

استخراج روش‌های شمال‌یابی اینرسی نوین در حالت سکون

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۰/۰۸

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۱/۲۵

حامد محمدکریمی^۱، علیرضا نورانی^۲، محمدحسین علیزاده رکن‌آبادی^۳

۱- استادیار، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، h.mohammadkarimi@aut.ac.ir

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

۳- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

چکیده

مقاله حاضر با هدف استخراج روش‌های شمال‌یابی در حالت سکون و با استفاده از حسگرهای اینرسی تدوین شده است. پیاده‌سازی الگوریتم‌های شمال‌یابی متداول، مستلزم استفاده از یک بلوک اینرسی شامل سه شتاب‌سنج و سه جایرو نرخی است؛ بنابراین در صورت نیاز به دقت‌های بالا، هزینه زیادی در بر خواهد داشت. در این مقاله روش‌های ابداعی دیگری که نیاز به بلوک اینرسی کامل ندارند، برای محاسبه زوایای اوپلر ارائه شده است که شامل یک شتاب‌سنج و یک جایرو نرخی است؛ با این کار هزینه سخت‌افزار شمال‌یاب کاهش می‌یابد. برای این منظور در ابتدا روابط ریاضی و با روش حل چند جهت‌گیری، زوایای موردنظر استخراج شده و سپس به‌دقت شبیه‌سازی شده‌اند. در فرایند شبیه‌سازی، زوایای اوپلر مقدار معینی فرض شده و سپس همان زوایا در فرایند شبیه‌سازی برای دو حالت حسگر ایده‌آل و حسگر واقعی محاسبه شده‌اند. نتایج حاصل از این تحقیق نشان می‌دهد درنهایت با مقایسه الگوریتم‌های توسعه داده‌شده، بهترین الگوریتم شمال‌یاب با دقت بالا و هزینه پایین انتخاب شده است.

واژه‌های کلیدی: ناوبری اینرسی، واحد اندازه‌گیری اینرسی، انطباق حالت سکون، شمال‌یابی، تراز‌یابی

The derivation of modern inertial navigation methods at stationary state

Hamed Mohammadkarimi¹, Alireza Nourani², Mohammad Hossein Alizadeh Roknabadi³

1- Assistant Professor, Aerospace Engineering Department, Amirkabir University of Technology, Tehran, h.mohammadkarimi@aut.ac.ir

2- MSc Student, Aerospace Engineering Department, Amirkabir University of Technology, Tehran

3- Ph.D Student, Aerospace Engineering Department, Amirkabir University of Technology, Tehran

Abstract

This article discusses the derivation of low-cost inertial navigation methods at stationary state in the navigation systems. To implement navigation algorithms, it needs to use an IMU (3 accelerometers and 3 gyroscopes). Thus, higher accuracy results higher cost. The methods used in this article do not need complete IMU sensors to calculate Euler angles, which includes an accelerometer and a rate gyro. Subsequently navigator hardware cost will decrease. For this purpose, mathematical equations are derived with multi-direction solution method, which the desired angle is extracted at first, and then simulated as a hardware have done. specific values have been assumed for the Euler angles in the simulation process due to lack of access to field data, and the same angles are computed for two states (ideal and real sensors). By comparing the extended navigator algorithms, the best one (high accuracy and low cost) has been selected here in this paper.

Keywords: inertial navigation, inertial measurement unit, stationary state alignment, gyro compassing, leveling

۷۹

سال ۱۳ - شماره ۱

پهار و تابستان ۱۴۰۲

نشریه علمی
دانش و فناوری هوافضا





۱. مقدمه

ناوبری به معنی مشخص نمودن موقعیت، وضعیت و سرعت نسبت به یک دستگاه مرجع مشخص است [۱]. در پنج دهه اخیر استفاده از حسگرهای اینرسی به دلیل استقلال از محیط خارج در کاربردهای زمینی و دریایی رشد چشم گیری داشته است. سیستم ناوبری اینرسی^۱ متشکل از یک واحد اندازه گیری اینرسی^۲ است. در این سیستم شتاب غیرجاذبی جسم پرنده در راستای سه محور دستگاه مختصات بدنی توسط شتابسنجها اندازه گیری می شود. با افزودن شتاب جاذبی به شتاب حاصل از شتابسنجها و انتگرال گیری از آنها سرعت و موقعیت وسیله به دست می آید [۲ و ۳]. مهم ترین مشکل سیستم ناوبری اینرسی، تجمع خطا با گذشت زمان است. ساده ترین راه برای جلوگیری از خطاهای ناوبری اینرسی، استفاده از حسگرهای گران قیمت (با دقت بالا) یا راه اندازی مجدد این سیستم بعد از یک بازه زمانی است. با توجه به هزینه بر بودن روش های فوق، از سایر سامانه های ناوبری مانند سامانه موقعیت یابی جهانی^۳ به صورت تلفیقی با ناوبری اینرسی استفاده می شود. الگوریتم تلفیق باعث کاهش خطای سیستم ناوبری اینرسی می شود [۴].

سیستم های ناوبری اینرسی به دو دسته «متصل به بدنه^۴» و «صفحه پایدار^۵» تقسیم می شوند در سیستم های صفحه پایدار، پارامترهای حرکت (شتاب و سرعت زاویه ای) در دستگاهی محاسبه می شوند که نسبت به فضای اینرسی ثابت است. در سیستم های متصل به بدنه، پارامترهای حرکت در دستگاه بدنی بیان می شوند. در این مقاله واحد اندازه گیری اینرسی از نوع متصل به بدنه در نظر گرفته شده است [۵ و ۶].

شمال یابی و تراز یابی حالت سکون اولین مرحله ای است که باید برای سیستم ناوبری اینرسی

انجام شود [۷-۹]. فرایند شمال یابی حالت سکون سیستم های ناوبری اینرسی متصل به بدنه، شامل دو فرایند «انطباق خام^۶» و «انطباق دقیق^۷» است [۱۰-۱۲]. این فرایندها به صورت متوالی انجام شده و در هر مرحله به دقت شمال یابی افزوده می شود. انطباق اولیه شامل یک تخمین اولیه از وضعیت جسم است. در این قسمت از موقعیت جسم و مدل زمین برای محاسبه گرانش و دوران اسمی زمین استفاده می شود؛ سپس با مقایسه مقادیر نامی گرانش و دوران زمین با مقادیر اندازه گیری شده توسط شتابسنجها و جایروهای نرخ، یک تخمین اولیه از وضعیت جسم (ماتریس تبدیل) حاصل می شود [۱۳ و ۱۴]. موفقیت در این مرحله مستلزم دانش دقیق از مدل زمین و دقت مناسب حسگرهای اینرسی است. در انطباق دقیق از یک الگوریتم تخمین، برای افزایش دقت استفاده می شود؛ فیلتر بر اساس خروجی حسگرها، مدل خطای آنها و همچنین معادلات خطای ناوبری، انطباق اولیه را اصلاح می کند. در این مرحله اختلاف تخمین ماتریس تبدیل و ماتریس تبدیل واقعی، با بردار انحراف مدل می شود و الگوریتم ناوبری سعی در کوچک کردن اندازه این بردار می کند [۱۵-۲۰].

۲. مدل سازی خروجی حسگرها

در این قسمت خروجی بلوک اینرسی در جایروکامپس^۸ ساکن دوار مدل سازی می شود. مطالب این قسمت برگرفته از مراجع [۲۱-۲۴] است.

۲-۱. مدل سازی خروجی شتابسنجها

فرض کنید که با سه دوران متوالی از دستگاه ناوبری (N) به دستگاه میز (T) برسیم. بنابراین:

$$[\tilde{a}_x \quad \tilde{a}_y \quad \tilde{a}_z]^T = [f]^B \quad (12)$$

رابطه (۱۲) خروجی شتابسنج‌ها را مدل‌سازی می‌کند که در آن \tilde{a} نشان‌دهنده شتاب اندازه‌گیری است.

نیروی جاذبه قابل صرف‌نظر کردن هستند. با فرض حسگر شتابسنج ایده‌آل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f \approx -g \quad (15)$$

با بیان رابطه فوق در دستگاه بدنی به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} [f]^B &= -[T]^{BT} [T]^{TN} [g]^N \\ \begin{bmatrix} \tilde{a}_x \\ \tilde{a}_y \\ \tilde{a}_z \end{bmatrix} &= -g \begin{bmatrix} \cos \tau & \sin \tau & 0 \\ -\sin \tau & \cos \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (16) \\ &= -g \begin{bmatrix} -\cos \tau \sin \theta + \sin \tau \cos \theta \\ \sin \tau \sin \theta + \cos \tau \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

بر اساس رابطه فوق، خروجی شتابسنج کانال X به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_x &= g \cos \tau \sin \theta \\ &- g \sin \tau \cos \theta \sin \varphi \end{aligned} \quad (17)$$

که در آن \tilde{a}_x شتاب اندازه‌گیری در راستای محور X می‌باشد. رابطه فوق با فرض حسگر ایده‌آل می‌باشد. خروجی حسگر واقعی در کانال‌های X و Y و Z را می‌توان به فرم ماتریس زیر مدل‌سازی کرد:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{a}_x \\ \tilde{a}_y \\ \tilde{a}_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_x & MA_{xy} & MA_{xz} \\ MA_{yx} & S_y & MA_{yz} \\ MA_{zx} & MA_{zy} & S_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_x \\ \hat{a}_y \\ \hat{a}_z \end{bmatrix} \quad (18) \\ &+ b_a + n_a \end{aligned}$$

$$S = 1 + sf$$

در رابطه فوق (MA) عدم هم‌محوری، (sf) ضریب مقیاس، (\hat{a}) مقدار شتاب نامی، (b) بایاس شتابسنج و (n) اغتشاش روی خروجی حسگر می‌باشد. در ادامه روش‌های مختلف استخراج زوایای رول و پیچ بررسی می‌شود.

۲-۲. مدل‌سازی خروجی جاپروها

بسط بردار سرعت زاویه‌ای بلوک اینرسی ω^{BI} به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \omega^{BI} &= \omega^{BT} + \omega^{TN} + \omega^{NE} + \omega^{EI} \\ &= \omega^{BT} + \omega^{EI} \end{aligned} \quad (13)$$

با بیان رابطه فوق در دستگاه بدنی به صورت زیر آورده می‌شود:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_x \\ \tilde{\omega}_y \\ \tilde{\omega}_z \end{bmatrix} &= [\omega^{BI}]^B = \quad (14) \\ &= [T]^{BT} [\omega^{BT}]^T \\ &+ [T]^{BT} [T]^{TN} [\omega^{EI}]^N \end{aligned}$$

رابطه (۱۴) خروجی جاپروها را مدل‌سازی می‌کند که در آن $\tilde{\omega}$ نشان‌دهنده سرعت زاویه‌ای اندازه‌گیری است.

۳. استخراج زوایای تراز

در این قسمت نحوه استخراج زوایای رول و پیچ بیان می‌شود. در ابتدا فرض می‌شود که بر روی بلوک اینرسی یک حسگر شتابسنج و یک حسگر جاپرو موجود باشد و محور حساس شتابسنج در راستای محور X دستگاه بدنی باشد. در این بخش با حسگر شتابسنج سروکار داریم.

رابطه (۹) را در نظر بگیرید. فرض کنید که نیروی جانب مرکز و نیروی کوریولیس در مقابل



۳-۱. روش اول

با توجه به رابطه (۱۷) از آنجا که زاویه τ با دقت بالا مفروض است، بنابراین:

$$\begin{cases} \tilde{a}_x|_{\tau=0^\circ} = g \sin \theta \\ \tilde{a}_x|_{\tau=180^\circ} = -g \sin \theta \end{cases} \rightarrow \sin \theta = \frac{\tilde{a}_x|_{\tau=0^\circ} - \tilde{a}_x|_{\tau=180^\circ}}{2g} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \tilde{a}_x|_{\tau=90^\circ} = -g \cos \theta \sin \varphi \\ \tilde{a}_x|_{\tau=270^\circ} = g \cos \theta \sin \varphi \end{cases} \rightarrow$$

$$\sin \varphi = \frac{\tilde{a}_x|_{\tau=270^\circ} - \tilde{a}_x|_{\tau=90^\circ}}{2g \cos \theta}$$

بر اساس رابطه (۱۹) می‌توان زوایای θ و φ را محاسبه کرد.

۳-۲. روش دوم

می‌توان با استفاده از روش میانگین مربعات نیز محاسبات زوایای رول و پیچ را انجام داد [۲۵]. طبیعتاً استفاده از روش میانگین مربعات، روش دقیق‌تر و ارجح است. برای این منظور رابطه (۱۷) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$[g \cos \tau \quad -g \sin \tau] \begin{bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \sin \varphi \end{bmatrix} = \tilde{a}_x \quad (20)$$

با تغییر زاویه τ و به تبع آن \tilde{a}_x بردار مشاهدات به صورت زیر تکمیل می‌شود. در این روش با یک دور دوران کامل بلوک اینرسی حول محور Z دستگاه میز، تعدادی دلخواه زاویه τ و \tilde{a}_x همان زاویه، قرائت و در رابطه زیر قرار داده شد، سپس با ضرب طرفین رابطه از سمت چپ در ترانهاده ماتریس H، زوایای رول و پیچ محاسبه می‌شود.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos \tau_1 & -\sin \tau_1 \\ \cos \tau_2 & -\sin \tau_2 \\ \vdots & \vdots \\ \cos \tau_n & -\sin \tau_n \end{bmatrix}}_H \underbrace{\begin{bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \sin \varphi \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{a}_{x_1} \\ \tilde{a}_{x_2} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{x_n} \end{bmatrix}}_Y \quad (21)$$

$$HX = Y$$

لازم به ذکر است رابطه فوق به ازای $n \geq 3$ حداقل ۳ مرتبه قرائت خروجی حسگر و زاویه τ برقرار است.

۳-۳. روش سوم

با در نظر گرفتن رابطه (۱۰). ترم دوم سمت راست این رابطه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$2[T]^{BT}[T]^{TN}[\Omega^{EI}]^N[\bar{T}]^{TN}[\bar{T}]^{BT}[v_B^T] = \begin{bmatrix} p_x \\ 0 \\ p_z \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} p_x &= -2\omega^{EI}\omega(\cos\lambda\sin\varphi\sin\psi \\ &\quad - \cos\varphi\cos\theta\sin\lambda \\ &\quad + \cos\varphi\cos\lambda\cos\psi\sin\theta) \\ p_y &= 0 \\ p_z &= 2\omega^{EI}\omega \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix} \\ g_x &= \cos\tau\sin\lambda\sin\theta \\ &\quad + \cos\tau\cos\lambda\cos\psi\cos\theta \\ &\quad - \cos\varphi\cos\lambda\sin\tau\sin\psi \\ g_y &= -\cos\theta\sin\varphi\sin\tau\sin\lambda \\ &\quad + \cos\lambda\cos\psi\sin\varphi\sin\tau\sin\theta \end{aligned}$$

لذا رابطه (۱۰) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_x &= -l\omega^2 \\ &\quad - g(\sin \tau \cos \theta \sin \varphi \\ &\quad - \cos \tau \sin \theta) \end{aligned} \quad (23)$$



$$\begin{bmatrix} \cos \tau_1 & \sin \tau_1 \\ \cos \tau_2 & \sin \tau_2 \\ \vdots & \vdots \\ \cos \tau_n & \sin \tau_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$= \frac{1}{g} \begin{bmatrix} l\dot{\omega}(\tau_1) - \tilde{a}_{y_1} \\ l\dot{\omega}(\tau_2) - \tilde{a}_{y_2} \\ \vdots \\ l\dot{\omega}(\tau_n) - \tilde{a}_{y_n} \end{bmatrix}$$

با حل رابطه فوق، $\sin \theta$ و $\cos \theta \sin \varphi$ و به تبع آن θ و φ مشخص می‌شوند. لازم به ذکر است که با گذشت زمان نشست موتور و رسیدن به مقدار شرایط نهایی ω ، می‌توان فرض کرد که $\dot{\omega} \approx 0$ است. با این فرض رابطه (25) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \cos \tau_1 & \sin \tau_1 \\ \cos \tau_2 & \sin \tau_2 \\ \vdots & \vdots \\ \cos \tau_n & \sin \tau_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$= \frac{-1}{g} \begin{bmatrix} \tilde{a}_{y_1} \\ \tilde{a}_{y_2} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{y_n} \end{bmatrix}$$

همانند روش دوم، در این روش نیز رابطه فوق به ازای $n \geq 3$ (حداقل 3 مرتبه قرائت خروجی حسگر و زاویه τ) برقرار است.

۳-۵. روش پنجم

در این حالت با استفاده از یکی از روش‌های پیشین (به‌طور مثال روش اول)، زوایای رول و پیچ را اندازه‌گیری کرده سپس، بایاس و ضریب مقیاس شتاب‌سنج با روابط زیر محاسبه می‌شوند. رابطه (۱۷) را در نظر بگیرید. با لحاظ کردن کردن بایاس و ضریب مقیاس، خروجی شتاب‌سنج کانال X به صورت زیر خواهد بود:

$$\tilde{a}_x = S(g \cos \tau \sin \theta - g \sin \tau \cos \theta \sin \varphi) + b \quad (27)$$

بر اساس رابطه (27) در این صورت:

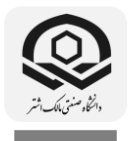
$$\begin{aligned} & -2\omega^{El} l \omega (\cos \lambda \sin \varphi \sin \psi \\ & - \cos \varphi \cos \theta \sin \lambda \\ & + \cos \varphi \cos \lambda \cos \psi \sin \theta) \\ & \tilde{a}_y \\ & = +l\dot{\omega} \\ & - g (\sin \tau \sin \theta \\ & + \cos \tau \cos \theta \sin \varphi) \\ & \tilde{a}_z \\ & = -g \cos \theta \cos \varphi \\ & + 2\omega^{El} l \omega \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix} \\ & g_x \\ & = \cos \tau \sin \lambda \sin \theta \\ & + \cos \tau \cos \lambda \cos \psi \cos \theta \\ & - \cos \varphi \cos \lambda \sin \tau \sin \psi \\ & g_y \\ & = -\cos \theta \sin \varphi \sin \tau \sin \lambda \\ & + \cos \lambda \cos \psi \sin \varphi \sin \tau \sin \theta \end{aligned}$$

با فرض اینکه حسگر حساس شتاب‌سنج در کانال Y قرار بگیرد. بنابراین:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \tilde{a}_y|_{\tau=90^\circ} = l\dot{\omega} - g \sin \theta \\ \tilde{a}_y|_{\tau=270^\circ} = l\dot{\omega} + g \sin \theta \end{cases} \\ \rightarrow \sin \theta \\ = \frac{\tilde{a}_y|_{\tau=270^\circ} - \tilde{a}_y|_{\tau=90^\circ}}{2g} \quad (24) \\ \begin{cases} \tilde{a}_y|_{\tau=0^\circ} = l\dot{\omega} - g \cos \theta \sin \varphi \\ \tilde{a}_y|_{\tau=180^\circ} = l\dot{\omega} + g \cos \theta \sin \varphi \end{cases} \\ \rightarrow \sin \varphi \\ = \frac{\tilde{a}_y|_{\tau=180^\circ} - \tilde{a}_y|_{\tau=0^\circ}}{2g \cos \theta} \end{aligned}$$

۳-۴. روش چهارم

در این حالت همانند روش دوم با این تفاوت که حسگر حساس شتاب‌سنج در کانال Y قرار گرفته باشد، زوایای رول و پیچ بر اساس روش میانگین مربعات محاسبه می‌شود. عبارت \tilde{a}_y در رابطه (۱۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:



$$\begin{aligned} sf^2 \approx 0 &\rightarrow 2sf + 1 - \alpha \\ &= 0 \rightarrow sf \\ &= \frac{\alpha - 1}{2} \end{aligned}$$

۴. استخراج زاویه سمت

در این قسمت نحوه استخراج زاویه سمت بیان می‌شود. فرض می‌شود که زوایای رول و پیچ با استفاده از یکی از حالت‌های بخش قبل محاسبه شده باشند و همچنین فرض می‌شود که محور حساس جیرو نیز در ابتدا در راستای محور X بدنی قرار بگیرد. در ابتدای کار لازم است رابطه (۱۴) بسط داده شود. بسط جمله اول سمت راست این رابطه به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} [T]^{BT}[\omega^{BT}]^T \\ = \begin{bmatrix} \cos \tau & \sin \tau & 0 \\ -\sin \tau & \cos \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۳۵)$$

بسط ترم دوم سمت راست رابطه (۱۴) به صورت زیر است:

$$[T]^{BT}[T]^{TN}[\omega^{EI}]^N = \omega^{EI} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (۳۶)$$

$$\begin{aligned} a_x \\ = \cos \tau [\cos \psi \cos \theta \cos \lambda \\ + \sin \theta \sin \lambda] \\ + \sin \tau [(\cos \psi \sin \theta \sin \phi \\ - \sin \psi \cos \phi) \cos \lambda \\ - \cos \theta \sin \phi \sin \lambda] \end{aligned}$$

$$a_y = \begin{pmatrix} a_{y1} \\ a_{y2} \end{pmatrix}$$

$$a_{y1} = -\sin \tau [\cos \psi \cos \theta \cos \lambda + \sin \theta \sin \lambda]$$

$$a_{y2} = +\cos \tau [(\cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi) \cos \lambda - \cos \theta \sin \phi \sin \lambda]$$

$$\begin{cases} \tilde{a}_x|_{\tau=0^\circ} = Sg \sin \theta + b \\ \tilde{a}_x|_{\tau=180^\circ} = -Sg \sin \theta + b \end{cases} \quad (۲۸)$$

$$\rightarrow b = \frac{\tilde{a}_x|_{\tau=0^\circ} + \tilde{a}_x|_{\tau=180^\circ}}{2}$$

با حذف بایاس، متغیرهای زیر در نظر گرفته شود:

$$\begin{aligned} a_1 &= \tilde{a}_x|_{\tau=0^\circ} - b = Sg \sin \theta \quad (۲۹) \\ a_2 &= \tilde{a}_x|_{\tau=90^\circ} - b \\ &= -Sg \cos \theta \sin \phi \end{aligned}$$

حال فرض کنید که شتاب‌سنج کانال X، با چرخش حول محور Y به اندازه $-\frac{\pi}{2}$ ، در کانال Z قرار گرفته است. بنابراین:

$$\tilde{a}_z = -Sg \cos \theta \cos \phi + b \quad (۳۰)$$

با حذف بایاس رابطه (۳۰) در نتیجه:

$$\begin{aligned} a_3 &= \tilde{a}_z - b \\ &= -Sg \cos \theta \cos \phi \end{aligned} \quad (۳۱)$$

با استفاده از روابط (۲۹) و (۳۱) رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \\ = S^2 g^2 (\sin^2 \theta \\ + \cos^2 \theta \sin^2 \phi \\ + \cos^2 \theta \cos^2 \phi) = S^2 g^2 \end{aligned} \quad (۳۲)$$

رابطه فوق به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} S &= \mp \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{g^2}} \quad (۳۳) \\ sf &= S - 1 \end{aligned}$$

از آنجاکه علامت S در پروسه کالیبراسیون تعیین شده است، تنها یکی از جواب‌های رابطه فوق قابل قبول است. همچنین می‌توان تقریب زیر را به کار برد:

$$\begin{aligned} S^2 &= (1 + sf)^2 \\ &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{g^2} = \alpha \quad (۳۴) \\ \rightarrow sf^2 + 2sf + 1 - \alpha &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{bmatrix} \tilde{\omega}_x \\ \tilde{\omega}_y \\ \tilde{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & MA_{xy} & MA_{xz} \\ MA_{yx} & S_y & MA_{yz} \\ MA_{zx} & MA_{zy} & S_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\omega}_x \\ \hat{\omega}_y \\ \hat{\omega}_z \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$+ b_{\omega} + n_{\omega}, \quad S = 1 + sf$$

در رابطه فوق (MA) عدم هم‌محوری، (Sf) ضریب مقیاس، ($\hat{\omega}$) مقدار سرعت زاویه‌ای نامی، (b) بایاس شتاب‌سنج و (n) اغتشاش روی خروجی حسگر است.

۴-۱-۱. روش اول

فرض کنید که عرض جغرافیایی λ مفروض است؛ با توجه به رابطه (۳۸)، از آنجا که زاویه τ با دقت بالا مفروض است، همچنین زوایای θ و φ نیز محاسبه شده‌اند، به صورت زیر است:

۴-۱-۱-۱. حالت اول

در این حالت فرض می‌شود که بلوک اینرسی در زوایای $\tau = 0^\circ, 180^\circ$ قرار گیرد. به صورت زیر است:

$$\tilde{\omega}_x|_{\tau=0^\circ} = \omega^{EI} [\cos \psi \cos \theta \cos \lambda + \sin \theta \sin \lambda]$$

$$\tilde{\omega}_x|_{\tau=180^\circ} = -\omega^{EI} [\cos \psi \cos \theta \cos \lambda + \sin \theta \sin \lambda]$$

$$= \frac{\tilde{\omega}_x|_{\tau=0^\circ} - \tilde{\omega}_x|_{\tau=180^\circ} - 2\omega^{EI} \sin \theta \sin \lambda}{2\omega^{EI} \cos \theta \cos \lambda} \quad (40)$$

زاویه سمت راست با استفاده از رابطه فوق محاسبه می‌شود.

۴-۱-۲. حالت دوم

این بار خروجی جاپرو در زوایای $\tau = 90^\circ, 270^\circ$ خوانده می‌شود:

$$\tilde{\omega}_x|_{\tau=90^\circ} = \omega^{EI} (\cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi) \cos \lambda$$

$$- \omega^{EI} \cos \theta \sin \varphi \sin \lambda \quad (40)$$

$$a_z = (\cos \psi \sin \theta \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi) \cos \lambda - \cos \theta \cos \varphi \sin \lambda$$

با جایگذاری روابط (۳۵) و (۳۶) در رابطه (۱۴) به صورت زیر می‌باشد:

$$c_x = \cos \tau [\cos \psi \cos \theta \cos \lambda + \sin \theta \sin \lambda] + \sin \tau [(\cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi) \cos \lambda - \cos \theta \sin \varphi \sin \lambda]$$

$$c_y = \begin{pmatrix} c_{y1} \\ c_{y2} \end{pmatrix}$$

$$c_{y1} = -\sin \tau [\cos \psi \cos \theta \cos \lambda + \sin \theta \sin \lambda]$$

$$c_{y2} = +\cos \tau [(\cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi) \cos \lambda - \cos \theta \sin \varphi \sin \lambda]$$

$$c_z = (\cos \psi \sin \theta \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi) \cos \lambda - \cos \theta \cos \varphi \sin \lambda + \omega$$

بر اساس رابطه (۳۷)، خروجی جاپرو کانال X به صورت زیر خواهد بود:

$$\tilde{\omega}_x = \omega^{EI} \sin \tau [(\cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi) \cos \lambda - \cos \theta \sin \varphi \sin \lambda] + \omega^{EI} \cos \tau [\cos \psi \cos \theta \cos \lambda + \sin \theta \sin \lambda] \quad (38)$$

همانند آنچه برای شتاب‌سنج گفته شد، معادله (۳۸) نیز برای جاپرو در حالت ایده‌آل می‌باشد. خروجی حسگر جاپرو در حالت واقعی را می‌توان به فرم ماتریسی زیر مدل‌سازی کرد:



۳-۴. روش سوم

رابطه (۳۸) به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\begin{aligned} A \sin \tau + B \cos \tau &= \tilde{\omega}_x(\tau) \\ A &= \omega^{EI} \cos \psi \sin \theta \sin \varphi \cos \lambda \\ &\quad - \omega^{EI} \sin \psi \cos \varphi \cos \lambda \\ &\quad - \omega^{EI} \cos \theta \sin \varphi \sin \lambda \\ B &= \omega^{EI} \cos \psi \cos \theta \cos \lambda \\ &\quad + \omega^{EI} \sin \theta \sin \lambda \end{aligned} \quad (۴۴)$$

بیشینه عبارت $A \sin \tau + B \cos \tau$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \max(A \sin \tau + B \cos \tau) \\ = \sqrt{A^2 + B^2} \end{aligned} \quad (۴۵)$$

لذا چنانچه بیشینه $\tilde{\omega}_x(\tau)$ با $\tilde{\omega}_{x_{max}}$ نمایش داده شود، با جایگذاری روابط (۴۵) در رابطه (۴۶) و ساده سازی آن به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tilde{\omega}_{x_{max}}}{\omega^{EI}} \right)^2 \\ = (\cos^2 \phi \cos^2 \theta - 2 \cos^2 \phi \\ + 1) \cos^2 \lambda \cos^2 \psi \\ + 2 \cos \phi \cos \lambda \sin \theta \cos \phi \cos \theta \sin \psi \\ - 2 \cos \phi \cos \lambda \sin \theta \cos \lambda \sin \phi \cos \psi \\ + 2 \cos \phi \cos \lambda \cos \theta \sin \phi \sin \lambda \sin \psi \\ + \cos^2 \phi \cos^2 \lambda \cos^2 \theta \\ + \cos^2 \phi \cos^2 \lambda \\ + \cos^2 \phi \cos^2 \theta + \sin^2 \lambda \end{aligned} \quad (۴۶)$$

رابطه فوق به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\begin{aligned} A \cos^2 \psi + B \cos \psi \\ + C \cos \psi \sin \psi \\ + D \sin \psi + E \\ = 0 \\ A = (\cos^2 \phi \cos^2 \theta - 2 \cos^2 \phi \\ + 1) \cos^2 \lambda \\ B \\ = 2 \cos^2 \phi \cos \lambda \sin \theta \cos \theta \sin \lambda \\ C = -2 \cos^2 \lambda \cos \phi \sin \theta \sin \varphi \end{aligned} \quad (۴۷)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_x|_{\tau=270^\circ} \\ = -\omega^{EI} (\cos \psi \sin \theta \sin \varphi \\ - \sin \psi \cos \varphi) \cos \lambda \\ + \omega^{EI} \cos \theta \sin \varphi \sin \lambda \rightarrow \\ \cos \psi \sin \theta \sin \varphi \\ - \sin \psi \cos \varphi \\ = \frac{\tilde{\omega}_x|_{\tau=90^\circ} - \tilde{\omega}_x|_{\tau=270^\circ} + 2\omega^{EI}}{2\omega^{EI} \cos \lambda} \end{aligned}$$

لازم به ذکر است حل معادله $a \sin(\psi) + b \cos(\psi) = c$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} a \sin(\psi) + b \cos(\psi) = c \\ \rightarrow \psi \\ = \tau \tan^{-1} \left(\frac{a \mp \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b+c} \right) \end{aligned} \quad (۴۱)$$

مشاهده می شود که رابطه (۴۲) منجر به دو جواب می شود؛ ولی یکی از جواب ها توسط قطب نما مغناطیسی قابل حذف کردن است.

۲-۴. روش دوم

رابطه (۳۸) به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\begin{aligned} A \sin \psi + B \cos \psi = C \\ A = -\omega^{EI} \cos \varphi \cos \lambda \sin \tau \\ B \\ = \omega^{EI} \sin \theta \sin \varphi \cos \lambda \sin \tau \\ + \omega^{EI} \cos \theta \cos \lambda \cos \tau \\ C \\ = \tilde{\omega}_x - \omega^{EI} \sin \theta \sin \lambda \cos \tau \\ + \omega^{EI} \cos \theta \sin \varphi \sin \lambda \sin \tau \end{aligned} \quad (۴۲)$$

حل رابطه (۴۳) به صورت زیر است؛ که یک جواب آن توسط قطب نما مغناطیسی حذف می شود.

$$\psi = 2 \tan^{-1} \left(\frac{A \mp \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{B+C} \right) \quad (۴۳)$$

برای تشکیل معادله (۴۳)، بلوک اینرسی باید به اندازه τ دلخواه بچرخد و خروجی جابرو نیز در معادله لحاظ شود.



$f(\tau) = A \sin \tau + B \cos \tau$ به صورت زیر عمل می‌شود:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = 0 \rightarrow A \cos \tau - B \sin \tau \quad (51)$$

$$= 0 \rightarrow \tan \tau = \frac{A}{B}$$

بنابراین محل حدوث بیشینه $\tilde{\omega}_x(\tau)$ با τ^* نمایش داده می‌شود:

$$\tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right) = \tau^* =$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\cos \psi \sin \theta \sin \varphi \cos \lambda}{\sin \psi \cos \varphi \cos \lambda - \cos \theta \sin \varphi \sin \lambda}\right) \quad (52)$$

$$/ \cos \psi \cos \theta \cos \lambda + \sin \theta \sin \lambda$$

بدین صورت می‌توان عدم هم‌محوری ایجاد شده توسط کانال‌های Y و Z را نیز در محاسبه‌ها لحاظ کرد.

۴-۴. روش چهارم

رابطه (۳۸) را در نظر بگیرید. در صورت لحاظ کردن بایاس (b) و ضریب مقیاس (S) ژيروسکوپ، این رابطه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\tilde{\omega}_x = S \left(\frac{d_x}{d_y} \right) + b \quad (53)$$

$$d_x = \omega^{El} \sin \tau [(\cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi) \cos \lambda - \cos \theta \sin \varphi \sin \lambda]$$

$$d_y = +\omega^{El} \cos \tau [\cos \psi \cos \theta \cos \lambda + \sin \theta \sin \lambda]$$

فرض کنید که عرض جغرافیایی مفروض است. با توجه به رابطه فوق، از آنجا که زاویه τ با دقت بالا مفروض است، همچنین زوایای θ و φ نیز با استفاده از حالت‌های قبلی محاسبه شده‌اند، با سه مجهول b ، S و ψ مواجه هستیم. لذا با سه اندازه‌گیری، می‌توان این مجهولات را تعیین

$$D = 2 \cos \varphi \cos \lambda \cos \theta \sin \varphi \sin \lambda$$

$$E = \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda \cos^2 \theta + \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \lambda$$

$$- \left(\frac{\tilde{\omega}_{x_{\max}}}{\omega^{El}} \right)$$

برای حل معادله فوق، به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$A \cos^2 \psi + B \cos \psi + E = -C \cos \psi \sin \psi - D \sin \psi \quad (48)$$

مربع معادله فوق برابر است با:

$$(A \cos^2 \psi + B \cos \psi + E)^2 = (-C \cos \psi \sin \psi - D \sin \psi)^2 \quad (49)$$

پس از بسط‌دهی رابطه فوق معادله درجه چهار زیر حاصل می‌شود:

$$F \cos^4 \psi + G \cos^3 \psi + H \cos^2 \psi + I \cos \psi + J = 0$$

$$F = A^2 + C^2$$

$$G = 2AB + 2CD$$

$$H = B^2 + 2AE - C^2 + D^2$$

$$I = 2BE - 2CD$$

$$J = E^2 - D^2 \quad (50)$$

مجموعه روابط فوق می‌بایست به صورت عددی حل شوند^۹. برای حل عددی رابطه (۴۸)، نیاز به یک حدس اولیه است. استفاده از یک قطب‌نمای مغناطیسی برای حدس اولیه لازم است.

شبیه‌سازی با دقت بالا برای حسگر واقعی، نیاز به یافتن محل وقوع $\tilde{\omega}_{x_{\max}}(\tau)$ و اطلاع از وضعیت کانال‌های Y و Z می‌باشد. عبارت $f(\tau) = A \sin \tau + B \cos \tau$ را در نظر بگیرید. برای یافتن محل وقوع بیشینه عبارت



کرد. بنابراین:

$$\begin{aligned} A \sin \psi + B \cos \psi &= C \\ A &= -\omega_1 \frac{\cos \varphi}{2} \\ B &= \omega_1 \frac{\sin \theta \sin \varphi - \cos \theta}{2} \quad (58) \\ C &= \sin \theta \tan \lambda \\ &+ \omega_1 \frac{\cos \theta \sin \varphi \tan \lambda}{2} \end{aligned}$$

زاویه سمت به کمک رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\psi = 2 \tan^{-1} \left(\frac{A \mp \sqrt{A^2 + B^2} - C}{B + C} \right) \quad (59)$$

با مشخص شدن زاویه سمت، ضریب مقیاس به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$S = \frac{\omega_1}{\cos \psi \cos \theta \cos \lambda + \sin \theta \sin \lambda} \quad (60)$$

۴-۵. روش پنجم

رابطه (۵۸) را در نظر بگیرید. می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \frac{\omega_1}{S \cos \lambda} - \sin \theta \tan \lambda \\ &= \cos \psi \cos \theta \\ \omega_4 &= \frac{\omega_2}{S \cos \lambda} + \cos \theta \sin \varphi \tan \lambda \quad (61) \\ &= \cos \psi \sin \theta \sin \varphi \\ &- \sin \psi \cos \varphi \end{aligned}$$

روابط فوق به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \frac{\omega_3}{\cos \theta} \quad (62) \\ \sin \psi &= \omega_3 \tan \theta \tan \varphi \\ &- \frac{\omega_4}{\cos \varphi} \end{aligned}$$

حال از آنجا که $\cos^2 \psi + \sin^2 \psi = 1$ با

توجه به تعریف ω_3 و ω_4 ، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_x|_{\tau=0^\circ} &= S \omega^{\text{EI}} [\cos \psi \cos \theta \cos \lambda \\ &+ \sin \theta \sin \lambda] + b \\ \tilde{\omega}_x|_{\tau=90^\circ} &= S \omega^{\text{EI}} [(\cos \psi \sin \theta \sin \varphi \\ &- \sin \psi \cos \varphi) \cos \lambda \\ &- \cos \theta \sin \varphi \sin \lambda] + b \quad (54) \\ \tilde{\omega}_x|_{\tau=180^\circ} &= -S \omega^{\text{EI}} [\cos \psi \cos \theta \cos \lambda \\ &+ \sin \theta \sin \lambda] + b \end{aligned}$$

با استفاده از روابط رابطه (۵۴) در ادامه مشاهده می‌شود:

$$b = \frac{\tilde{\omega}_x|_{\tau=0^\circ} + \tilde{\omega}_x|_{\tau=180^\circ}}{2} \quad (55)$$

با مشخص شدن بایاس، دستگاه دو معادله دو مجهول زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\tilde{\omega}_x|_{\tau=0^\circ} - b}{\omega^{\text{EI}}} \\ &= S [\cos \psi \cos \theta \cos \lambda \\ &+ \sin \theta \sin \lambda] \\ \omega_2 &= \frac{\tilde{\omega}_x|_{\tau=90^\circ} - b}{\omega^{\text{EI}}} \quad (56) \\ &= S [(\cos \psi \sin \theta \sin \varphi \\ &- \sin \psi \cos \varphi) \cos \lambda \\ &- \cos \theta \sin \varphi \sin \lambda] \end{aligned}$$

با تقسیم ω_1 بر ω_2 ، بنابراین:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_1}{\omega_2} &= \frac{\omega_1}{\omega_2} \\ &= \frac{\cos \psi \cos \theta \cos \lambda}{\sin \theta \sin \lambda} \quad (57) \\ &+ \frac{\cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \lambda}{-\cos \theta \sin \varphi \sin \lambda} \end{aligned}$$

رابطه فوق به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$S = \frac{C \cos \lambda \mp \sqrt{C^2 \cos^2 \lambda + 4AB \cos \lambda}}{2A \cos^2 \lambda} = \frac{C \mp \sqrt{C^2 + 4AB}}{2A \cos \lambda}$$

یک حل تقریبی رابطه فوق به صورت زیر است:

$$S^2 = (1 + sf)^2 \quad (66)$$

$$= 1 + 2sf + sf^2$$

$$\approx 1 + 2sf \rightarrow$$

$$A \cos^2 \lambda S^2 - C \cos \lambda S - B$$

$$= A \cos^2 \lambda (1$$

$$+ 2sf)$$

$$- C \cos \lambda (1 + sf) - B = 0 \rightarrow$$

$$A \cos^2 \lambda + 2sf A \cos^2 \lambda - C \cos \lambda$$

$$- sf C \cos \lambda - B$$

$$= 0 \rightarrow$$

$$sf = \frac{-A \cos^2 \lambda + B + C \cos \lambda}{2A \cos^2 \lambda - C \cos \lambda}$$

با مشخص شدن ضریب مقیاس، زاویه سمت از

رابطه (63) به دست می آید:

$$\psi = \cos^{-1} \left(\frac{\omega_1}{S \cos \theta \cos \lambda - \tan \theta \tan \lambda} \right) \quad (67)$$

۴-۶. روش ششم

روابط (58) را در نظر بگیرید. در این روش فرض

می شود زاویه سمت به کمک یکی از روش های

قبلی محاسبه شده باشد. همچنین فرض کنید که

جایرو کانال x، با چرخش حول محور y به اندازه

$-\frac{\pi}{2}$ ، در کانال z قرار گرفته است. بنابراین:

$$\tilde{\omega}_z = S \omega^{EI} [(\cos \psi \sin \theta \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi) \cos \lambda - \cos \theta \cos \varphi \sin \lambda + \omega] + b \quad (68)$$

رابطه فوق به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\omega_3 = \frac{\tilde{\omega}_z - b}{\omega^{EI}} = S [(\cos \psi \sin \theta \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi) \cos \lambda - \cos \theta \cos \varphi \sin \lambda + \omega] \quad (69)$$

$$\left(\left(\frac{\omega_1}{S \cos \lambda} - \sin \theta \tan \lambda \right) \tan \theta \tan \varphi - \frac{\frac{\omega_2}{S \cos \lambda} + \cos \theta \sin \varphi \tan \lambda}{\cos \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\frac{\omega_1}{S \cos \lambda} - \sin \theta \tan \lambda}{\cos \theta} \right)^2 = 1 \quad (63)$$

پس از بسط دادن رابطه (64) معادله زیر

حاصل می شود:

$$A = \frac{B}{S^2 \cos^2 \lambda} + \frac{C}{S \cos \lambda}$$

A

$$= 1 - \tan^2 \lambda \tan^2 \theta$$

$$- \cos^2 \theta \tan^2 \lambda \tan^2 \varphi$$

$$- \tan^2 \varphi \tan^2 \lambda \sin^2 \theta \tan^2 \theta$$

$$- 2 \cos \theta \tan \varphi \tan^2 \lambda \sin \theta \tan \theta \tan \theta$$

B

$$= \frac{\omega_2^2}{\cos^2 \varphi} + \frac{\omega_1^2}{\cos^2 \theta}$$

$$+ \omega_1^2 \tan^2 \varphi \tan^2 \theta$$

$$- 2 \omega_1 \omega_2 \tan \varphi \tan \theta / \cos \varphi$$

C

$$= \frac{2 \omega_2 \tan \varphi \tan \lambda \sin \theta \tan \theta}{\cos \varphi}$$

$$- \frac{2 \omega_1 \cos \theta \tan^2 \varphi \tan \lambda \tan \theta}{2 \omega_1 \tan \lambda \tan \theta}$$

$$- \frac{\cos \theta}{\cos \theta}$$

$$- 2 \omega_1 \tan^2 \varphi \tan \lambda \sin \theta \tan^2 \theta$$

$$+ 2 \omega_2 \cos \theta \tan \varphi \tan \lambda / \cos \varphi$$

حل رابطه فوق به صورت زیر خواهد بود:

$$A \cos^2 \lambda S^2 - C \cos \lambda S - B = 0 \quad (65)$$

→



نظر گرفته شده است.

۵-۱-۱. حسگر واقعی

جدول ۱. زاویه رول محاسبه شده به کمک روابط با

فرض حسگر واقعی

درصد خطای φ با فرض حسگر ایده آل	درصد خطای φ	$\hat{\varphi}^\circ$	روش
۰	۰,۰۱۱۰	۵۰,۰۰۵۰	روش اول
۰	۰,۰۱۱۰	۵۰,۰۰۵۶	روش دوم
۰	۰,۰۰۷۰	۵۰,۰۰۳۰	روش سوم
۰	۰,۱۴۵۰	۵۰,۰۷۲۰	روش چهارم

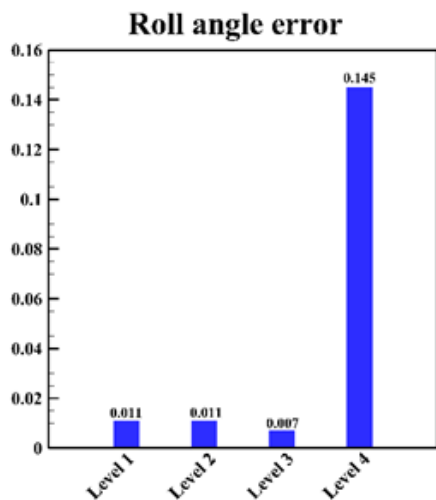
جدول ۲. زاویه پیچ محاسبه شده به کمک روابط با فرض

حسگر واقعی

درصد خطای θ با فرض حسگر ایده آل	درصد خطای θ	$\hat{\theta}^\circ$	روش
۰	۰,۰۰۱۶	۲۹,۹۹۹۰	روش اول
۰	۰,۰۰۱۵	۲۹,۹۹۹۵	روش دوم
۰	۰,۰۱۲۰	۳۰,۰۰۴۰	روش سوم
۰	۰,۰۲۱۰	۲۹,۹۹۴۰	روش چهارم

نمودارهای زیر، خطای زوایای رول و پیچ را در

حسگر شتابسنج واقعی نشان می دهد.



شکل ۱. نمودار درصد خطای زاویه رول

بر اساس رابطه های (۵۷) و (۷۰) می توان

نوشت:

$$S^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 \rightarrow S \quad (70)$$

$$= \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$$

از آنجاکه علامت S در فرایند کالیبراسیون

تعیین شده است، تنها یکی از جواب های رابطه

فوق قابل قبول است. همچنین می توان تقریب زیر

را به کار برد:

$$S^2 = (1 + sf)^2$$

$$= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \beta$$

$$\rightarrow sf^2 + 2sf + 1 \quad (71)$$

$$- \beta = 0$$

$$sf^2 \approx 0 \rightarrow 2sf + 1 - \beta = 0$$

$$\rightarrow sf = \frac{\beta - 1}{2}$$

لازم به ذکر است در حالت سکون $\omega = 0$

در نظر گرفته می شود.

۵. شبیه سازی

در این قسمت به شبیه سازی و صحت سنجی

روابط استخراج شده پرداخته می شود.

شبیه سازی ها به کمک محیط سیمولینک نرم افزار

متلب و با استفاده از بلوک های موجود در آن

انجام شده است؛ به این صورت که در ابتدا زوایای

تراز و سمت مقادیری فرض شده سپس به کمک

روابط مدل سازی شده برای خروجی حسگرها

همان زوایا برای دو حالت حسگر ایده آل و واقعی

محاسبه شده اند.

۵-۱. شبیه سازی زوایای تراز

زوایای تراز به صورت زاویه رول $\phi = 50^\circ$ و زاویه

پیچ $\theta = 30^\circ$ فرض شده است. شتابسنج فرضی

نیز دارای ضریب مقیاس $sf = 50 \mu$ ، عدم

هم محوری $MA = 10 \text{ arc/s}$ و بایاس آن $b = 100 \mu\text{g}$

می باشد. اثر اغتشاش نیز به صورت نویز سفید با

دامنه ای حدود ۵ درصد مقادیر نامی شتاب، در



۵-۲. شبیه‌سازی زاویه سمت

زاویای تراز به صورت زاویه رول $\phi = 50^\circ$ و زاویه پیچ $\theta = 30^\circ$ فرض شده است. در این بخش زاویه سمت مقدار $\psi = 88^\circ$ و عرض جغرافیایی نیز مقدار $\lambda = 35^\circ$ شتابسنج فرض شده است؛ جایرو نیز دارای ضریب مقیاس $sf = 20\mu$ ، عدم هم محوری $MA = 5 \text{ arc/s}$ و بایاس $b = 0.01 \text{ arc/s}$ می‌باشد. اثر اغتشاش نیز، به صورت نویز سفید با دامنه‌ای حدود ۵ درصد مقادیر نامی سرعت زاویه‌ای، در نظر گرفته شده است.

۵-۲-۱. حسگر ایده آل

جدول ۵. زاویه سمت محاسبه شده به کمک روابط با فرض حسگر ایده آل

درصد خطای ψ	$\hat{\psi}^\circ$	روش
۰	۸۸	روش اول (حالت اول)
۰	۸۸	روش اول (حالت دوم)
۰	۸۸	روش دوم
۰	۸۸	روش سوم
۰	۸۸	روش چهارم
۰	۸۸	روش پنجم

جدول ۶. بایاس محاسبه شده جایروی نرخ با فرض

حسگر ایده آل

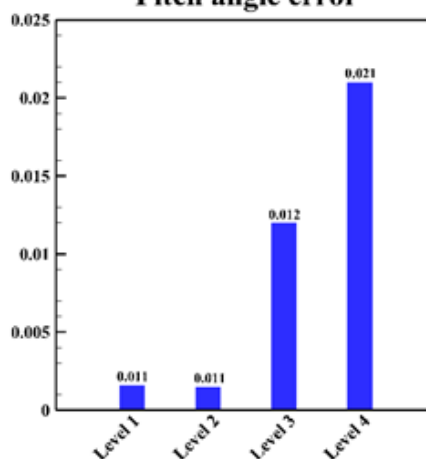
درصد خطای b	$b \text{ (arc/s)} \times 10^{-8}$	روش
۰	۴,۸۵	روش چهارم

جدول ۷. ضریب مقیاس محاسبه شده جایروی نرخ با

فرض حسگر ایده آل

درصد خطای S	S	روش
۰	۱,۰۰۰۰۲	روش چهارم
۰	۱,۰۰۰۰۲	روش پنجم
۰	۱,۰۰۰۰۲	روش ششم

Pitch angle error



شکل ۲. نمودار درصد خطای زاویه پیچ

با توجه به نمودارها، بیشترین خطای زاویه رول در روش چهارم و کمترین خطا در حالت سوم رخ داده است. در حالت‌های اول و دوم نیز خطاها تقریباً مساوی هستند. همچنین بیشترین خطای زاویه پیچ نیز در روش چهارم و کمترین خطای آن در روش دوم رخ داده است. علت بالا بودن خطا در حالت چهارم نسبت به بقیه حالت‌ها، بالا بودن نویز شتابسنج در کانال y است.

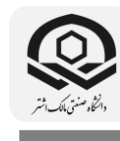
جدول ۳. بایاس محاسبه شده شتابسنج با فرض حسگر واقعی

درصد خطای b با فرض حسگر ایده آل	درصد خطای b	$b \text{ (}\mu\text{g)}$	روش
۰	۲۲,۳	۷۷,۴	روش پنجم

جدول ۴. ضریب مقیاس محاسبه شده شتابسنج با

فرض حسگر واقعی

درصد خطای S با فرض حسگر ایده آل	درصد خطای S	S	روش
۰	۰,۰۰۱۸	۱,۰۰۰۰۶۸	روش پنجم



جدول ۸. ضریب مقیاس تقریبی محاسبه شده جابروی

نرخ با فرض حسگر ایده آل

درصد خطای $S_{approximate}$	$S_{approximate}$	روش
۰	۱,۰۰۰۰۱۹۹	روش پنجم

۲-۲-۵. حسگر واقعی

جدول ۹. زاویه سمت محاسبه شده به کمک روابط با

فرض حسگر واقعی

درصد خطای ψ	ψ°	روش
۰,۰۰۱۴	۸۸,۰۰۱۲	روش اول (حالت اول)
۰,۰۰۵۰	۸۸,۰۰۴۳	روش اول (حالت دوم)
۰,۰۱۲۱	۸۷,۹۸۹۰	روش دوم
۰,۵۰۲	۸۸,۴۴۲۰	روش سوم
۰,۰۰۱۷	۸۸,۰۰۱۵	روش چهارم
۰,۰۰۲۰	۸۸,۰۰۱۷	روش پنجم

حسگر جابروی ایده آل نباشد، با تغییر کوچکی در زاویه، کمان با نسبت بیشتری تغییر می کند. برای حل این مشکل باید اثر اغتشاش وارد بر جابروی را تا حد امکان از بین برد. بدین منظور از نویز سفید میانگین گیری شده است تا اثر آن تا حد امکان کاهش یابد. حساس ترین روش نیز روش سوم است که در آن نیاز به حل یک معادله جبری مثلثاتی درجه چهار است.

جدول ۱۰. بایاس محاسبه شده جابروی نرخ با فرض

حسگر واقعی

درصد خطای b	$b(arc/s) \times 10^{-8}$	روش
۳,۰۶۳	۴,۴۹	روش چهارم

جدول ۱۱. ضریب مقیاس محاسبه شده جابروی نرخ با

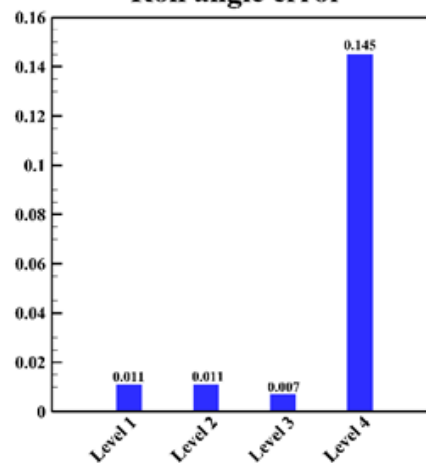
فرض حسگر واقعی

درصد خطای S	S	روش
۰,۰۰۳۷	۱,۰۰۰۰۱۲	روش چهارم
۰,۰۰۰۰۳۶۱۳	۱,۰۰۰۰۱۹۹	روش پنجم
۰,۰۰۳۱۰	۱,۰۰۰۰۵۰	روش ششم

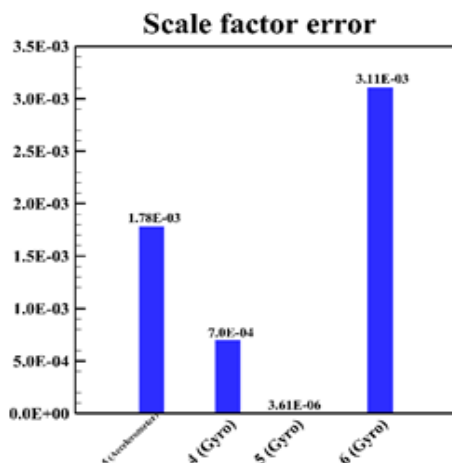
نمودار زیر، درصد خطای زاویه سمت را

نمایش می دهد.

Roll angle error

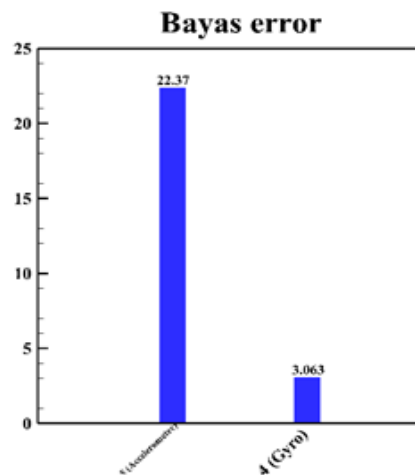


شکل ۳. نمودار درصد خطای زاویه سمت



شکل ۴. نمودار درصد خطای بایاس شتاب سنج (روش پنجم) و جابروی (روش چهارم)

با توجه به نمودار فوق، روش سوم بیشترین خطا و حالت اول در روش اول علی رغم بالا بودن مقدار نویز روی خروجی جابروی، خطای کمتری نسبت به سایر روش ها دارد. در روش های محاسبه زاویه سمت، عموماً یک معادله مثلثاتی مورد استفاده قرار می گیرد که در حالتی که



شکل ۵. نمودار درصد خطای ضریب مقیاس شتابسنج (روش پنجم) و جایرو (روش چهار و پنج و ششم)

از میان روش های محاسبه بایاس جایرو نرخ، روش ششم نسبت به سایر روش ها کمترین خطا را دارد. بایاس شتابسنج در روش پنجم محاسبه زوایای تراز خطای نسبتاً بزرگی دارد که علت بالا بودن خطای بایاس (حدود ۲۲ درصد) نزدیک بودن مقدار آن با عدم هم‌محوری ها در راستای Y و Z می‌باشد.

جدول ۱۲. ضریب مقیاس تقریبی محاسبه شده جایرو
نرخ با فرض حسگر واقعی

درصد خطای	$S_{approximate}$	روش
$S_{approximate}$		
۰,۰۰۰۰۰۳۶۱۴	۱,۰۰۰۰۱۹۸	روش پنجم
۰,۰۰۰۰۳۱۲	۱,۰۰۰۰۰۴۹	روش ششم

۶. نتیجه گیری و جمع بندی

فرض بر ایده آل بودن حسگر گرچه در واقعیت رخ نمی‌دهد؛ اما به کمک آن می‌توان معادلات استخراج شده را صحت‌گذاری کرد.

در روش های اول و دوم محاسبه زوایای تراز که در آن حسگر حساس شتابسنج در کانال X قرار می‌گیرد، از آنجاکه از دو نیروی کوریولیس و گریز از مرکز در مقابل گرانش صرف‌نظر می‌شود، دقت و اعتبار کمتری نسبت به روش های سوم و

چهارم که در این روش ها حسگر حساس شتابسنج در کانال Y قرار می‌گیرد، دارد. بنابراین برای محاسبه زاویه رول و پیچ، پیشنهاد می‌شود حسگر حساس مذکور، در کانال Y قرار گرفته و از روش سوم که روش دقیق تر و حساس تری می‌باشد، می‌توان برای دستیابی به نتایج بهتر و دقت بالاتر استفاده کرد.

برای محاسبه زاویه سمت، حالت اول در روش اول خطای کمتری دارد همچنین به دلیل وجود معادله های پیچیده مثلثاتی در سایر روش ها که موجب افزایش خطاهای حسگرها می‌شود نیز بهتر است از این حالت در روش اول استفاده کرد.

برای تصحیح ضریب مقیاس جایرو، روش پنجم روش ارجح تری می‌باشد و برای تصحیح بایاس آن، روش ششم دقت بیشتری دارد.

برای تصحیح ضریب مقیاس و بایاس شتابسنج می‌توان از روش پنجم استفاده کرد که البته بایاس در این روش خطای نسبتاً بزرگی دارد؛ که می‌توان در آینده درباره روش هایی که موجب کاهش خطای بایاس و ضریب مقیاس و عدم هم‌محوری حسگرهای شتابسنج می‌شود نیز پژوهش انجام داد.

۷. مآخذ

- [1] M. Nowrozi, M. Ebrahimi and M. Arbabmir, "A review on the integration methods of inertial navigation system and global positioning and new approaches in this field". *Mechanical Engineering Journal*, serial number 84, volume 48, number 3. Tarbiat Modares University 2017.
- [2] L. Schimelevich and R. Naor, "New approach to coarse alignment," in *Proceedings of Position, Location and Navigation Symposium-PLANS'96*, 1996: IEEE, pp. 324-327.
- [3] I. Klein and Y. Bar-Shalom, "INS Fine Alignment With Low-Cost Gyroscopes: Adaptive Filters for Different Measurement Types," *IEEE Access*, vol. 9, pp. 79021-79032, 2021.

F. (2011). Rapid fine strapdown INS alignment method under marine mooring condition. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 47(4), 2887-2896.

[17] Cho, I. J., & Yoon, E. (2009). A low-voltage three-axis electromagnetically actuated micromirror for fine alignment among optical devices. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 19(8), 085007.

[18] A. Tsukerman and I. Klein

Analytic steady-state solution of fine alignment with velocity measurements In *Proc. IEEE Int. Conf. Sci. Elect. Eng.*, 2016, pp. 1-4.

[19] E. Vaknin and I. Klein

Coarse leveling of gyro-free INS *Gyroscopy Navig.*, vol. 7, pp. 145-151, 2016.

[20] P. D. Groves

Principles of GNSS *Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems*. Norwood, MA, USA: Artech House, 2008.

[21] D. Titterton, J. L. Weston, and J. Weston, *Strapdown inertial navigation technology*. IET, 2004.

[22] P. H. Zipfel, *Modeling and simulation of aerospace vehicle dynamics*. AIAA, 2000.

[23] R. M. Rogers, *Applied mathematics in integrated navigation systems*. Aiaa, 2003.

[24] C.-T. Chen, "Linear System Theory and Design," 1999.

[25] D. Simon, *Optimal state estimation: Kalman, H infinity, and nonlinear approaches*. John Wiley & Sons, 2006.

[4] W. Bin, W. Jian, W. Jianping, and C. Baigen, "Study on adaptive GPS/INS integrated navigation system," in *Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Intelligent Transportation Systems*, 2003, vol. 2: IEEE, pp. 1016-1021.

[5] K. R. Britting, *Inertial navigation systems analysis*. AIAA, 2010.

[6] I. Y. Bar-Itzhack and N. Berman, "Control theoretic approach to inertial navigation systems," *Journal of Guidance, control, and Dynamics*, vol. 11, no. 3, pp. 237-245, 1988.

[7] Lee, J. G., Park, C. G., & Park, H. W. Multiposition alignment of strapdown inertial navigation system. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic systems*, 29(4), 1323-1328. (1993).

[8] Hildebrant, R. R., Britting, K. R., & MADDEN JR, S. J. (1974). The effects of gravitational uncertainties on the errors of inertial navigation systems. *Navigation*, 21(4), 357-363.

[9] Siouris, G. M. *Navigation, inertial*. Encyclopedia of Physical Science and Technology, Vol. 8. (1987).

[10] Bar-Itzhack, I. Y., & Berman, N. (1988). Control theoretic approach to inertial navigation systems. *Journal of Guidance, control, and Dynamics*, 11(3), 237-245.

[11] Jiang, Y. F., & Lin, Y. P. (1992). Error estimation of INS ground alignment through observability analysis. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic systems*, 28(1), 92-97.

[12] Park, C. G., & Lee, J. G. (1991). An overlapping decomposed filter for INS initial alignment. *Journal of the Korean Society for Aeronautical and Space Sciences*, 19(3), 65-76.

[13] Goshen-Meskin, D. R. O. R. A., & Bar-Itzhack, I. Y. (1992). Observability analysis of piece-wise constant systems. II. Application to inertial navigation in-flight alignment (military applications). *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic systems*, 28(4), 1068-1075.

[14] Ham, F. M., & Brown, R. G. (1983). Observability, eigenvalues, and Kalman filtering. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, (2), 269-273.

[15] Tsukerman, A., & Klein, I. (2017). Analytic evaluation of fine alignment for velocity aided INS. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 54(1), 376-384.

[16] Gao, W., Ben, Y., Zhang, X., Li, Q., & Yu,



۸. علائم و اختصارات

ω_y	مقدار حقیقی خروجی جایرو نرخ‌ی کانال Y		
ω_z	مقدار حقیقی خروجی جایرو نرخ‌ی کانال Z	E	تنسور یکنانی مرتبه دوم
N	چهارچوب ناوبری	f_x	مقدار حقیقی خروجی شتاب‌سنج کانال X
I	چهارچوب اینرسی	f_y	مقدار حقیقی خروجی شتاب‌سنج کانال Y
E	چهارچوب زمین	f_z	مقدار حقیقی خروجی شتاب‌سنج کانال Z
B	چهارچوب بدنی	g	بردار جاذبه
		h	ارتفاع از سطح بیضی‌گون مینا

\mathbf{r}_{BE}	موقعیت مبدأ چهارچوب بدنی نسبت به مرکز زمین
R_e	شعاع زمین
$[\mathbf{T}]^{AB}$	ماتریس تبدیل از چهارچوب B به چهارچوب A

۹. پی‌نوشت

¹ Inertial Navigation System

² Inertial Measurement Unit (IMU)

³ Global Positioning System

⁴ Strapdown

⁵ Stable platform

⁶ Coarse Alignment

⁷ Fine Alignment

⁸ Gyro-Compass

^۹ به‌عنوان مثال به کمک بلوک Algebraic Constraint در محیط

Simulink نرم‌افزار Matlab

v_n	مؤلفه سرعت نسبت به زمین در راستای شمال جغرافیایی
v_e	مؤلفه سرعت نسبت به زمین در راستای شرق جغرافیایی
v_d	مؤلفه سرعت نسبت به زمین و به سمت مرکز زمین
\mathbf{v}_B^E	سرعت مبدأ چهارچوب بدنی نسبت به چهارچوب زمین
$\hat{\mathbf{x}}$	تخمین بردار \mathbf{x}

$\hat{\mathbf{X}}$ تخمین تنسور مرتبه دوم \mathbf{X}

ℓ طول جغرافیایی

λ عرض جغرافیایی

ε عملگر اغتشاش

$\varepsilon\phi$ مؤلفه بردار انحراف در راستای شمال جغرافیایی

$\varepsilon\theta$ مؤلفه بردار انحراف در راستای شرق جغرافیایی

$\varepsilon\psi$ مؤلفه بردار انحراف به سمت مرکز زمین

$\varepsilon\mathbf{r}^{\hat{N}N}$ بردار انحراف تخمین دستگاه جغرافیایی نسبت به دستگاه جغرافیایی واقعی

$\varepsilon\mathbf{R}^{\hat{N}N}$ تنسور شبه‌متقارن بردار انحراف تخمین دستگاه جغرافیایی نسبت به دستگاه جغرافیایی واقعی

ω^{AB} بردار سرعت زاویه‌ای چهارچوب A نسبت به چهارچوب B

Ω^{AB} تنسور شبه‌متقارن بردار سرعت زاویه‌ای چهارچوب A نسبت به چهارچوب B

ω_x مقدار حقیقی خروجی جایرو نرخ‌ی کانال X

