازوی رباتیک بسط داده شود؛ معادله دینامیک ربات به صورت معادله (22) خواهد شد.

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + K = Q \quad (22)$$

که در آن q مختصات تعمیم یافته است و $M(q)$ ماتریس جرم و تابعی از موقعیت مفاصل، $C(q, \dot{q})$ ماتریس مؤلفه های کوریولیس و گریز از مرکز است و $G(q)$ بردار مؤلفه های گرانش و K ماتریس سختی و Q نیروهای (نیرو و گشتاور) توسعه یافته است.

3. حل نمادین معادله های دینامیکی

برای محاسبه دینامیک بازوی انعطاف پذیر لاگرانژین باید محاسبه شود. بدین منظور معادله های (10، 15 و 16) باید در طول اعضا انتگرال گیری شود. این عبارات به صورت نشان داده شده در نرم افزارهای سمبولیک قابل انتگرال گیری نیست به این منظور عبارت داخل انتگرال رابطه (10) را به صورت معادله (23) بسط می دهیم [23].



$$+l_1^2 \dot{v}_{11} - l_1^2 \dot{v}_{12} (13u_{11} + 22u_{12} + 3l_1 v_{11} - 4l_1 v_{12})$$

معادله‌های (۱۵ و ۱۶) نیز به‌طور مشابهی در طول المان انتگرال‌گیری می‌شود.

۴. شکل بسته معادله‌های دینامیکی بازوی تک لینکی

برای به دست آوردن معادله دینامیکی معادله‌های بالا به‌صورت سمبولیک در جعبه‌ابزار ریاضیات سمبولیک متلب پیاده‌سازی شده است و معادله لاگرانژ حل شده است. خروجی برنامه برای ربات تک عضوی با بار و اینرسی خارجی و اینرسی هاب، به‌صورت معادله (۲۲) محاسبه شده است. ماتریس جرم این معادله به‌صورت معادله (۲۹) است.

$$M = \frac{\rho Al}{420} \times \begin{bmatrix} M_{11} & 63l & 14l^2 & M_4 l + 147l & M_5 - 21l^2 \\ 63l & 156 & 22l & 54 & -13l \\ 14l^2 & 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ M_4 l + 147l & 54 & 13l & M_4 + 156 & -22l \\ M_5 - 21l^2 & -13l & -3l^2 & -22l & M_5 + 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = 108u_{11}u_{12} + 140l^2 + 156u_{11}^2 + 156u_{12}^2 + 4l^2v_{11}^2 + 4l^2v_{12}^2 + 44lu_{11}v_{11} - 26lu_{11}v_{12} + 26lu_{12}v_{11} - 44lu_{12}v_{12} - 6l^2v_{11}v_{12} + \frac{420}{\rho Al} (l^2m_p + I_p + Gr_1^2I_{h_1} + m_p u_{12}^2)$$

$$M_5 = \frac{420l_p}{\rho Al}; M_4 = \frac{420M_p}{\rho Al}$$

برای اعمال شرایط تکیه‌گاهی سطر و ستون دوم ماتریس جرم حذف می‌شود. همچنین متغیرهای v_{11} و v_{12} در M_{11} برابر با صفر می‌شوند.

$$M = \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} M_{11} & M_4 l + 147l & M_5 - 21 \\ M_4 l + 147l & M_4 + 156 & -22l \\ M_5 - 21l^2 & -22l & M_5 + 4l \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = 140l^2 + 156u_{12}^2 + 4l^2v_{12}^2 - 44l_1u_{12}v_{12} + \frac{420}{\rho Al} (l^2m_p + I_p + Gr_1^2I_{h_1} + m_p u_{12}^2) \quad (30)$$

با جایگذاری توابع شکل، انتگرال‌گیری هر یک از عبارات معادله (۲۷) را به‌راحتی می‌توان برحسب متغیر x انجام داد. در صورتی که هر عضو را به‌صورت یک المان مرتبه اول در نظر بگیریم داریم:

$$\int_0^{l_i} {}^i r_i(x_i) dx_i = \left[\begin{array}{c} \frac{l_1^2}{2} \\ l_1(6u_{11} + 6u_{12} + l_1v_{11} - l_1v_{12}) \\ 12 \end{array} \right]$$

$$\int_0^{l_i} {}^i \dot{r}_i(x_i) dx_i = 0$$

$$= \frac{l_1(6\dot{u}_{11} + 6\dot{u}_{12} + l_1\dot{v}_{11} - l_1\dot{v}_{12})}{12}$$

$$\int_0^{l_i} {}^i \dot{r}_i(x_i) {}^i \dot{r}_i^T(x_i) dx_i = \left[\begin{array}{cc} \frac{l_1^3}{3} & \frac{Z1}{60} \\ Z1 & \frac{l_1}{210} Z2 \end{array} \right]$$

$$Z1 = l_1^2(9u_{11} + 21u_{12} + 2l_1v_{11} - 3l_1v_{12})$$

$$Z2 = 2l_1^2v_{11}^2 - 3l_1^2v_{11}v_{12} + 2l_1^2v_{12}^2 + 22l_1u_{11}v_{11} - 13l_1u_{11}v_{12} + 13l_1u_{12}v_{11} - 22l_1u_{12}v_{12} + 78u_{11}^2 + 54u_{11}u_{12} + 78u_{12}^2 \quad (28)$$

$$\int_0^{l_i} {}^i \dot{r}_i(x_i) {}^i \dot{r}_i^T(x_i) dx_i = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & \frac{l1}{210} Z3 \end{array} \right]$$

$$Z2 = 2l_1^2\dot{v}_{11}^2 - 3l_1^2\dot{v}_{11}\dot{v}_{12} + 2l_1^2\dot{v}_{12}^2 + 22l_1\dot{u}_{11}\dot{v}_{11} - 13l_1\dot{u}_{11}\dot{v}_{12} + 13l_1\dot{u}_{12}\dot{v}_{11} - 22l_1\dot{u}_{12}\dot{v}_{12} + 78\dot{u}_{11}^2 + 54\dot{u}_{11}\dot{u}_{12} + 78\dot{u}_{12}^2$$

$$\int_0^{l_i} {}^i r_i(x_i) {}^i \dot{r}_i^T(x_i) dx_i = \left[\begin{array}{cc} 0 & Z4/60 \\ 0 & Z5/420 \end{array} \right]$$

$$Z4 = l_1^2(9\dot{u}_{11} + 21\dot{u}_{12} + 2l_1\dot{v}_{11} - 3l_1\dot{v}_{12})$$

$$Z5 = l_1\dot{u}_{11}(156u_{11} + 54u_{12} + 22l_1v_{11} - 13l_1v_{12}) + l_1\dot{u}_{12}(54u_{11} + 156u_{12} + 13l_1v_{11} - 22l_1v_{12})$$



بردار مؤلفه‌های گرانش برای بازوی یک لینکی بعد از اعمال شرایط تکیه‌گاهی به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$G = \frac{\rho Al}{12} \begin{bmatrix} G_1 \\ -6(g_y c_1 - g_x s_1) \\ l(g_y c_1 - g_x s_1) \end{bmatrix}$$

$$G_1 = 6g_x u_{12} c_1 + 6g_x l s_1 + 6g_y u_{12} s_1 - 6g_y l c_1 - g_x l v_{12} c_1 - g_y l v_{12} s_1 + \frac{12m_p}{\rho Al} (g_x l s_1 - g_y l c_1 + l u_{12} (g_y s_1 + g_x c_1)) \quad (31)$$

$$c_1 = \cos(a_1)$$

$$s_1 = \sin(a_1)$$

مؤلفه‌های کوریولیس و گریز از مرکز بعد از اعمال شرایط تکیه‌گاهی به صورت معادله (۳۲) محاسبه شده است.

$$c = \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & 0 & 0 \\ c_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{u}_{12} \\ \dot{v}_{12} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$c_{11} = 156u_{12}\dot{u}_{12} + 4l^2 v_{12}\dot{v}_{12} - 22lu_{12}\dot{v}_{12} - 22l\dot{u}_{12}v_{12} + \frac{420m_p}{\rho Al} u_{12}\dot{u}_{12}$$

$$c_{12} = \dot{\theta}_1 \left(156u_{12} - 22lv_{12} + \frac{420m_p}{\rho Al} u_{12} \right)$$

$$c_{21} = c_{12}$$

$$c_{13} = -\dot{\theta}_1 (22lu_{12} - 4l^2 v_{12})$$

$$c_{31} = c_{13}$$

و ماتریس سختی به صورت معادله (۳۳) است.

$$K = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

توقی و همکارانش معادلات دینامیکی بازوی تک لینکی را به صورت نمادین به روش المان محدود استخراج کرده‌اند [۶]. ماتریس سختی محاسبه شده در این مرجع برای یک ربات تک عضوی با یک المان با ماتریس سختی محاسبه شده در این مقاله یکی است. درایه M_{11} ماتریس جرم به دست آمده با برنامه نوشته شده، دارای مؤلفه‌های غیرخطی است که با صفر قرار دادن مختصات الاستیک شامل v_{11} ، v_{12} و u_{11} و u_{12}

ضریب M_{11} برابر مؤلفه‌های مرجع [۶] خواهد شد. همچنین در این مرجع نیروهای گرانش و کوریولیس و گریز از مرکز که در معادله‌های (۳۱ و ۳۲) آمده است؛ محاسبه نشده است. در مرجع [۲۰] نیز معادله‌های مشابه [۶] ارائه شده است. با این تفاوت که اثر بار خارجی در معادله‌ها لحاظ شده است. ماتریس جرم ارائه شده در مرجع [۲۰] در پیوست آمده است.

۵. شبیه‌سازی

معادله‌های به دست آمده در مرجع [۴] به صورت خطی است به این دلیل در این مقاله پس از به دست آوردن ماتریس‌های سختی و جرم، تبدیل لاپلاس سیستم استخراج شده و سیستم خطی، شبیه‌سازی شده، پارامترهای وزنی و هندسی بازو به صورت جدول (۱) در نظر گرفته شده است و ورودی به صورت بنگ‌بنگ^۶ با دامنه $0/1$ نیوتن متر مطابق با شکل (۲) است. پاسخ سیستم مرجع [۶] که جابه‌جایی انتهای عضو است، به صورت شکل (۳) به دست آمده است. برای بررسی درستی و مقایسه معادله‌های غیرخطی دینامیکی بازوی تک عضوی به دست آمده، معادله‌ها با روش رانگ‌گوتا مرتبه ۵ در نرم‌افزار متلب حل شده است. برای استفاده از توابع حل‌گر معادله دیفرانسیل در متلب باید معادله‌های دیفرانسیل مرتبه دو به معادله دیفرانسیل مرتبه یک تبدیل شود معادله (۳۴) شکل استاندارد معادلات برای حل به وسیله ode15s را نشان می‌دهد.

$$\dot{y} = f(t, q) \quad (34)$$

$$M(t, q)\dot{q} = f(t, q)$$

برای شبیه‌سازی سیستم در متلب باید ماتریس $M(t, q)$ و $f(t, q)$ به صورت توابعی از متغیرهای تعمیم‌یافته و مشتقات آن‌ها تعریف شود. تعداد متغیرهای مستقل برابر با سه می‌شود.

$$Q = [\theta \quad u_{12} \quad v_{12}]^T \quad (35)$$



جدول ۱. پارامترهای ربات مرجع [۶]

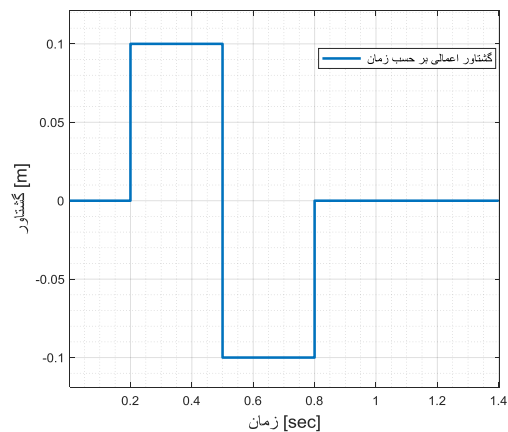
| پارامتر | نماینه | ابعاد و ضریب | مقدار |
|-------------|--------|-----------------|--------|
| طول | l | m | ۰/۹۶ |
| ممان اینرسی | I | $10^{-11} m^4$ | ۵/۱۹۲۴ |
| مساحت مقطع | A | $10^{-5} m^2$ | ۶/۱۵۴۴ |
| چگالی | ρ | kg/m^3 | ۲۷۱۰ |
| مدول یانگ | E | $10^{10} N/m^2$ | ۷/۱۱ |

متغیر q به صورت معادله (۳۰) تعریف می شود.

$$q_1 = Q, \quad q_2 = \dot{Q} \quad (36)$$

و ماتریس $M(t, q)$ به صورت معادله (۳۱) حاسبه می شود.

$$M(t, q) = \begin{bmatrix} I_{[3 \times 3]} & 0_{[3 \times 3]} \\ 0_{[3 \times 3]} & M(q_1)_{[3 \times 3]} \end{bmatrix} \quad (37)$$



شکل ۲. گشتاور اعمالی بر حسب زمان

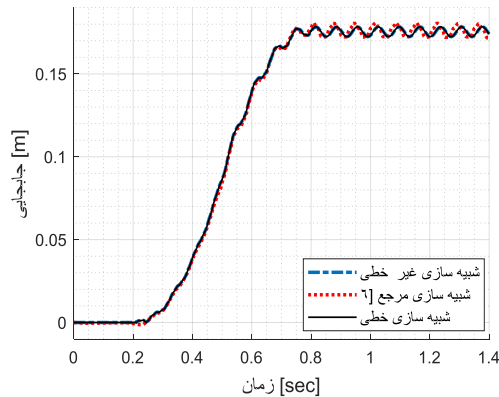
$f(t, q)$ در معادله (۳۴) به صورت معادله (۳۸)

محاسبه می شود.

$$f(t, q) = \begin{bmatrix} \tau(t) - C(q_1, q_2) - G(q_1) - Kq \end{bmatrix} \quad (38)$$

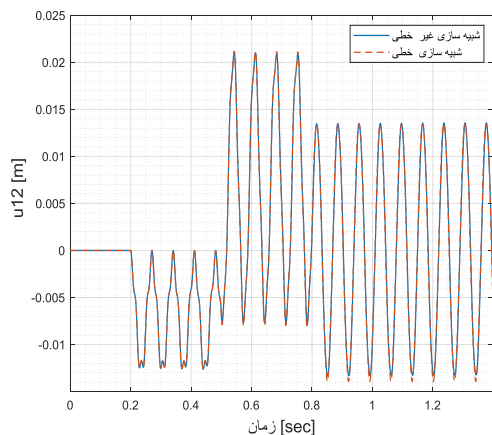
با شبیه سازی معادله های یاد شده در متلب، جابه جایی عملگر نهایی نسبت به زمان برای ربات تک عضوی با یک المان در شکل (۳) رسم شده است. نمودار به دست آمده مشابه نمودار به دست آمده در شبیه سازی مرجع [۶] است. در اینجا برای مقایسه معادله های مرجع [۶] نیز

به صورت خطی شبیه سازی و در شکل (۴) قرار داده شده است.



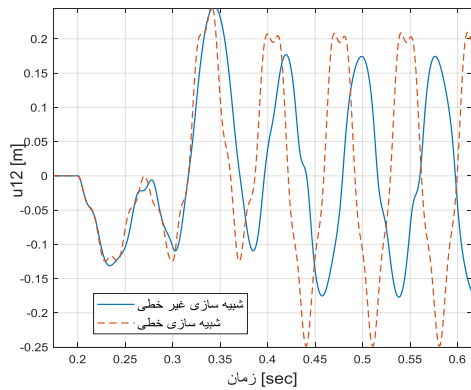
شکل ۳. جابه جایی انتهای بازو بر حسب زمان

با توجه به شکل (۳) پاسخ سیستم خطی و غیرخطی برای تحریک با گشتاوری مطابق با شکل (۲) یکی است و آثار غیرخطی قابل چشم پوشی است. خمش انتهای بازو در دو شبیه سازی خطی و غیرخطی در شکل (۴) آمده است و شبیه سازی نشان دهنده همسان بودن پاسخ هاست.



شکل ۴. خمش بازو (u_{12}) بر حسب زمان

برای بررسی آثار غیرخطی گشتاور مطابق با شکل (۳) به سیستم خطی و غیرخطی اعمال شده است. در این تحریک گشتاور بیشتری در زمانی کوتاه تر به سیستم اعمال شده است.

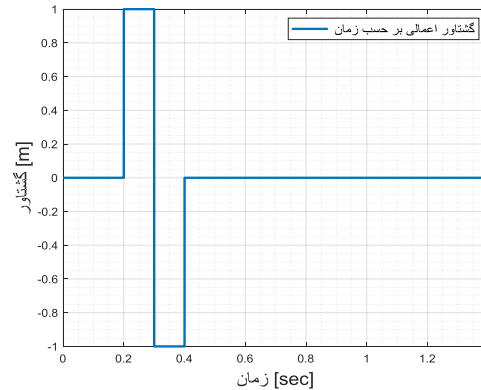


شکل ۸. خمش انتهای بازو با بزرگ‌نمایی برحسب زمان

خمش خطی سیستم خطی و غیرخطی با تحریک سریع مطابق شکل‌های (۷ و ۸) است و نشان‌دهنده آثار غیرخطی است که قابل چشم‌پوشی نیست.

۶. نتیجه‌گیری

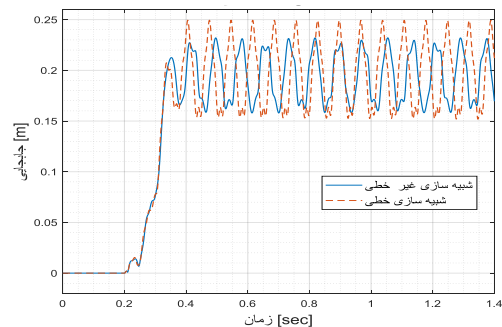
این مقاله مدل‌سازی دینامیکی بازوهای رباتیک با اعضای انعطاف‌پذیر را بررسی می‌کند. روش مدل‌سازی بر اساس معادله لاگرانژ و گسسته‌سازی المان محدود است. در این مقاله، آثار غیرخطی، نیروی گریز از مرکز و کوریولیس و آثار گرانش در نظر گرفته شده است. شبیه‌سازی بازوی تک لینکی با روش رانگ-گوتا مرتبه ۵ در محیط متلب انجام شده است و نتایج با مرجع [۶] که مدل‌سازی به‌صورت خطی انجام گرفته، مقایسه شده است. نتایج نشان‌دهنده همخوانی روش‌های خطی و غیرخطی در سرعت‌های پایین و تغییر شکل‌های کوچک است. با افزایش سرعت، انعطاف‌پذیری نتایج مدل‌سازی غیرخطی و خطی از هم فاصله می‌گیرند و دقت مدل‌سازی خطی کاهش پیدا می‌کند. به همین دلیل برای مدل‌سازی ربات‌های بسیار انعطاف‌پذیر، می‌توان از مدل غیرخطی ارائه شده استفاده کرد.



شکل ۵. گشتاور اعمالی برحسب زمان در شبیه‌سازی

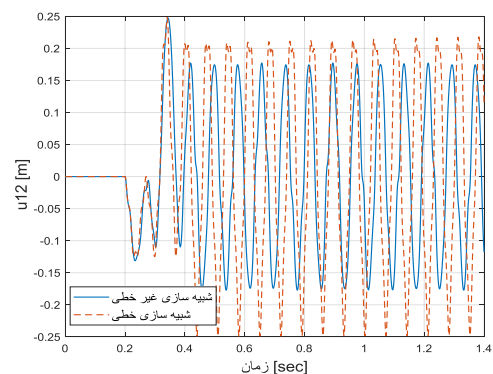
دوم

با افزایش سرعت تحریک پاسخ سیستم‌های خطی و غیرخطی در شکل‌های (۶ و ۷ و ۸) ترسیم شده است. شکل (۶) جابه‌جایی انتهای بازو با توجه به شکل میزان نوسان در دو حالت با هم متفاوت است و سیستم خطی نوسان بیشتری را نشان می‌دهد، ولی میانگین پاسخ نهایی تقریباً ثابت است.



شکل ۶. جابه‌جایی انتهای بازو برحسب زمان در

شبیه‌سازی دوم



شکل ۷. خمش انتهای بازو برحسب زمان در شبیه‌سازی

دوم

- recursive approach, *Computers & structures*, vol. 46, no. 2, pp. 311-321, 1993.
- [13] G. Hastings and W. Book, A linear dynamic model for flexible robotic manipulators, *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 7, no. 1, pp. 61-64, 1987.
- [14] Z. Yang and J. Sadler, Large-displacement finite element analysis of flexible linkages, 1990.
- [15] M. Dogan and Y. İstefanopulos, Optimal nonlinear controller design for flexible robot manipulators with adaptive internal model, *IET Control Theory & Applications*, vol. 1, no. 3, pp. 770-778, 2007.
- [16] A. De Luca and B. Siciliano, Closed-form dynamic model of planar multilink lightweight robots, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 21, no. 4, pp. 826-839, 1991.
- [17] M. Korayem and S. Dehkordi, Dynamic modeling of flexible cooperative mobile manipulator with revolute-prismatic joints for the purpose of moving common object with closed kinematic chain using the recursive Gibbs–Appell formulation, *Mechanism and Machine Theory*, vol. 137, pp. 254-279, 2019.
- [18] A. De Luca and B. Siciliano, Explicit dynamic modeling of a planar two-link flexible manipulator, in *29th IEEE Conference on Decision and Control*, 1990: IEEE, pp. 528-530.
- [19] C. A. My and D. X. Bien, New development of the dynamic modeling and the inverse dynamic analysis for flexible robot, *International Journal of Advanced Robotic Systems*, vol. 17, no. 4, p. 1729881420943341, 2020.
- [20] Z. Mohamed, Dynamic modelling and control of a flexible manipulator, University of Sheffield, 2003.
- [21] M. O. Tokhi and A. K. Azad, *Flexible robot manipulators: modelling, simulation and control*. Iet, 2008.
- [22] M. Khairudin, Z. Mohamed, A. R. Husain, and R. Mamat, Dynamic characterisation of a two-link flexible manipulator: theory and experiments, *Advances in robotics research*, vol. 1, no. 1, pp. 61-79, 2014, doi: 10.12989/arr.2014.1.1.061.
- [23] A. Kivila, Modeling, estimation and control for serial flexible robot arms, *Georgia Institute of Technology*
- [1] D. Subedi, I. Tyapin, and G. Hovland, Dynamic Modeling of Planar Multi-Link Flexible Manipulators, *Robotics*, vol. 10, no. 2, 2021, doi: 10.3390/robotics10020070.
- [2] D. L. Logan, *A first course in the finite element method*. Cengage Learning, 2016.
- [3] C. A. My, D. X. Bien, C. H. Le, and M. Packianather, An efficient finite element formulation of dynamics for a flexible robot with different type of joints, *Mechanism and Machine Theory*, vol. 134, pp. 267-288, 2019, doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2018.12.026.
- [4] A. M. Chu *et al.*, A novel mathematical approach for finite element formulation of flexible robot dynamics, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, pp. 1-21, 2020, doi: 10.1080/15397734.2020.1820874.
- [5] R. J. Theodore and A. Ghosal, Comparison of the assumed modes and finite element models for flexible multilink manipulators, *The International journal of robotics research*, vol. 14, no. 2, pp. 91-111, 1995.
- [6] M. Tokhi, Z. Mohamed, and A. Hashim, Modelling of a flexible robot manipulator using finite element methods: A symbolic approach, *Journal of low frequency noise, vibration and active control*, vol. 18, no. 2, pp. 63-76, 1999.
- [7] B. Subudhi and A. S. Morris, Dynamic modelling, simulation and control of a manipulator with flexible links and joints, *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 41, no. 4, pp. 257-270, 2002.
- [8] F. Raouf, S. Mohamad, S. Maarouf, and B. Maamar, Distributed adaptive control strategy for flexible link manipulators, *Robotica*, vol. 35, no. 7, pp. 15-62, 2017.
- [9] M. W. Mehrez and A. A. El-Badawy, Effect of the joint inertia on selection of under-actuated control algorithm for flexible-link manipulators, *Mechanism and Machine Theory*, vol. 45, no. 7, pp. 967-980, 2010.
- [10] B. Jonker, A finite element dynamic analysis of flexible manipulators, *The International Journal of Robotics Research*, vol. 9, no. 4, pp. 59-74, 1990.
- [11] K. Augustynek and I. Adamiec-Wójcik, Analysis of mechanisms with flexible beam-like links, rotary joints and assembly errors, *Archive of Applied Mechanics*, vol. 82, no. 2, pp. 283-295, 2012.
- [12] F. Amirouche and M. Xie, An explicit matrix formulation of the dynamical equations for flexible multibody systems: a



- ¹ Assumed Mode Method
- ² Lumped Parameter Method
- ³ Bisection Method
- ⁴ Very Flexible Manipulator
- ⁵ Symbolic
- ⁶ Bang-Bang

۸. پیوست

ماتریس‌های معادلات دینامیکی بازوی تک لینکی ارائه شده در مرجع [۲۰].

$$M = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 140l^2 + l^2 m_p + I_h & 63l & 14l^2 & 147l + lm_p & -21l^2 \\ & 63l & 156 & 22l & 54 & -13l \\ & 14l^2 & 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 147l + lm_p & 54 & 13l & 156 + m_p & -22l & \\ & -21l^2 & -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

