

بررسی رفتار ارتعاشی پوسته‌های کامپوزیتی مخروطی تقویت‌شده با شبکه ناهمسان مشبک با روش تفاضل مربعات

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۹/۲۸

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۲/۲۴

علی اصغر نادری^۱

۱- استادیار، دانشکده مهندسی، دانشگاه امام علی (ع)، تهران، aa.naderi@modares.ac.ir

چکیده

پژوهش حاضر با هدف مطالعه رفتار ارتعاشی پوسته‌های کامپوزیتی مخروطی تقویت‌شده با شبکه ناهمسان مشبک، با استفاده از روش تحلیلی انجام شده است. بدین منظور، از روش معادل‌سازی برای تعیین پارامترهای سفتی معادل سخت‌کننده‌ها استفاده می‌شود. در این روش، مجموعه سخت‌کننده‌ها با یک پوسته معادل که از نظر سفتی معادل یکدیگر هستند، جایگزین می‌شود و سپس برای دستیابی به سفتی معادل کل سازه، با سفتی‌های پوسته جمع می‌شوند. سخت‌کننده‌ها به صورت تیر مدل‌سازی می‌شوند تا توانایی تحمل بار برشی و لنگرهای خمشی همراه با بارهای محوری را داشته باشند. معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله با اعمال اصل همپلتون و بر مبنای تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی استخراج و سپس با استفاده از روش تفاضل مربعات به گروهی از معادلات جبری تبدیل می‌شوند. در ادامه رابطه مسئله مقدار ویژه استخراج و در نتیجه آن فرکانس طبیعی محاسبه می‌شوند. برای صحت‌سنجی نتایج، مقایسه‌ای میان نتایج به دست آمده و نتایج سایر محققان صورت گرفته است. سپس تأثیر پارامترهای مختلف مانند زاویه نیم رأس مخروط، عدد موج محیطی و اثر شرایط مرزی مختلف بر فرکانس‌های طبیعی سیستم ارزیابی شده است.

واژه‌های کلیدی: رفتار ارتعاشی، پوسته‌های کامپوزیتی مخروطی، شبکه ناهمسان مشبک، روش معادل‌سازی، روش تفاضل مربعات

Vibrational behavior investigation of composite conical shells reinforced by an anisogrid lattice structure using differential quadrature method

Ali Asghar Naderi¹

1- Department of Engineering, Imam Ali University, Tehran, aa.naderi@modares.ac.ir

Abstract

The present study aims to investigate the vibrational behavior of composite conical shells reinforced by an anisogrid lattice structure, using the analytical method. For this purpose, the smeared method was employed to determine the equivalent stiffness contribution of the stiffeners. In this approach, the smeared method was used to superimpose the stiffness contribution of the stiffeners with those of the shell to obtain the equivalent stiffness of the whole structure. The stiffeners were modeled as beams that can support shear forces and bending moments along with the axial forces. The governing partial differential equations of the problem are derived by applying Hamilton's principle and based on the first-order shear deformation theory, and then they are converted into a group of algebraic equations by using the differential quadrature method. Then, eigenvalue problem, and as a result, natural frequencies are calculated. In order to validate the results, comparisons of the present results with those of other studies are performed. Then, the effect of different parameters such as semi-vertex angle, circumferential wave number and the effect of different boundary conditions on the natural frequencies of the system has been evaluated.

Keywords: vibrational behavior, composite conical shells, anisogrid lattice structure, smeared method, differential quadrature method.

۱۸۳

سال ۱۳ - شماره ۱

بهار و تابستان ۱۴۰۲

نشریه علمی

دانش و فناوری هوا فضا



۱. مقدمه

سازه‌های کامپوزیتی به‌طور فزاینده‌ای در صنایع هوایی، نظامی و هوافضا در طول سه دهه گذشته استفاده شده‌اند. سختی و استحکام ویژه بالا به همراه سبکی وزن این قابلیت را به وجود آورده که این سازه‌ها به‌طور گسترده توسط مهندسان در زمینه‌های مختلف مهندسی به کار گرفته شود [۱]. سازه‌های مشبک کامپوزیتی یکی از این پرکاربردترین سازه‌ها هستند که به شکل‌های همسان و ناهمسان طراحی و استفاده می‌شوند. این نوع سازه‌ها از تعدادی سخت‌کننده محیطی و مارپیچی تشکیل شده‌اند که به‌صورت منفرد یا همراه با پوسته خارجی استفاده می‌شوند [۲]. پوسته‌های مخروطی تقویت‌شده با سخت‌کننده‌های داخلی از جمله پراستفاده‌ترین اشکال به‌کاررفته در قطعات صنعتی می‌باشند که شناخت رفتار ارتعاشی آن‌ها برای جلوگیری از بروز پدیده تشدید اهمیت ویژه‌ای دارد. اکثر پژوهش‌های انجام‌شده درباره رفتار ارتعاشی و مکانیکی پوسته‌های مخروطی تقویت‌شده، محدود به سخت‌کننده‌های همسان بوده و پژوهش‌های اندکی به سازه‌های کامپوزیتی تقویت‌شده با سخت‌کننده‌های ناهمسان تعلق یافته‌اند. بر این اساس، زارعی و رحیمی [۳] با ارائه مدلی تحلیلی و با روش سری‌های توانی اثر شرایط مرزی و ضخامت متغیر پوسته را بر رفتار ارتعاشی پوسته‌های مخروطی تقویت‌شده با سخت‌کننده‌های مایل بررسی کردند و نتایج حاصله از تحلیل را با نتایج عددی و تجربی مقایسه کردند. آن‌ها همچنین رفتار کمانشی پوسته‌های مخروطی تقویت‌شده با شبکه مشبک و پوسته‌های مخروطی- استوانه‌ای متصل شده به هم را هنگامی که سازه زیر فشار جانبی قرار می‌گیرد،

مورد آنالیز قرار داده‌اند [۴، ۵]. در پژوهشی دیگر زارعی و همکاران [۶] فرکانس‌های طبیعی پوسته‌های مخروطی تقویت‌شده با شبکه همسان را با روش ریتز به دست آوردند و نتایج را با مدل‌های آزمایشگاهی و عددی مقایسه کردند. بنی جمالی و جعفری [۷] ارتعاشات پوسته مخروطی دوار مدرج تابعی را که با شبکه ناهمسان مشبک تقویت شده است بررسی کردند. در این کار آن‌ها از روش گالرکین برای حل معادلات برای شرایط مرزی مختلف استفاده نموده‌اند و به این نتیجه رسیده‌اند که حداکثر و حداقل مقادیر فرکانس طبیعی مرتبط با شرایط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد می‌باشد. نادری و احمدی [۸] با استفاده از آنالیز مسیر الیاف پوسته و ریب شبکه، مقاومت کمانشی و ضرایب سفتی پوسته‌های مشبک مخروطی را به دست آورده‌اند. نتایج این کار نشان‌دهنده تغییر سختی معادل شبکه تقویت‌شده با تغییر فاصله ریب‌ها از لبه کوچک پوسته به سمت لبه بزرگ پوسته مخروطی می‌باشد. در پژوهشی دیگر نادری و رحیمی [۹] بار کمانشی بحرانی یک پوسته مشبک کامپوزیتی تحت بار محوری را با استفاده از رابطه اویلری استخراج نموده‌اند و نتایج را با نمونه آزمایشگاهی مقایسه کرده‌اند. بررسی رفتار ارتعاشی پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده با شبکه مشبک و بر مبنای تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی توسط همت‌نژاد و همکاران انجام شده است. آن‌ها اثر نیروی برشی را در نیروها و ممان‌های منته‌جه یک سلول واحد در نظر گرفتند و ضرایب سفتی کل سازه را با تلفیق سفتی سخت‌کننده‌ها و پوسته به دست آورده‌اند [۱۰]. یزدانی و رحیمی اثرات نوع شبکه مشبک و تعداد سخت‌کننده را بر روی کمانش استوانه‌های



مشبک موردسنجش قرار داده‌اند [۱۱، ۱۲]. علاوه بر این، آن‌ها به صورت آزمایشگاهی رفتار کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای تقویت‌شده را بررسی نموده‌اند [۱۳]. توتارو مشخصات سفتی پیچشی، خمشی و محوری پوسته‌های مخروطی مشبک با ریب‌های مارپیچی و حلقه‌های متقاطع را بررسی کرده است. در این کار، مشخصات الاستیک معادل همراه با تئوری غشایی کلاسیک پوسته‌های مخروطی بیان شدند و صحت و دقت مدل‌های توسعه‌یافته با روش اجزای محدود تأیید شده است [۱۴]. بار کمانشی بحرانی پوسته‌های استوانه‌ای مشبک با شبکه همسان با در نظر گرفتن پارامترهایی همچون ضخامت پوسته، زاویه قرارگیری سخت‌کننده‌ها و زاویه الیاف پوسته توسط قاسمی و همکاران مورد مطالعه قرار گرفت. در این کار با استفاده از رویکرد معادل‌سازی و بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی و روش رایلی ریتز بار کمانشی بحرانی این پوسته‌ها به دست آمده و نتایج با روش اجزای محدود برای شرایط مرزی گیردار مقایسه شده است [۱۵]. در پژوهشی دیگر دوک و همکاران کمانش حرارتی پوسته‌های ساندویچی مخروطی مدرج تابعی که با سخت‌کننده‌های متعامد تقویت‌شده است را با تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی مورد مطالعه قرار داده‌اند. آن‌ها از روش گالرکین برای حل معادلات حاکم بر مسئله استفاده نموده‌اند و به این نتیجه رسیده‌اند که تعداد سخت‌کننده‌ها تأثیر زیادی بر بار بحرانی حرارتی سازه می‌گذارد [۱۶]. دانشجو و همکاران ارتعاشات پوسته‌های دوار مخروطی با تقویت‌کننده‌های متعامد را با روش انرژی و تفاضل مربعات تحلیل کرده‌اند. این محققان یک مدل المان محدود سه‌بعدی را با استفاده از نرم‌افزار آباکوس برای اعتبارسنجی

بیشتر راه‌حل‌های تحلیلی خود بسط و توسعه داده‌اند [۱۷، ۱۸]. به دلیل هندسه ساده ورق‌ها و پوسته‌های استوانه‌ای تقویت‌شده، توزیع سخت‌کننده‌ها در این‌گونه ساختارها به صورت یکنواخت می‌باشد. در ساختارهای مخروطی به سبب هندسه خاص و شعاع متغیر در طول سازه، توزیع سخت‌کننده‌ها نمی‌تواند یکنواخت باشد. همانند پوسته‌های استوانه‌ای، دو روش کلی برای به دست آوردن سفتی معادل کل سازه برای یک پوسته مخروطی وجود دارد. برخی از محققان از روش گسسته استفاده نموده‌اند [۱۹-۲۱] در حالی که برخی دیگر از روش معادل‌سازی برای بررسی ارتعاشی و کمانشی پوسته‌های مخروطی تقویت‌شده استفاده می‌کنند [۲۳، ۲۲].

در سال‌های اخیر تحقیقات گسترده‌ای درباره ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی همگن و کامپوزیتی انجام شده است. بر این اساس، لیو و همکاران [۲۴] با روش ریتز و اجزای محدود تأثیر شرایط مرزی و پارامترهای مختلف هندسی بر ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی همگن را بررسی کردند. ژانگ [۲۵] رفتار ارتعاشی سازه‌های کامپوزیتی مخروطی را با استفاده از روش موج‌ها برای شرایط مرزی مختلف بررسی کرده است. همچنین در پژوهش دیگری ایری [۲۶] با روش ماتریس انتقال، ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی با ضخامت متغیر را بررسی کرده است.

مروری بر ادبیات تحقیق نشان می‌دهد که کارهای محدودی در زمینه ارتعاشات سازه‌های مخروطی تقویت‌شده با شبکه مشبک ناهمسان انجام شده است و حل عددی اکثر مسائل انجام‌شده با روش‌های گالرکین، سری توانی و رایلی ریتز می‌باشند؛ در این پژوهش تلاش شده



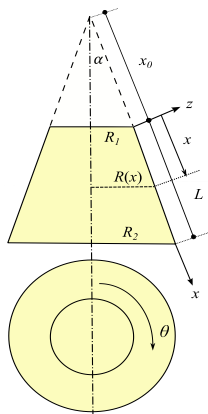
سخت‌کننده‌های محیطی و مارپیچی (b_c, b_h) ، ضخامت سخت‌کننده‌ها (δ_{st}) و تعداد سخت‌کننده‌های محیطی و مارپیچی (n_c, n_h) می‌باشند. برای بسط تحلیلی سازه مشبک، نیاز است یک سلول واحد از سازه مطابق شکل ۲ تعریف شود. سلول واحد به گونه‌ای انتخاب می‌شود که کل سازه مشبک را می‌توان با تکرار این سلول واحد بازتولید کرد. با فرض قرارگیری سخت‌کننده‌های شبکه مشبک بر روی مسیر ژئودزیک، زاویه قرارگیری یک سخت‌کننده مارپیچی نسبت به محور در هر نقطه از پوسته مخروطی به صورت زیر به دست می‌آید $[\gamma]$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sin^{-1} \left(\frac{R_2 \sin(\varphi_2)}{R(x)} \right) \\ &= \sin^{-1} \left(\frac{R_1 \sin(\varphi_1)}{R(x)} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن $R(x)$ شعاع مخروط در بازه طولی $x_0 \leq x \leq x_0 + L$ می‌باشد. همچنین φ_1 و φ_2 زاویه قرارگیری سخت‌کننده مارپیچی نسبت به محور x در شعاع بزرگ و کوچک هستند که به صورت زیر معرفی می‌شوند $[\gamma]$:

$$\varphi_1 = \tan^{-1} \left(\frac{R_2 \sin(\gamma)}{R_2 \cos(\gamma) - R_1} \right) \quad (2)$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \gamma \quad (3)$$



شکل ۱. نما و مقطع شماتیک از پوسته مخروطی به همراه محور مختصات

است برای اولین بار از روش تفاضل مربعات برای تحلیل رفتار ارتعاشی پوسته‌های مخروطی تقویت شده با شبکه ناهمسان استفاده شود. برای دستیابی به این هدف، با فرضیات تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی و روش معادل‌سازی ماتریس‌های سختی پوسته کامپوزیتی خارجی و سخت‌کننده‌ها به دست می‌آیند و با اعمال اصل برهم‌نهی ماتریس سختی معادل کل سازه استخراج می‌شوند. سپس با اعمال اصل همپلتون معادلات حرکت و شرایط مرزی مسئله به دست می‌آیند و با روش تفاضل مربعات اقدام به گسسته‌سازی و تشکیل مسئله مقادیر ویژه می‌شود. در نهایت تلاش می‌شود تا تأثیر تعدادی از پارامترهای هندسی پوسته مخروطی بر فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها بررسی شود.

۲. توضیح مسئله

مطابق شکل ۱، یک پوسته مخروطی تقویت‌شده با سازه مشبک غیرهمسان را در نظر بگیرید. در این شکل R_1 و R_2 به ترتیب شعاع مقاطع دایره ای ابتدایی و انتهایی سازه مخروطی، 2α زاویه رأس مخروط، L طول یال مخروط و t ضخامت پوسته می‌باشند. همچنین از سیستم مختصات منحنی الخط (x, θ, z) که در فاصله x_0 از رأس مخروط و در صفحه میانی پوسته مخروطی قرار دارد، استفاده می‌شود. با توجه به پیچیدگی‌های سازه مشبک مخروطی، پارامترهای هندسی سازه به دو گروه وابسته و مستقل طبقه‌بندی می‌شوند. پارامترهای وابسته شامل زاویه سخت‌کننده مارپیچی نسبت به محور پوسته (φ) و فاصله بین سخت‌کننده‌های محیطی و مارپیچی می‌باشند (a_c, a_h) . پارامترهای مستقل شامل عرض



$$\begin{cases} u(x, \theta, z) = u_0(x, \theta) + z\varphi_x(x, \theta) \\ v(x, \theta, z) = v_0(x, \theta) + z\varphi_\theta(x, \theta) \\ w(x, \theta, z) = w_0(x, \theta) \end{cases} \quad (6)$$

که u_0 ، v_0 و w_0 به ترتیب بیانگر جابه‌جایی‌های صفحه میانی در جهت‌های x ، θ و z ، φ_x و φ_θ بیانگر چرخش‌های عمود بر صفحه میانی حول محورهای θ و x هستند. با فرض پیوستگی بین سخت‌کننده‌ها و پوسته و همچنین پیوستگی میدان کرنش در امتداد ضخامت سخت‌کننده‌ها و پوسته، مؤلفه‌های کرنش برای هر نقطه از پوسته معادل به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{cases} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{cases} = \begin{cases} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \end{cases} + z \begin{cases} \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_\theta^1 \\ \gamma_{x\theta}^1 \end{cases}, \quad (7)$$

$$\begin{cases} \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \end{cases} = \begin{cases} \gamma_{\theta z}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{cases}$$

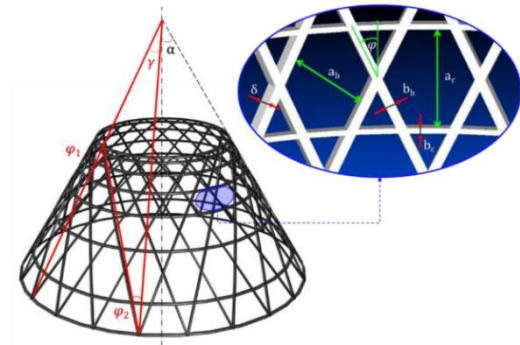
کرنش‌های سطح میانی و انحناها بر اساس تئوری پوسته مرتبه اول برشی به‌صورت زیر معرفی می‌شوند [۲۵]:

$$\begin{cases} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{R(x)\partial\theta} + \frac{w_0}{R(x)} \\ \frac{\partial u_0}{R(x)\partial\theta} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{cases}, \quad (1-8)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_\theta^1 \\ \gamma_{x\theta}^1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_\theta}{R(x)\partial\theta} \\ \frac{\partial \varphi_x}{R(x)\partial\theta} + \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x} \end{cases}, \quad (2-8)$$

$$\begin{cases} \gamma_{\theta z}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{cases} = \begin{cases} \varphi_\theta + \frac{\partial w_0}{R(x)\partial x} - \frac{v_0}{R(x)} \\ \frac{\partial w_0}{\partial\theta} + \varphi_x \end{cases}, \quad (3-8)$$

در ادامه روابط سازگاری پوسته کامپوزیتی مخروطی به‌صورت زیر بیان می‌شوند:



شکل ۲. شکلی شماتیک از سازه مشبک مخروطی شکل

$$\gamma = \pi \sin \alpha \frac{n_c - 1}{n_h} \quad (4)$$

همان‌گونه که در روابط بالا دیده می‌شود زاویه سخت‌کننده مارپیچی به‌صورت پیوسته در طول محور مخروط تغییر می‌کند که این موضوع برخلاف سخت‌کننده‌های مارپیچی در سازه‌های مشبک استوانه‌ای می‌باشد. علاوه بر زاویه سخت‌کننده‌های مارپیچی نسبت به محور پوسته، فواصل بین سخت‌کننده‌های محیطی و مارپیچی نیز وابسته به x می‌باشند که به‌صورت زیر بیان می‌شوند [۷]:

$$\begin{cases} a_c = \frac{\pi R(x)}{n_h \tan(\alpha)} \\ a_h = \frac{2\pi R(x) \cos(\alpha)}{n_h} \end{cases} \quad (5)$$

از رابطه (۵) مشخص می‌شود که تعداد سخت‌کننده‌های مارپیچی تأثیر مستقیمی بر فواصل بین سخت‌کننده‌های محیطی و مارپیچی خواهند داشت. علاوه بر موارد ذکر شده باید توجه داشت که سخت‌کننده‌ها به‌صورت تیر مدل‌سازی می‌شوند تا توانایی تحمل بار برشی و لنگرهای خمشی همراه با بارهای محوری را داشته باشند. با توجه به فرضیات تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی، میدان‌های جابه‌جایی پوسته مخروطی شکل به‌صورت زیر بیان می‌شود:

کامپوزیتی مخروطی نیاز است از رابطه (۹) برای ضخامت انتگرال گیری شود بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & [N_{xx}^{sh}, N_{\theta\theta}^{sh}, N_{x\theta}^{sh}]^T \\ &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} [\sigma_{xx}^{sh}, \sigma_{\theta\theta}^{sh}, \tau_{x\theta}^{sh}]^T dz \\ & [M_{xx}^{sh}, M_{\theta\theta}^{sh}, M_{x\theta}^{sh}]^T = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} [\sigma_{xx}^{sh}, \sigma_{\theta\theta}^{sh}, \tau_{x\theta}^{sh}]^T z dz \\ & [Q_{xz}^{sh}, Q_{\theta z}^{sh}]^T = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} [\sigma_{xz}^{sh}, \sigma_{\theta z}^{sh}]^T z dz \end{aligned} \quad (12)$$

پس از انتگرال گیری، روابط بالا به شکل ماتریسی به صورت زیر بازنویسی می شوند:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx}^{sh} \\ N_{\theta\theta}^{sh} \\ N_{x\theta}^{sh} \\ M_{xx}^{sh} \\ M_{\theta\theta}^{sh} \\ M_{x\theta}^{sh} \\ Q_{xz}^{sh} \\ Q_{\theta z}^{sh} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A]^{sh} & [B]^{sh} & 0 \\ [B]^{sh} & [D]^{sh} & 0 \\ 0 & 0 & [H]^{sh} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \\ \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_\theta^1 \\ \gamma_{x\theta}^1 \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

در این رابطه A_{ij}^{sh} و H_{ij}^{sh} سختی کششی، B_{ij}^{sh} سختی کششی-خمشی و D_{ij}^{sh} سختی خمشی پوسته کامپوزیتی مخروطی هستند که به صورت زیر بیان می شوند:

$$\begin{aligned} & ([A]^{sh}, [B]^{sh}, [D]^{sh}) \\ &= \sum_{k=1}^{N_s} \int_{z_k}^{z_{k+1}} [\bar{Q}_{ij}^k]^{sh} (1, z, z^2) dz, \\ & i, j = 1, 2, 6. \end{aligned} \quad (14)$$

$$[H]^{sh} = \sum_{k=1}^{N_s} \int_{z_k}^{z_{k+1}} [\bar{Q}_{ij}^k]^{sh} (1, z, z^2) dz, \quad i, j = 4, 5.$$

که N_s بیانگر تعداد لایه پوسته کامپوزیتی مخروطی می باشد.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^{sh} \\ \sigma_\theta^{sh} \\ \sigma_{x\theta}^{sh} \\ \sigma_{\theta z}^{sh} \\ \sigma_{xz}^{sh} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (9)$$

که اندیس بالایی sh بیانگر پوسته و \bar{Q}_{ij} معرف ضرایب سختی پوسته $(i, j = 1, 2, 4, 5, 6)$ کامپوزیتی مخروطی هستند که به صورت زیر تعریف می شوند [۲۷]:

$$\begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{22} \\ \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{66} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C^4 & 2C^2S^2 & S^4 & 4C^2S^2 \\ C^2S^2 & C^2 + S^2 & C^2S^2 & -4C^2S^2 \\ S^4 & 2C^2S^2 & C^4 & 4C^2S^2 \\ C^3S & CS^3 - C^3S & -CS^3 & -2CS(C^2 - S^2) \\ CS^3 & C^3S - CS^3 & -C^3S & 2CS(C^2 - S^2) \\ C^2S^2 & -2C^2S^2 & C^2S^2 & C^2 - S^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_{22} \\ Q_{66} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{44} \\ \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{55} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 \\ -CS & CS \\ S^2 & C^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{44} \\ Q_{55} \end{Bmatrix}$$

در این رابطه C و S به ترتیب بیانگر $\cos \beta$ و $\sin \beta$ بوده که در آن β معرف زاویه قرارگیری فیبرهای تقویت کننده در لایه های پوسته کامپوزیتی مخروطی می باشد. ضرایب سختی Q_{ij} نیز به صورت زیر بیان می شوند:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{66} &= G_{12}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{44} = G_{23},$$

$$Q_{55} = G_{13},$$

در این رابطه E_1 و E_2 معرف مدول الاستیسیته، G_{12} ، G_{23} و G_{13} بیانگر مدول برشی و ν_{12} ، ν_{21} ضرایب پواسون لایه های پوسته کامپوزیتی مخروطی در جهات ماده می باشند. برای استخراج متجه های نیرو و ممان پوسته



۳. رویکرد معادل سازی در سخت کننده‌ها

برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی سازه تقویت شده با شبکه مشبک داخلی، در درجه اول نیاز به تعیین ماتریس سختی کل سازه معادل می‌باشد. بدین منظور از روش تقریب معادل سازی سخت کننده‌ها استفاده می‌شود. در این روش با انجام محاسبات ریاضی، بخش تقویت کننده سازه به یک چیدمان لایه‌ای معادل تبدیل می‌شود. در نهایت سازه اولیه شامل پوسته خارجی و بخش تقویت کننده، به سازه‌ای متشکل از پوسته خارجی و لایه معادل قسمت تقویت کننده تبدیل می‌شوند. برای دستیابی به این هدف، فرضیه‌های زیر در نظر گرفته می‌شود [۶]:

۱- سخت کننده‌های مارپیچی و عرضی علاوه بر نیروی محوری، نیروی برشی را نیز تحمل می‌کنند؛

۲- توزیع تنش‌های اعمالی به سطح مقطع عرضی سخت کننده‌ها به صورت یکنواخت هستند؛

۳- توزیع کرنش‌ها در راستای ضخامت سخت کننده‌ها و پوسته پیوسته هستند.

با توجه به پیوستگی میان سخت کننده‌ها و پوسته، کرنش‌های موجود در این فصل مشترک به عنوان شرایط سازگاری مسئله استفاده می‌شوند. در نتیجه، روابط تنش-کرنش مربوط به سخت کننده‌های مارپیچی در مختصات منحنی الخط به صورت زیر نوشته می‌شود [۶]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^h \\ \sigma_\theta^h \\ \sigma_{x\theta}^h \\ \sigma_{xz}^h \\ \sigma_{\theta z}^h \end{bmatrix}^i = [\bar{S}]^i \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{\theta z} \end{bmatrix}, \quad [\bar{S}]^i \quad (15)$$

$$= [T]^{-1} [S]^i [R] [S]^i [R]^{-1}$$

که اندیس بالایی h بیانگر سخت کننده مارپیچی، $[S]^i$ ماتریس سخت کننده‌های

مارپیچی ($i = extension, shear$)، [T] ماتریس تبدیل و [R] ماتریس روتر هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند [۶]:

$$(16) \quad [T] = \begin{bmatrix} c\varphi^2 & s\varphi^2 & 2s\varphi c\varphi & 0 & 0 \\ s\varphi^2 & c\varphi^2 & -2s\varphi c\varphi & 0 & 0 \\ -s\varphi c\varphi & s\varphi c\varphi & c\varphi^2 - s\varphi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c\varphi & -s\varphi \\ 0 & 0 & 0 & s\varphi & c\varphi \end{bmatrix}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[S]^{extension} = \frac{E_h b_h}{a_h(x)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[S]^{shear} = \frac{G_h b_h}{a_h(x)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که E_h مدول الاستیسیته و G_h مدول برشی هستند. علاوه بر این $c\varphi$ و $s\varphi$ به ترتیب معرف $\cos \varphi$ و $\sin \varphi$ هستند که در آن‌ها φ زاویه متغیر سخت کننده مارپیچی است که در رابطه (۱) معرفی شده است. مشابه بخش قبل، برای استخراج متوجه‌های نیرو و ممان تقویت کننده‌های مارپیچی نیاز است از روابط تنش در راستای ضخامت سخت کننده انتگرال گیری شود که به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$(17) \quad [N_{xx}^h, N_{\theta\theta}^h, N_{x\theta}^h]^T = \int_{-\delta_{st}-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} [\sigma_{xx}^h, \sigma_{\theta\theta}^h, \tau_{x\theta}^h]^T dz$$

$$[M_{xx}^h, M_{\theta\theta}^h, M_{x\theta}^h]^T = \int_{-\delta_{st}-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} [\sigma_{xx}^h, \sigma_{\theta\theta}^h, \tau_{x\theta}^h]^T z dz$$

$$[Q_{xz}^h, Q_{\theta z}^h]^T = \int_{-\delta_{st}-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} [\sigma_{xz}^h, \sigma_{\theta z}^h]^T dz$$

پس از انتگرال گیری از رابطه‌های بالا، نتایج را می‌توان به شکل ماتریسی به صورت زیر بازنویسی



نمود:

$$\begin{aligned}
 & ([A]^{st}, [B]^{st}, [D]^{st}, [H]^{st}) \\
 & = ([A]_{\varphi}^h, [B]_{\varphi}^h, [D]_{\varphi}^h, [H]_{\varphi}^h) \\
 & + ([A]_{-\varphi}^h, [B]_{-\varphi}^h, [D]_{-\varphi}^h, [H]_{-\varphi}^h) \\
 & + ([A]_0^c, [B]_0^c, [D]_0^c, [H]_0^c)
 \end{aligned} \quad (20)$$

اندیس بالایی c و st به ترتیب بیانگر سخت کننده محیطی و سخت کننده هستند. با توجه به اینکه ممان و نیروهای منتجه پوسته کامپوزیتی مخروطی و سازه مشبک تقویت کننده بر اساس کرنش و انحنای صفحه میانی به دست آمده اند، مطابق اصل برهم نهی می توان سختی کل سازه را به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} N \\ M \\ Q \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [A]^{sh} + [A]^{st} & [B]^{sh} + [B]^{st} & 0 \\ [B]^{sh} + [B]^{st} & [D]^{sh} + [D]^{st} & 0 \\ 0 & 0 & [D]^h \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_{\theta}^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \\ \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_{\theta}^1 \\ \gamma_{x\theta}^1 \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} [A] & [B] & 0 \\ [B] & [D] & 0 \\ 0 & 0 & [H] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_{\theta}^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \\ \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_{\theta}^1 \\ \gamma_{x\theta}^1 \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \quad (21)$$

با جایگذاری رابطه (8) در رابطه (21) تنش های منتجه شامل نیرو، ممان و برش بر حسب مؤلفه های میدان جابه جایی به دست می آیند که برای اختصار از ذکر آن صرف نظر می شود.

4. استخراج معادلات حرکت

برای استخراج معادلات حاکم بر حرکت و شرایط مرزی از روش اصل همیلتون استفاده می شود. بدین منظور ابتدا نیاز است انرژی های کرنشی و جنبشی سازه تعیین شده و تغییرات آنها محاسبه شود. سپس با اعمال اصل همیلتون و انتگرال گیری جزء به جزء و مرتب نمودن بر اساس

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} N_{xx}^h \\ N_{\theta\theta}^h \\ N_{x\theta}^h \\ M_{xx}^h \\ M_{\theta\theta}^h \\ M_{x\theta}^h \\ Q_{xz}^h \\ Q_{\theta z}^h \end{pmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} [A]^h & [B]^h & 0 \\ [B]^h & [D]^h & 0 \\ 0 & 0 & [H]^h \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_{\theta}^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \\ \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_{\theta}^1 \\ \gamma_{x\theta}^1 \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \quad (18)$$

که ماتریس های سختی سخت کننده های مارپیچی به صورت زیر معرفی می شوند:

$$\begin{aligned}
 & [A(x)]_{\varphi}^h \\
 & = \frac{E_h A_h}{a_h(x)} \begin{bmatrix} c\varphi^4 & c\varphi^2 s\varphi^2 & s\varphi c\varphi^3 \\ c\varphi^2 s\varphi^2 & s\varphi^4 & c\varphi s\varphi^3 \\ s\varphi c\varphi^3 & c\varphi s\varphi^3 & c\varphi^2 s\varphi^2 \end{bmatrix} \\
 & [B(x)]_{\varphi}^h \\
 & = \frac{E_h A_h (\delta_{st} + t)}{2a_h(x)} \begin{bmatrix} c\varphi^4 & c\varphi^2 s\varphi^2 & s\varphi c\varphi^3 \\ c\varphi^2 s\varphi^2 & s\varphi^4 & c\varphi s\varphi^3 \\ s\varphi c\varphi^3 & c\varphi s\varphi^3 & c\varphi^2 s\varphi^2 \end{bmatrix} \\
 & [D(x)]_{\varphi}^h \\
 & = \frac{E_h A_h \left(\frac{(\delta_{st} + t)^2}{2} + \frac{t^2}{12} \right)}{a_h(x)} \begin{bmatrix} c\varphi^4 & c\varphi^2 s\varphi^2 & s\varphi c\varphi^3 \\ c\varphi^2 s\varphi^2 & s\varphi^4 & c\varphi s\varphi^3 \\ s\varphi c\varphi^3 & c\varphi s\varphi^3 & c\varphi^2 s\varphi^2 \end{bmatrix} \\
 & [H(x)]_{\varphi}^h = \frac{G_h A_h}{a_h(x)} \begin{bmatrix} c\varphi^2 & c\varphi s\varphi \\ c\varphi s\varphi & s\varphi^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (19)$$

در این روابط A_h سطح مقطع سخت کننده های مارپیچی می باشد. مشابه رویکرد بالا، به آسانی می توان ماتریس های سختی سخت کننده های محیطی را به دست آورد که در اینجا برای اختصار از ذکر مجدد آن صرف نظر می شود. در نهایت با در نظر گرفتن تمامی سخت کننده های مارپیچی و محیطی، ماتریس های سختی کل مربوط به تقویت کننده ها به صورت زیر به دست می آید:



$$u_0 = v_0 = w_0 = 0, \quad \varphi_x = \varphi_\theta = 0 \quad (24)$$

تکیه‌گاه ساده:

$$u_0 = v_0 = 0, \quad \varphi_\theta = 0, \quad M_{xx} = 0, \quad N_{xx} = 0 \quad (25)$$

تکیه‌گاه آزاد:

$$M_{xx} = M_{x\theta} = 0, \quad N_{xx} = N_{x\theta} = Q_{xz} = 0 \quad (26)$$

با توجه به کامل بودن پوسته در جهت محیطی و متناوب بودن جابه‌جایی در این راستا با دوره تناوب π ، توابع جابه‌جایی برای هر نقطه از پوسته مخروطی شکل به صورت زیر بیان می‌شود که برای شرایط مرزی مختلف به کار می‌روند [28]:

$$\begin{cases} u_0(x, \theta, t) \\ v_0(x, \theta, t) \\ w_0(x, \theta, t) \\ \varphi_x(x, \theta, t) \\ \varphi_\theta(x, \theta, t) \end{cases} = \begin{cases} U(x)e^{i\omega t} \cos(n\theta) \\ V(x)e^{i\omega t} \sin(n\theta) \\ W(x)e^{i\omega t} \cos(n\theta) \\ X(x)e^{i\omega t} \cos(n\theta) \\ \Theta(x)e^{i\omega t} \sin(n\theta) \end{cases} \quad (27)$$

در این رابطه ω فرکانس طبیعی و n عدد موج محیطی می‌باشند. در ادامه نیاز است میدان‌های جابه‌جایی تعریف‌شده در رابطه فوق در معادلات حرکت و شرایط مرزی مسئله جایگذاری شود تا روابط برحسب متغیر مکانی استخراج شود که در اینجا برای اختصار از ذکر آن صرف‌نظر می‌شود.

۵. روش حل معادلات

در این بخش از روش تفاضل مربعات برای حل عددی معادلات و شرایط مرزی ارائه‌شده در رابطه‌های (22) و (24-26) استفاده می‌شود. روش تفاضل مربعات از جمله روش‌های مرتبه بالایی است که در آن با استفاده از ضرایب وزنی، معادلات دیفرانسیلی به معادلات جبری مرتبه اول

میدان‌های جابه‌جایی، معادلات حاکم بر حرکت مسئله به دست می‌آیند لذا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\sin \alpha}{R} (N_{xx} - N_{\theta\theta}) + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} - I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\ & \quad - I_1 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} = 0, \\ & \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{2 \sin \alpha}{R} N_{x\theta} + \frac{\cos \alpha}{R} Q_{\theta z} \\ & \quad - I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial t^2} = 0, \\ & \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\sin \alpha}{R} Q_{xz} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_{\theta z}}{\partial \theta} - \frac{\cos \alpha}{R} N_{\theta\theta} \\ & \quad - I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = 0, \\ & \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\sin \alpha}{R} (M_{xx} - M_{\theta\theta}) + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} + Q_{xz} \\ & \quad - I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} = 0, \\ & \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{2 \sin \alpha}{R} M_{x\theta} - Q_{\theta z} - I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \\ & \quad - I_2 \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

در معادله‌های بالا I_0 ، I_1 و I_2 اینرسی‌های جرمی سازه پوسته مخروطی مشبک هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند [6]:

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{2\rho_c A_h}{a_h(x)} + \frac{\rho_c A_h}{a_c(x)} + \sum_{K=1}^{N_s} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho_{sh} dz \\ I_1 &= \rho_{sh} \sum_{K=1}^{N_s} \int_{z_k}^{z_{k+1}} z dz, \\ I_2 &= \bar{\rho}_h \int_{-\delta_{st}-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 dz + \bar{\rho}_c \int_{-\delta_{st}-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 dz \\ & \quad + \rho_{sh} \sum_{K=1}^{N_s} \int_{z_k}^{z_{k+1}} z^2 dz, \\ \bar{\rho}_h &= \frac{2\rho_c A_h}{a_h(x)\delta_{st}}, \quad \bar{\rho}_c = \frac{\rho_c A_c}{a_c(x)\delta_{st}}, \end{aligned} \quad (23)$$

که ρ_{sh} چگالی پوسته، ρ_c چگالی سخت‌کننده محیطی و ρ_c چگالی سخت‌کننده مارپیچی هستند. شرایط مختلف مرزی شامل تکیه‌گاه ساده، آزاد و گیردار به صورت رابطه‌های 24 تا 26 نوشته می‌شوند:

تکیه‌گاه گیردار:



تبدیل می‌شوند. این بدان معناست که مشتق در هر نقطه به صورت مجموع خطی از ضرایب وزنی و مقادیر تابع در آن نقطه و دیگر نقاط دامنه و در جهت محورهای مختصات بیان می‌شوند. این روش توانایی حل انواع معادلات غیرخطی، خطی و کوپله را داراست.

مطابق این روش، مشتقات تابعی نظیر f می‌تواند به صورت زیر تخمین زده شود:

$$\frac{d^r f}{dx^r} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(r)} f_j, \quad (28)$$

که $[A^{(r)}]$ ماتریس ضرایب وزنی مرتبط با مشتق r در نقطه x_i و N تعداد نقاط شبکه در نظر گرفته شده است. ضرایب وزنی مشتق مرتبه اول و بالاتر به صورت زیر بیان می‌شوند [29]:

(29)

$$A_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{\prod_{m=1, m \neq i}^N (x_i - x_m)}{\prod_{m=1, m \neq j}^N (x_j - x_m)}, & i = j = 1, 2, 3, \dots, N; i \neq j \\ \sum_{m=1, m \neq i}^N \frac{1}{(x_i - x_m)}, & i = j = 1, 2, 3, \dots, N \end{cases}$$

$$A_{ij}^{(r)} = A_{ij}^{(1)} A_{ij}^{(r-1)}, \quad r = 2, 3, \dots, N-1.$$

نحوه توزیع نقاط در شبکه تأثیر بسزایی بر پایداری و همگرایی روش تفاضل مربعات خواهد داشت. بدین منظور از توزیع غیریکنواخت چبیشف برای ایجاد حداکثر همگرایی و پایداری در حل معادلات استفاده می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شوند [29]:

(30)

$$x_i = x_0 + \frac{L}{2} \left\{ 1 - \cos \left[\frac{(i-1)\pi}{N-1} \right] \right\}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N.$$

در ادامه با تعریف $[A] = [A^{(1)}]$ و $[B] = [A^{(2)}]$ معادله (28) را می‌توان برای دو مشتق مرتبه اول و دوم به صورت زیر بازنویسی

کرد:

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \right\} = [A]\{f\}, \quad \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\} = [B]\{f\}, \quad (31)$$

حال با اعمال روش تفاضل مربعات بر معادلات حرکت و شرایط مرزی و مرتب‌سازی معادلات حاصله در فرم ماتریسی خواهیم داشت:

$$[K]\{c\} = \omega^2 [M]\{c\} \quad (32)$$

$$[\Gamma]\{c\} = \{0\} \quad (33)$$

که $[K]$ ، $[M]$ ، $[\Gamma]$ و $\{c\}$ به ترتیب ماتریس سختی، ماتریس جرم و ماتریس ضرائب شرایط مرزی و بردار جابه‌جایی هستند که در بخش پیوست معرفی شده‌اند. برای تحلیل فرکانسی مسئله نیاز است دستگاه معادله‌های (32) و (33) هم‌زمان حل شوند. این موضوع با توجه به عدم تطابق بین تعداد معادلات و تعداد متغیرهای مجهول به ناسازگاری در حل مسئله منجر می‌شود. برای رفع این مشکل نقاط شبکه به دودسته نقاط دامنه $(x_2 - x_{N-1})$ و مرز سیستم (x_1, x_N) تقسیم می‌شود. با نادیده گرفتن ارضای معادلات در نقاط مرزی سیستم، معادله (32) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$[\bar{K}]\{c\} = \omega^2 [\bar{M}]\{c\} \quad (34)$$

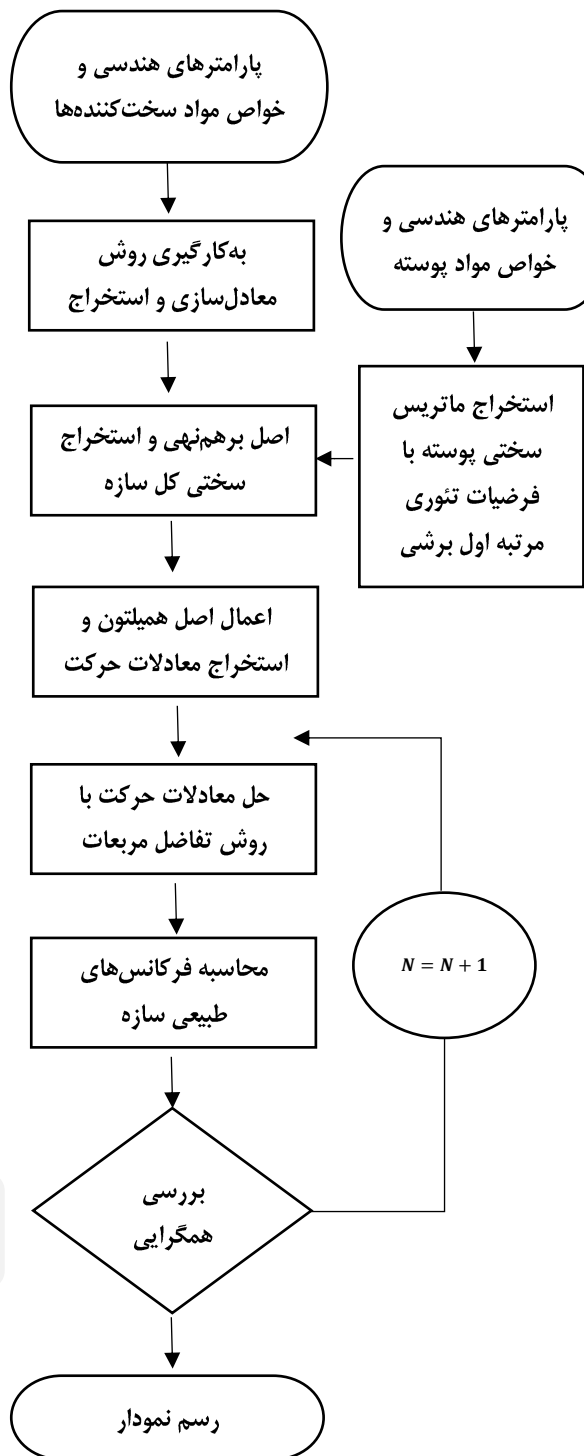
علامت بار در ماتریس‌های سختی و جرم در این معادله بیانگر ماتریس‌های متناظر غیرمربعی می‌باشد. با جداسازی درجات آزادی شرایط مرزی و دامنه معادله‌های (33) و (34) به فرم زیر تبدیل می‌شوند:

$$[\bar{K}]_a \{c\}_a + [\bar{K}]_b \{c\}_b = \omega^2 \left([\bar{M}]_a \{c\}_a + [\bar{M}]_b \{c\}_b \right) \quad (35)$$

$$[\Gamma]_a \{c\}_a + [\Gamma]_b \{c\}_b = \{0\} \quad (36)$$

که اندیس‌های b و d به ترتیب مربوط به





شکل ۳. فلوجارت تحلیل مسئله به همراه الگوریتم همگرایی

مقایسه نتایج نشان‌دهنده همگرایی روش تفاضل مربعات با روش المان محدود ریتز در کار لیو و همکاران [۲۴] می‌باشد. علاوه‌براین در جدول ۴ فرکانس طبیعی بدون بعد

نقاط مرزی و دامنه هستند. با معرفی رابطه (۳۵) در (۳۶) معادله مقادیر ویژه به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$[K^*]\{c\}_a = \omega^2[M^*]\{c\}_a \quad (37)$$

که ماتریس‌های $[K^*]$ و $[M^*]$ به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$[K^*] = [\bar{K}]_b[P] + [\bar{K}]_a, \quad [M^*] = [M]_b[P] + [M]_a \quad (38)$$

$$[P] = -[\Gamma]_b^{-1}[\Gamma]_a \quad (39)$$

روند حل مسئله و الگوریتم همگرایی در فلوجارت شکل ۳ ترسیم می‌شود.

۶. نتایج و بحث

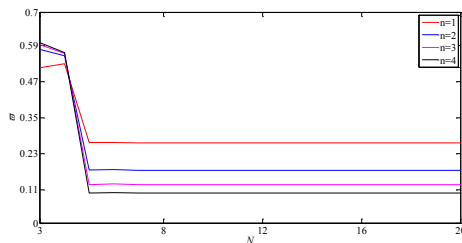
در ابتدای این بخش، دقت همگرایی روش تفاضل مربعات بررسی می‌شود. بدین منظور، تغییرات فرکانس طبیعی بدون بعد $(\bar{\omega} = \omega R_1 \sqrt{\rho_{sh}/E_1})$ نسبت به تعداد نقاط شبکه (N) برای عدد موج محیطی مختلف و شرایط مرزی دو سر گیردار در شکل ۴ رسم شده است. همانگونه که نتایج این شکل نشان می‌دهد، روش حل ارائه شده همگرایی بالا دارد و با حداقل تعداد نقاط شبکه می‌توان نتایج معتبری به دست آورد. در این کار برای اطمینان از همگرایی روش حل ارائه شده تعداد نقاط شبکه ۱۰ نقطه انتخاب می‌شود.

برای نشان دادن دقت روش تفاضل مربعات، ابتدا نتایج حاصله از این کار با نتایج سایر محققان در جدول‌های ۳ و ۴ مقایسه می‌شوند. در جدول ۳ فرکانس طبیعی بدون بعد $\Omega = \omega R_2 \sqrt{(1 - \nu^2)\rho/E}$ یک پوسته مخروطی همگن بدون سخت‌کننده و برای شرایط مرزی متفاوت و عدد موج محیطی آورده شده است.

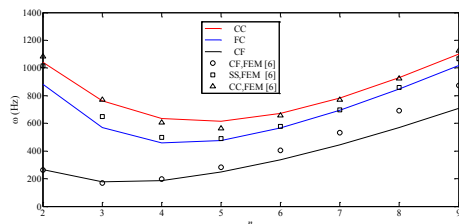
جدول ۱. خصوصیات مکانیکی پوسته کامپوزیتی

مخروطی [۲۷]

مشخصه	مقدار	واحد
مدول الاستیسیته طولی (E_1)	۴۱۴۰۰	MPa
مدول الاستیسیته عرضی (E_2)	۸۷۴۰	MPa
ضریب پواسون (ν_{12})	۰/۲۷۵	-
مدول برشی (G_{12})	۳۴۳۰	MPa
مدول برشی (G_{13})	۳۴۳۰	MPa
مدول برشی (G_{23})	۱۵۷۵۰	MPa
چگالی (ρ_{sh})	۲۰۶۲	kg/m ³



شکل ۴. آنالیز همگرایی روش تفاضل مربعات برای عدد موج‌های محیطی مختلف



شکل ۵. مقایسه فرکانس‌های طبیعی سازه تقویت‌شده با شبکه همسان با نتایج نرم‌افزار المان محدود

جدول ۲. خصوصیات مکانیکی سخت‌کننده‌ها [۶]

مشخصه	مقدار	واحد
مدول الاستیسیته طولی (E_1)	۲۵۰۰۰	MPa
مدول الاستیسیته عرضی (E_2)	۵۵۰۰	MPa
ضریب پواسون (ν_{12})	۰/۲۷۶	-
مدول برشی (G_{12})	۱۸۹۰	MPa
مدول برشی (G_{13})	۱۸۹۰	MPa
مدول برشی (G_{23})	۷۲	MPa
چگالی (ρ_{st})	۱۴۰۶	kg/m ³

لایه با زاویه نیم رأس و زاویه چینی متفاوت فیبرهای تقویتی، برای شرایط مرزی دوسرگیردار مقایسه شده است. نتایج بیانگر تطابق قابل قبول بین روش‌های تفاضل مربعات و روش موجک‌ها در کار ژانگ و همکاران [۲۵] می‌باشد.

علاوه بر این، شکل ۵ برای صحت‌سنجی نتایج حاصل از روش ارائه شده با نتایج نرم‌افزار المان محدود رسم شده است. نتایج برای پوسته تقویت‌شده با شبکه همسان و با پارامترهای هندسی

$$R_2 = 147 \text{ mm}, R_1 = 77 \text{ mm}, \alpha =$$

$$14/0.3^\circ, \varphi = 11/5^\circ$$

$$b_h = b_c = \delta_{st} = 4 \text{ mm}$$

برای سه شرط مرزی مختلف می‌باشند. نتایج حاصل از این کار با دقت قابل قبولی با نتایج کار زارعی و همکاران [۶] تطابق دارند که این موضوع نشان‌دهنده صحت روابط به کار گرفته شده و روش حل می‌باشد. باید توجه داشت که اختلاف موجود بین نتایج، مربوط به ساده‌سازی‌های در نظر گرفته شده در استخراج معادلات حرکت و آنالیز نرم‌افزاری می‌باشند.

پس از صحت‌سنجی فرمولاسیون و روش حل مسئله، اثرات پارامترهای مختلف هندسی بر فرکانس طبیعی بدون بعد پوسته مخروطی کامپوزیتی تقویت‌شده مورد بحث و تحقیق قرار می‌گیرد. برای ارائه نتایج عددی فرض می‌شود که پوسته خارجی از چهار لایه با مواد شیشه اپوکسی ساخته شده است که خواص مکانیکی این مواد در جدول ۱ بیان شده است. علاوه بر این خصوصیات مکانیکی سخت‌کننده‌های محیطی و مارپیچی مطابق جدول ۲ در نظر گرفته شده است.

۱۹۴

سال ۱۲ - شماره ۱
بهار و تابستان ۱۴۰۲
نشریه علمی
دانش و فناوری هوا فضا



بررسی رفتار ارتعاشی پوسته‌های کامپوزیتی مخروطی تقویت‌شده با شبکه ناهمسان مشبک با روش تفاضل مربعات

جدول ۴. مقایسه فرکانس طبیعی بدون بعد یک پوسته کامپوزیت سه لایه برای زاویه نیم رأس متفاوت و شرایط مرزی دوسرگیردار

α°	$[^\circ/90^\circ/^\circ]$	$[^\circ/60^\circ/^\circ]$	$[^\circ/30^\circ/^\circ]$
۹۰	کار حاضر	۰/۱۴۵۰	۰/۱۵۷۹
	کار [۲۵]	۰/۱۴۷۴	۰/۱۶۱۱
۶۰	کار حاضر	۰/۱۶۷۰	۰/۲۰۳۴
	کار [۲۵]	۰/۱۶۹۸	۰/۲۰۸۱
۳۰	کار حاضر	۰/۲۱۸۹	۰/۲۸۲۱
	کار [۲۵]	۰/۲۲۶۴	۰/۳۱۲۱

جدول‌های ۵ و ۶ فرکانس‌های طبیعی سازه تقویت‌شده با سخت‌کننده‌ها را برای زاویه‌چینی‌های متقارن $[(-\theta, \theta)]_2$ در مقطع نشان می‌دهد. در جدول ۵ فرکانس‌های بدون بعد سازه برای عدد موج ۳ و شرایط مرزی مختلف گردآوری شده است. نتایج به وضوح نشان می‌دهد که بیشترین فرکانس طبیعی سازه برای شرایط مرزی دوسرگیردار است و کمترین فرکانس نیز مربوط به شرایط گیردار-آزاد می‌باشد. همچنین برای تمام شرایط مرزی به جز شرایط مرزی یک سر آزاد، با تغییر زاویه چینی از صفر تا ۴۵ فرکانس طبیعی روند افزایش داشته که این موضوع از زاویه چینی ۶۰ تا ۹۰ به صورت کاهشی می‌باشد. تغییرات فرکانس برای شرایط مرزی یک سر آزاد از زاویه چینی ۰ تا ۳۰ افزایشی و پس از آن کاهشی می‌باشد. نتایج جدول ۶ برای شرایط مرزی دو سر ساده و عدد موج‌های محیطی متفاوت می‌باشد. همان‌گونه که نتایج این جدول نشان می‌دهد، حداکثر فرکانس طبیعی برای زاویه‌چینی‌های متفاوت در عدد موج ۱ یا ۲ به وقوع می‌پیوندد. این مقدار حداکثر در زاویه‌چینی‌های ۰، ۱۵ و ۹۰ در عدد موج ۱ و سایر زاویه‌چینی‌ها در عدد موج ۲ می‌باشد. علاوه بر این، کمترین فرکانس طبیعی یا فرکانس

باید توجه نمود که پارامترهای ورودی سخت‌کننده‌ها به جز در مواردی که به صورت مستقیم در متن مقاله ذکر شده‌اند، به صورت $(b_c, b_h) = (0/0.06, 0/0.06) m$, $(n_c, n_h) = (10, 28)$, $R_1 = 0/5 m$, $\delta_{st} = 0/0.06 m$, $L = 1 m$, $\alpha = 30^\circ$ و با شرایط مرزی دو سر ساده می‌باشند. همچنین زاویه قرارگیری فیبرهای لایه‌های کامپوزیتی به صورت $[0/90/90/0]$ درجه است که اعداد داخل کروشه بیانگر زاویه قرارگیری فیبرهای تقویت‌کننده یا زاویه‌چینی در هر یک از چهار لایه تشکیل‌دهنده پوسته خارجی می‌باشند.

جدول ۳. مقایسه فرکانس طبیعی بدون بعد یک پوسته مخروطی همگن برای شرایط مرزی و عدد موج محیطی متفاوت.

$$\alpha = 45^\circ, \nu = 0.3, L \sin \alpha / R_1 = 0.5, t / R_1 = 0.01$$

شرایط مرزی	n			
	۴	۳	۲	۱
CC	کار حاضر	۰/۸۱۱۷	۰/۶۶۹۴	۰/۵۴۲۶
	کار [۲۴]	۰/۸۱۲۰	۰/۶۶۹۶	۰/۵۴۲۸
SC	کار حاضر	۰/۸۱۱۴	۰/۶۶۱۲	۰/۵۲۴۶
	کار [۲۴]	۰/۸۱۱۳	۰/۶۶۱۰	۰/۵۲۴۴
CS	کار حاضر	۰/۷۰۹۴	۰/۶۴۷۳	۰/۵۲۰۰
	کار [۲۴]	۰/۷۰۹۵	۰/۶۴۷۳	۰/۵۱۹۹
SS	کار حاضر	۰/۵۴۶۱	۰/۶۳۰۸	۰/۵۰۶۲
	کار [۲۴]	۰/۵۴۶۲	۰/۶۳۰۹	۰/۵۰۶۱
		۵	۶	۷
CC	کار حاضر	۰/۴۰۸۵	۰/۳۹۵۶	۰/۴۱۳۴
	کار [۲۴]	۰/۴۰۸۸	۰/۳۹۶۱	۰/۴۱۴۱
SC	کار حاضر	۰/۳۸۲۵	۰/۳۷۳۳	۰/۳۹۷۸
	کار [۲۴]	۰/۳۸۳۲	۰/۳۷۳۲	۰/۳۹۸۰
CS	کار حاضر	۰/۳۵۸۹	۰/۳۴۴۵	۰/۳۶۴۱
	کار [۲۴]	۰/۳۵۸۹	۰/۳۴۴۶	۰/۳۶۴۴
SS	کار حاضر	۰/۳۳۳۹	۰/۳۲۳۵	۰/۳۵۰۸
	کار [۲۴]	۰/۳۳۳۷	۰/۳۲۳۵	۰/۳۵۱۰

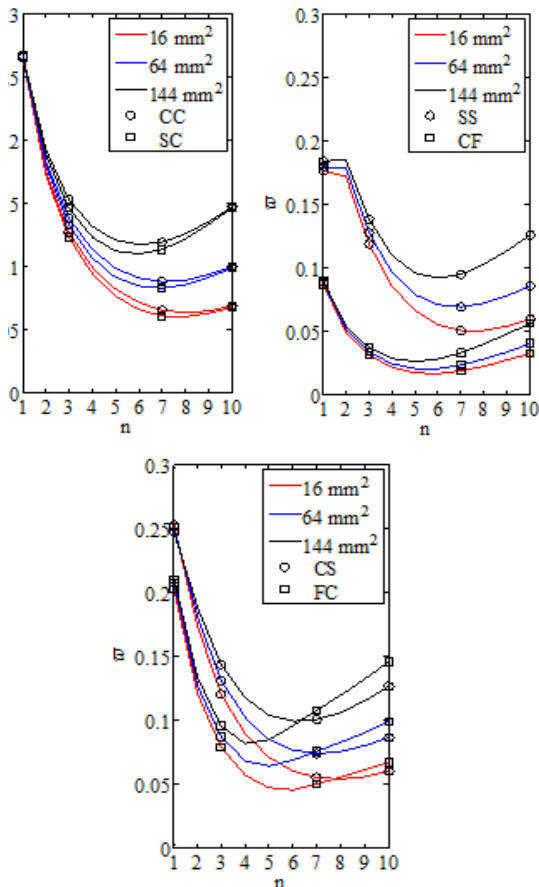


اصلی سازه در عدد موج‌های ۶، ۷ و ۸ برای زاویه‌چینی‌های متفاوت رخ داده است.

جدول ۵. مقایسه فرکانس طبیعی بدون بعد یک پوسته مخروطی کامپوزیت تقویت شده با سخت‌کننده‌ها برای شرایط مرزی متفاوت

شرایط مرزی					
CF	FC	CS	SS	CC	θ°
-/۰.۳۴۶	-/۰.۷۹۶	-/۱.۲۱۴	-/۱.۲۰۵	-/۱.۲۳۶	-
-/۰.۳۶۲	-/۰.۸۳۰	-/۱.۲۳۳	-/۱.۲۱۲	-/۱.۲۴۸	۱۵
-/۰.۳۶۵	-/۰.۸۶۳	-/۱.۱۵۱۶	-/۱.۴۸۷	-/۱.۵۶۰	۳۰
-/۰.۳۳۴	-/۰.۸۴۱	-/۱.۵۷۷	-/۱.۴۹۹	-/۱.۶۸۳	۴۵
-/۰.۳۹۱	-/۰.۷۸۹	-/۱.۴۴۲	-/۱.۳۴۱	-/۱.۶۱۱	۶۰
-/۰.۲۵۶	-/۰.۷۳۳	-/۱.۳۴۶	-/۱.۱۶۶	-/۱.۴۱۳	۷۵
-/۰.۳۴۰	-/۰.۷۰۴	-/۱.۱۴۸	-/۱.۰۸۲	-/۱.۲۹۶	۹۰

سختی بیشتر سازه و در نتیجه افزایش فرکانس بدون بعد طبیعی منجر شده است. بررسی بیشتر در این شکل نشان می‌دهد که افزایش سطح مقطع سخت‌کننده‌ها به کاهش عدد موج محیطی متناظر با فرکانس اصلی منجر می‌شود. برای مثال، در شرایط مرزی گیردار-گیردار، گیردار-آزاد و ساده- ساده فرکانس اصلی به ترتیب در عدد موج ۸، ۶ و ۷ برای سخت‌کننده‌هایی با سطح مقطع ۱۶ میلی‌متر مربع رخ داده است، این در حالی است که برای سازه‌ای با سخت‌کننده‌هایی با سطح مقطع ۱۴۴ میلی‌متر مربع فرکانس اصلی به ترتیب در عدد موج ۷، ۵ و ۶ روی می‌دهد.



شکل ۶. تأثیر تغییرات عدد موج محیطی بر فرکانس طبیعی بدون بعد سازه برای شرایط مرزی گوناگون و سطح مقطع متفاوت سخت‌کننده‌ها

برای بررسی تأثیر تغییر سطح مقطع سخت‌کننده‌ها و عدد موج محیطی بر فرکانس طبیعی بی‌بعد، شکل ۶ در سه بخش جداگانه برای شرایط مرزی گوناگون رسم شده است. نتایج به دست آمده در تمامی شرایط مرزی نشان می‌دهد که افزایش عدد موج ابتدا موجب کاهش فرکانس طبیعی و سپس افزایش آن می‌شود. علت چنین رفتاری از سازه آن است که در پوسته‌های مخروطی با نسبت طول به شعاع نه‌چندان بزرگ، کمترین انرژی لازم برای رسیدن به شکل مودهای فرکانسی در مودهای محیطی کوچک و بزرگ بیشتر از مودهای میانی است؛ بنابراین در این شکل یک نقطه کمینه برای شرایط مرزی مختلف مشاهده می‌شود که در آن مود، پوسته مخروطی کمترین سختی را از خود نشان می‌دهد. همچنین روند کاهشی و افزایشی فرکانس به ترتیب برای سازه‌های با سخت‌کننده‌هایی با سطح مقطع کمتر و بیشتر، ملموس‌تر می‌باشد. از طرفی می‌توان مشاهده نمود که افزایش سطح مقطع سخت‌کننده‌ها به

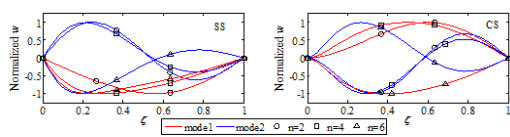


برای درک بهتر رفتار ارتعاشی سازه تقویت شده، شکل مودهای مسئله برای شرایط مرزی مختلف در شکل های ۷ و ۸ رسم شده است. شکل ۷، شکل مودهای سازه های تقویت شده و نشده را برای مودهای اول و دوم نشان می دهد. طبق نتایج این شکل، در تمام شرایط مرزی حداکثر دامنه مودهای اول و دوم سازه تقویت نشده متمایل به سمت تکیه گاه با شعاع بزرگ می باشد که این نتایج با نتایج حاصل در مرجع [۳۰] همخوانی دارد. با اضافه شدن تقویت کننده ها به سازه مخروطی، علاوه بر کمتر شدن حداکثر دامنه شکل مودهای اول و دوم سازه، حداکثر دامنه به سمت نقطه میانی پوسته

متمایل شده (به جز شرایط مرزی گیردار-آزاد) و جابه جایی سازه در سمت لبه کوچک بیشتر می شود. بنابراین می توان نتیجه گرفت که تأثیر شرایط مرزی لبه کوچک بر فرکانس اصلی سازه تقویت شده بیشتر از سازه تقویت نشده می باشد. شکل ۸، شکل مودهای اول و دوم سازه تقویت شده برای شرایط مرزی مختلف و سه عدد موج ۲، ۴ و ۶ را نشان می دهد. نتایج نمودارهای رسم شده نشان می دهد که با افزایش عدد موج از ۲ به ۶، حداکثر دامنه شکل مود اول برای شرایط مرزی ساده-ساده و گیردار- ساده به ترتیب به سمت لبه کوچک و نقطه میانی سازه متمایل می شود.

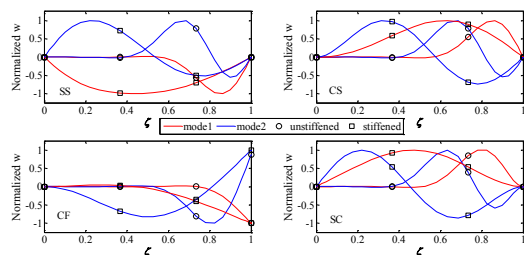
جدول ۶. مقایسه فرکانس طبیعی بدون بعد یک پوسته مخروطی کامپوزیت تقویت شده با سخت کننده ها برای عدد موج مختلف و شرایط مرزی دو سر ساده

		n								
		۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	$[(-\theta, \theta)]_{sym}$
	θ°	۰/۰۶۱۳	۰/۰۶۱۷	۰/۰۶۶۵	۰/۰۷۷۱	۰/۰۹۴۹	۰/۱۲۰۵	۰/۱۵۰۴	۰/۱۵۳۱	۰
	۱۵	۰/۰۶۲۰	۰/۰۶۲۲	۰/۰۶۷۵	۰/۰۷۹۸	۰/۱۰۰۹	۰/۱۳۱۲	۰/۱۶۳۴	۰/۱۶۳۵	۱۵
	۳۰	۰/۰۶۲۳	۰/۰۶۱۳	۰/۰۶۵۹	۰/۰۷۹۷	۰/۱۰۶۴	۰/۱۴۸۷	۰/۱۹۱۹	۰/۱۸۴۷	۳۰
	۴۵	۰/۰۶۲۶	۰/۰۵۹۲	۰/۰۶۱۲	۰/۰۷۲۷	۰/۰۹۹۵	۰/۱۴۹۹	۰/۲۱۹۹	۰/۲۰۵۴	۴۵
	۶۰	۰/۰۶۳۶	۰/۰۵۸۱	۰/۰۵۷۳	۰/۰۶۵۳	۰/۰۸۷۸	۰/۱۳۴۱	۰/۲۱۶۵	۰/۲۰۸۱	۶۰
	۷۵	۰/۰۶۴۵	۰/۰۵۷۷	۰/۰۵۵۱	۰/۰۶۰۴	۰/۰۷۸۴	۰/۱۱۶۶	۰/۱۸۸۵	۰/۱۸۸۲	۷۵
	۹۰	۰/۰۶۴۷	۰/۰۵۷۶	۰/۰۵۴۳	۰/۰۵۸۵	۰/۰۷۴۴	۰/۱۰۸۳	۰/۱۷۲۳	۰/۱۷۴۱	۹۰



شکل ۸. مودهای اول و دوم پوسته مخروطی تقویت شده برای شرایط مرزی و عدد موج محیطی متفاوت

علاوه بر این در شرایط مرزی نام برده شده، حداکثر دامنه شکل مود دوم در سمت لبه کوچک اتفاق می افتد.



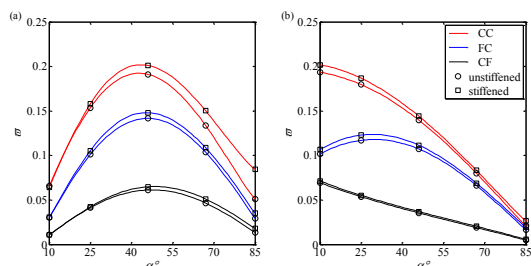
شکل ۷. مودهای اول و دوم پوسته مخروطی تقویت شده و نشده برای شرایط مرزی گوناگون

شکل های ۹ و ۱۰ اثرات تغییرات زاویه نیم رأس مخروط بر فرکانس طبیعی بدون بعد سازه را

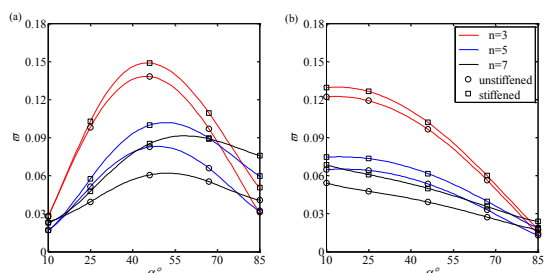


برای شرایط مختلف مرزی و عدد موج محیطی نشان می‌دهد. برای نمایش این رفتار دینامیکی، از دو رویکرد "الف" و "ب" استفاده شده است. در رویکرد "الف" فرض می‌شود که شعاع ابتدایی و انتهای پوسته مخروطی و در رویکرد "ب" شعاع ابتدایی و طول یال مخروط هنگام تغییر زاویه نیم رأس ثابت می‌باشند. نتایج رویکرد "الف" در شکل‌های ۹ و ۱۰ نشان می‌دهد که با افزایش زاویه نیم رأس، فرکانس طبیعی تا مقدار مشخصی افزایش می‌یابد و پس از آن روند کاهشی به خود می‌گیرد. این مطلب برای شرایط مرزی گیردار-گیردار و عدد موج پایین‌تر مشهودتر می‌باشد. علاوه بر این، در شرایط مرزی گیردار-گیردار و عدد موج ۳، حداکثر فرکانس سازه در زاویه نیم رأس کمتری نسبت به سایر شرایط مرزی رخ می‌دهد. نکته مهم دیگر که در این رویکرد مورد توجه قرار می‌گیرد، اختلاف بسیار کم فرکانس‌های سازه تقویت‌شده با سخت‌کننده‌ها و سازه‌های بدون سخت‌کننده در زاویه نیم رأس کوچک می‌باشد که با افزایش زاویه نیم رأس این اختلاف محسوس می‌شود. علاوه بر این در عدد موج‌های بالا و زاویه نیم رأس کوچک، فرکانس بدون بعد سازه تقویت‌شده کمتر از سازه تقویت‌نشده می‌شود. این مطلب به طور عمده به این حقیقت مربوط می‌شود که در زاویه‌های کوچک، نرخ افزایش اینرسی سخت‌کننده بیشتر از سهم سختی آن می‌باشد. برخلاف رویکرد "الف"، در رویکرد "ب" با افزایش زاویه نیم رأس، فرکانس طبیعی سازه برای هر سه عدد موج محیطی روند کاهشی خواهد داشت. این مطلب برای شرایط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد نیز صادق

می‌باشد. همچنین اختلاف فرکانس سازه‌های با سخت‌کننده و بدون سخت‌کننده با افزایش زاویه نیم رأس مخروط کمتر می‌شود که این مطلب را می‌توان در عدد موج‌های بالاتر در رویکرد "ب" شکل ۱۰ مشاهده نمود.



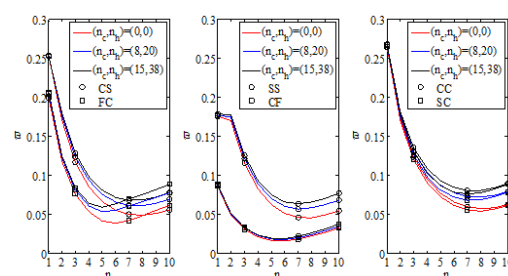
شکل ۹. تأثیر زاویه نیم رأس مخروط بر فرکانس طبیعی بدون بعد سازه تقویت‌شده و نشده برای شرایط مرزی مختلف: (a) رویکرد الف، (b) رویکرد ب



شکل ۱۰. تأثیر زاویه نیم رأس مخروط بر فرکانس طبیعی بدون بعد سازه تقویت‌شده و نشده برای عدد موج مختلف و برای شرایط مرزی دو سر ساده: (a) رویکرد الف، (b) رویکرد ب

با هدف بررسی تأثیر تعداد سخت‌کننده‌های مارپیچی و محیطی بر فرکانس طبیعی سازه، شکل ۱۱ برای انواع شرایط مرزی رسم شده است. نتایج این شکل گویای این مطلب است که پوسته‌های مخروطی با تعداد بیشتر سخت‌کننده فرکانس طبیعی بدون بعد بالاتری نسبت به پوسته‌های با تعداد کمتر یا بدون سخت‌کننده دارند. این مطلب به‌وضوح در نمودارهای رسم شده برای عدد موج محیطی بالاتر از ۳، مشاهده

می‌شود. به بیانی بهتر می‌توان گفت که در عدد موج محیطی بالاتر، سهم سخت‌کننده‌ها در سختی خمشی سازه بیشتر از سختی پوسته می‌باشد. این در حالی است که در عدد موج محیطی پایین، سهم سخت‌کننده‌ها در سختی خمشی کمتر از سختی پوسته می‌باشد که این موضوع با افزایش سخت‌کننده‌ها به افزایش جرم سازه به جای سختی سازه منجر می‌شود. بررسی‌های بیشتر در این شکل نشان می‌دهد که بیشترین و کمترین اثر تعداد سخت‌کننده‌ها به ترتیب در شرایط مرزی آزاد-گیردار و گیردار-آزاد می‌باشد. قابل‌ذکر است که در عدد موج بالاتر، اختلاف بین نتایج استخراجی در حالت‌های با تعداد متفاوت سخت‌کننده به بیشترین مقدار خود می‌رسد.



شکل ۱۱. تأثیر تعداد سخت‌کننده‌های ماریچی و محیطی بر فرکانس طبیعی بدون بعد سازه برای شرایط مرزی مختلف

۷. نتیجه‌گیری

ارتعاشات آزاد پوسته‌های کامپوزیتی مخروطی تقویت‌شده با شبکه ناهمسان در این کار بررسی شده است. با فرضیات تئوری مرتبه اول برشی و روش معادل‌سازی، سختی معادل کل سازه و به دنبال آن معادلات حاکم بر حرکت سازه ارائه شد. سپس رابطه مسئله مقادیر ویژه با روش تفاضل مربعات استخراج شد و صحت و اعتبار نتایج

به‌دست‌آمده با مقایسه با نتایج سایر محققان تأیید شد. در ادامه فرکانس‌های طبیعی بدون بعد و شکل موده‌های سازه تحت تأثیر پارامترهای مختلف هندسی و مکانیکی برای شرایط مرزی مختلف ارائه شد. مهم‌ترین نتایج به‌دست‌آمده به شرح زیر هستند:

۱- صحت‌سنجی نتایج، این اطمینان را ایجاد می‌کند که روش تفاضل مربعات کارآمدی قابل‌قبول و سرعت همگرایی بالا در آنالیز ارتعاشات آزاد پوسته‌های کامپوزیتی تقویت‌شده با شبکه مشبک ناهمسان، دارد؛

۲- افزایش سطح مقطع تقویت‌کننده‌های مشبک سبب کاهش عدد موج محیطی متناظر با فرکانس اصلی می‌شود؛

۳- در پوسته‌هایی با شرایط مرزی دوسرگیردار یا ساده، حداکثر دامنه موده‌های اول و دوم سازه تقویت نشده متمایل به سمت تکیه‌گاه با شعاع بزرگ می‌باشد، این در حالی است که در پوسته‌های تقویت‌شده حداکثر دامنه به سمت نقطه میانی پوسته متمایل شده و جابه‌جایی سمت لبه کوچک بیشتر می‌شود. بنابراین تأثیر شرایط مرزی لبه کوچک بر فرکانس اصلی سازه تقویت‌شده بیشتر از سازه تقویت‌نشده می‌باشد؛

۴- در عدد موج‌های بالا و زاویه نیم رأس کوچک، فرکانس سازه تقویت‌شده کمتر از سازه تقویت‌نشده می‌باشد. این مطلب به طور عمده به این حقیقت مربوط می‌شود که در زاویه‌های کوچک، نرخ افزایش اینرسی سخت‌کننده بیشتر از سهم سختی آن می‌باشد؛

زاویه سخت‌کننده ماریچی نسبت به محور پوسته	φ
ضخامت سخت‌کننده‌ها، m	δ_{st}
زاویه لایه‌چینی لایه کامپوزیت	β
زاویه نیم رأس مخروط	α

۹. پیوست

بردار جابه‌جایی، ماتریس سختی و ماتریس جرم تعریف‌شده در رابطه‌های (۳۲) و (۳۳) به صورت تعریف می‌شوند:

$$\{c\}_{5N \times 1} = \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{V\} \\ \{W\} \\ \{X\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad (40)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix}, \quad (41)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & [0] & [0] & m_{14} & [0] \\ [0] & m_{22} & [0] & [0] & m_{25} \\ [0] & [0] & m_{33} & [0] & [0] \\ m_{41} & [0] & [0] & m_{44} & [0] \\ [0] & m_{52} & [0] & [0] & m_{55} \end{bmatrix}, \quad (42)$$

که عناصر غیر صفر ماتریس جرم و سطر اول ماتریس سختی به شکل زیر می‌باشند:

$$(43)$$

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_{22} = m_{33} = [I_0], \quad m_{44} = m_{55} \\ &= [I_2], \quad m_{14} = m_{25} = m_{41} \\ &= m_{52} = [I_1], \\ k_{11} &= [A_{11}][B] + [A_{11}] \sin \alpha [a_1][A] \\ &\quad - [A_{22}] \sin^2 \alpha \\ &\quad + [A_{66}n^2][a_2], \\ k_{12} &= n([A_{12}] + [A_{66}])[a_1][A] \\ &\quad - n([A_{22}] + [A_{66}]) \sin \alpha [a_2], \\ k_{13} &= [A_{12}] \cos \alpha [a_1][A] - 0.5 \sin 2\alpha [A_{22}][a_2], \\ k_{14} &= [B_{11}][B] + [B_{11}] \sin \alpha [a_1][A] \\ &\quad - ([B_{22}] \sin^2 \alpha \\ &\quad + [B_{66}n^2][a_2]), \\ k_{15} &= n([B_{12}] + [B_{66}])[a_1][A] \\ &\quad - n([B_{22}] + [B_{66}]) \sin \alpha [a_2], \end{aligned}$$

در این روابط $[A_{ij}]$ و $[B_{ij}]$ ($i, j = 1, 2, 6$) ماتریس‌های قطری می‌باشند که به دلیل وابسته بودن ضرایب سختی به متغیر مکانی x ، به صورت ماتریسی نوشته شده‌اند. علاوه بر این،

۵- در عدد موج‌های بالاتر از ۳، افزایش تعداد سخت‌کننده‌های پوسته مخروطی به افزایش سهم سخت‌کننده‌ها در سختی خمشی سازه نسبت به سختی پوسته منجر می‌شود که نتیجه آن افزایش فرکانس طبیعی سازه می‌باشد. بیشترین و کمترین تأثیر افزایش تعداد سخت‌کننده‌ها به ترتیب مربوط به شرایط مرزی آزاد-گیردار و گیردار-آزاد می‌باشد؛

۶- بیشترین تأثیر تقویت‌کننده‌ها در افزایش فرکانس طبیعی سازه مربوط به زاویه نیم رأس‌های بالاتر ۲۵ درجه و عدد موج بالاتر ۳ می‌باشد.

۸. فهرست علائم

L	طول یال مخروط، m
t	ضخامت پوسته، m
R_1	شعاع لبه کوچک، m
R_2	شعاع لبه بزرگ، m
b_c	عرض سخت‌کننده محیطی، m
b_h	عرض سخت‌کننده ماریچی، m
A_c	سطح مقطع سخت‌کننده محیطی، m^2
A_h	سطح مقطع سخت‌کننده ماریچی، m^2
n_c	تعداد سخت‌کننده محیطی
n_h	تعداد سخت‌کننده ماریچی
N_s	تعداد لایه پوسته کامپوزیتی
E_2, E_1	مدول الاستیسیته پوسته، N/m^2
G_{23}, G_{12}	مدول برشی پوسته، N/m^2
G_{13}	
E_h	مدول الاستیسیته سخت‌کننده ماریچی، N/m^2
G_h	مدول برشی سخت‌کننده ماریچی، N/m^2
V_{21}, V_{12}	ضریب پواسون
ρ_{sh}	چگالی پوسته
ρ_{st}	چگالی سخت‌کننده



stiffened composite cylindrical shells. *Acta Mechanica*, 2014. 225(2): p. 609-623.

- [11] Yazdani, M. and G. Rahimi, The effects of helical ribs' number and grid types on the buckling of thin-walled GFRP-stiffened shells under axial loading. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2010. 29(17): p. 2568-2575.
- [12] Yazdani, M. and G. Rahimi, The behavior of GFRP-stiffened and-unstiffened shells under cyclic axial loading and unloading. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2011. 30(5): p. 440-445.
- [13] Mojtaba, Y., Hossein, R., Akbar, A. K., & Saeed, H. An experimental investigation into the buckling of GFRP stiffened shells under axial loading. *Scientific Research and Essays*, 2009. 4(9): p. 914-920.
- [14] Totaro, G., Flexural, torsional, and axial global stiffness properties of anisogrid lattice conical shells in composite material. *Composite Structures*, 2016. 153: p. 738-745.
- [15] Yazdani, M., Analysis of effective parameters on the buckling of grid stiffened composite shells based on first order shear deformation theory. *Modares Mechanical Engineering*, 2014. 13(10): p. 51-61. (in Persian)
- [16] Duc, N.D., K. Seung-Eock, and D.Q. Chan, Thermal buckling analysis of FGM sandwich truncated conical shells reinforced by FGM stiffeners resting on elastic foundations using FSDT. *Journal of Thermal Stresses*, 2018. 41(3): p. 331-365.
- [17] Daneshjou, K., M. Talebitooti, and R. Talebitooti, Free vibration and critical speed of moderately thick rotating laminated composite conical shell using generalized differential quadrature method. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013. 34(4): p. 437-456.
- [18] Daneshjou, K., Talebitooti, M., Talebitooti, R. and Gooarchin, H.S., Dynamic analysis and critical speed of rotating laminated conical shells with orthogonal stiffeners using generalized differential quadrature method. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2013. 10: p. 349-390.
- [19] Jafari, A. and M. Bagheri, Free vibration of non-uniformly ring stiffened cylindrical shells using analytical, experimental and numerical methods. *Thin-Walled Structures*, 2006. 44(1): p. 82-90.
- [20] Qu, Y., Wu, S., Chen, Y., & Hua, H, Vibration analysis of ring-stiffened conical-cylindrical-spherical shells based on a modified variational approach. *International*

$[a_1]$ و $[a_2]$ نیز ماتریس قطری می‌باشند که

به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[a_1]_{ii} = \frac{1}{R_i}, \quad [a_2]_{ii} = \frac{1}{R_i^2}, \quad (44)$$

۱۰. مآخذ

- [1] Vasiliev, V. and A.F. Razin, Anisogrid composite lattice structures for spacecraft and aircraft applications. *Composite structures*, 2006. 76(1-2), pp.182-189.
- [2] Morozov, E., A.V. Lopatin, and V. A. Nesterov, Buckling analysis and design of anisogrid composite lattice conical shells. *Composite Structures*, 2011. 93(12), pp.3150-3162.
- [3] Zarei, M. and G. Rahimi, Effect of boundary condition and variable shell thickness on the vibration behavior of grid-stiffened composite conical shells. *Applied Acoustics*, 2022. 188: p. 108546.
- [4] Zarei, M. and G. Rahimi, Buckling resistance of joined composite sandwich conical-cylindrical shells with lattice core under lateral pressure. *Thin-Walled Structures*, 2022. 174: p. 109027.
- [5] Zarei, M. and G.H. Rahimi, Buckling behavior of grid stiffened composite conical shells subjected to the lateral pressure. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2022. 236(5): p. 2522-2535.
- [6] Zarei, M., G. Rahimi, and M. Hemmatnezhad, Free vibrational characteristics of grid-stiffened truncated composite conical shells. *Aerospace Science and Technology*, 2020. 99: p. 105717.
- [7] Banijamali, S.M. and A.A. Jafari, Free vibration analysis of rotating functionally graded conical shells reinforced by anisogrid lattice structure. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2021: p. 1-23.
- [8] ALI Aghar, N. and H. Ahmadi, Determination of stiffness coefficients and buckling strength of composite lattice conical shells using shell fiber path and lattice rib analysis. *Iranian Journal of Manufacturing Engineering*, 2021. 8(7): p. 31-42. (in Persian)
- [9] NADERI, A.A. and G.H. RAHIMI, Simple method for buckling load of composite conical Lattice structures under axial load. 2015. (in Persian)
- [10] Hemmatnezhad, M., G. Rahimi, and R. Ansari, On the free vibrations of grid-

- Journal of Mechanical Sciences, 2013. 69: p. 72-84.
- [21] Talebitooti, M., M. Ghayour, S. Ziaei-Rad, and R. Talebitooti, Free vibrations of rotating composite conical shells with stringer and ring stiffeners. *Archive of Applied Mechanics*, 2010. 80(3): p. 201-215.
- [22] Georgiades, A., K. Challagulla, and A. Kalamkarov, Asymptotic homogenization modeling of smart composite generally orthotropic grid-reinforced shells: Part II-Applications. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2010. 29(4): p. 541-556.
- [23] Van Dung, D. and N.T. Nga, Instability of eccentrically stiffened functionally graded truncated conical shells under mechanical loads. *Composite Structures*, 2013. 106: p. 104-113.
- [24] Liew, K.M., T.Y. Ng, and X. Zhao, Free vibration analysis of conical shells via the element-free kp-Ritz method. *Journal of Sound and Vibration*, 2005. 281(3-5): p. 627-645.
- [25] Xiang, X., Guoyong, J., Wanyou, L., & Zhigang, L, A numerical solution for vibration analysis of composite laminated conical, cylindrical shell and annular plate structures. *Composite Structures*, 2014. 111: p. 20-30.
- [26] Irie, T., Natural frequencies of truncated conical shells. *J. Sound and Vibration*, 1984. 92(3), p.447.
- [27] Roy, S., S.N. Thakur, and C. Ray, Free vibration analysis of laminated composite hybrid and GFRP shells based on higher order zigzag theory with experimental validation. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2021. 88: p. 104261.
- [28] Houshangi, A., Haghghi, S.E., Jafari, A.A. and Nezami, M., 2022. Free damped vibration analysis of a truncated sandwich conical shell with a magnetorheological elastomer core. *Waves in Random and Complex Media*, 2022. pp.1-28.
- [29] Bert, Charles W., and Moinuddin Malik. *Differential quadrature method in computational mechanics: a review*. 1996: 1-28.
- [30] Weingarten, V.I., Free vibrations of conical shells. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1965: 91(4), pp.69-87.

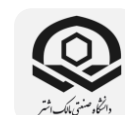
۲۰۲

سال ۱۲ - شماره ۱

پهار و تابستان ۱۴۰۲

نشریه علمی

دانش و فناوری هوا فضا



بررسی رفتار ارتعاشی پوسته‌های کامپوزیتی مخروطی تقویت‌شده با شبکه ناهمسان مشبک با روش تفاضل مرکزی