

پیش‌بینی فروریزش پلاستیک پوسته‌های مخروطی تحت فشار استاتیک داخلی به روش تحلیلی

جمال زمانی^۱، محمدحسین بنویدی^۲، مهدی آقایی^۳، محمدوهاب موسوی^۴

۱ و ۴ دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۲ و ۳ دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۱۱/۲۲

پذیرش مقاله: ۱۳۹۳/۰۶/۱۶

چکیده

در این مقاله رفتار پلاستیک پوسته مخروطی جدار نازک تحت فشار استاتیک داخلی، به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. برای ساده‌سازی روابط، از برآیند تنش در راستای یال مخروط صرف‌نظر شده و از مدل صلب-پلاستیک کامل برای رفتار مادی سازه استفاده شده است. با استفاده از سطح تسلیم مستطیلی معمول و تقسیم‌بندی مسئله به مخروط کوتاه و بلند و به‌دست آوردن محدوده آنها، مقدار فشار استاتیک داخلی لازم برای شروع جریان پلاستیک در سازه محاسبه گردیده است. براساس نتایج به‌دست آمده از این پژوهش می‌توان زوایای رأس خاصی را مشاهده کرد که در آنها فشار فروریزش بیشینه می‌شود. همچنین به ازای زوایای نزدیک به صفر و ۹۰ درجه، جواب‌ها به ترتیب به نتایج استوانه و ورق دایروی تحت فشار یکنواخت همگرا می‌شود. علاوه بر آن، مسئله با توجه به نسبت شعاع بزرگ مخروط به ضخامت آن و همچنین برای حالت‌های مختلف مخروط بلند و کوتاه حل و نتایج با یکدیگر مقایسه شده است.

کلید واژه

پوسته مخروطی، فروریزش پلاستیک، فشار داخلی استاتیک، مدل صلب-کاملاً پلاستیک.

مقدمه

زیردریایی‌ها را به صورت پوسته‌های استوانه‌ای با رینگ‌های صلب تقویتی که با یک مخروط ناقص مسدود شده است، مدل کرد. در زمینه هوافضا، کابین فضاپیماها نیز می‌تواند به صورت یک پوسته مخروطی در نظر گرفته شود. در دو کاربرد اخیر، پوسته‌ها تحت فشار خارجی قرار دارد [۱]. بر اساس آزمایش‌ها و نیز پیش‌بینی‌های مهندسی، می‌توان دو نوع واماندگی کمانش و تشکیل لولاهای حلقوی پلاستیک تحت بار استاتیکی را برای پوسته‌های مخروطی تشخیص داد [۲]. در این مقاله تشکیل لولاهای حلقوی پلاستیک مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است.

تانی و یاماکی [۲] و سید [۳] مودهای کمانش متقارن محوری پوسته‌های مخروطی تحت فشار هیدرواستاتیک داخلی و بار محوری را به صورت تحلیلی بررسی نمودند. کار تحلیلی آنها منجر به روابط بسته‌ای شد که شرایط حدی یعنی بار محوری برای کمانش استوانه را نیز تأیید می‌نمود. به این ترتیب استفاده از شرایط

پوسته‌های مخروطی از جمله پوسته‌های بسیار مهم در زمینه‌های کاربردی و صنعتی هستند. این پوسته‌ها در شاخه‌های مختلف مهندسی و به طور عمده تحت فشار داخلی و یا خارجی به کار می‌روند. به عنوان مثال در سازه‌هایی نظیر سیلوا، مخازن تحت فشار، برج‌های خنک‌کننده و دودکش‌ها از آنها استفاده می‌شود. در صنعت نفت و لوله‌های انتقال برای اتصال دو لوله با قطرهای نابرابر و در محل‌هایی که استفاده از اتصال فلنجی شکل مناسب نیست، کاهنده‌های مخروطی مورد استفاده قرار می‌گیرند. سازه‌های عنوان شده را می‌توان به عنوان پوسته‌های مخروطی تحت بارگذاری فشاری داخلی مدل نمود. در صنایع دریایی، می‌توان بدنه

۱. دانشیار، zamani@kntu.ac.ir (نویسنده مخاطب)

۲. کارشناس ارشد، mh_benvidi@yahoo.com

۳. کارشناس ارشد، aghaei.mehdi@mapnaturbine.com

۴. کارشناس ارشد، m.v.mousavi@gmail.com

حدی مخروطی، از جمله روش‌های صحنه‌گذاری نتایج می‌باشد. همچنین کماتش پلاستیک پوسته‌های مخروطی جدار نازک تحت فشار خارجی توسط روس و همکارانش [۴] به صورت تجربی و با استفاده از روش اجزاء محدود مورد بررسی قرار گرفت. کماتش الاستیک اتصال پوسته‌های استوانه‌ای-مخروطی تحت فشار داخلی نیز توسط تنگ [۵] در هندسه‌های متفاوت بررسی شد و رابطه ساده شده‌ای بر اساس حل‌های متفاوت اجزاء محدود انجام شده، استخراج گردید. این رابطه با استفاده از نتایج تجربی صحنه‌گذاری شد. مقدمات تحلیل پلاستیک سازه‌های مهندسی توسط پریگر، دراگر و هاج [۶-۸] پی‌ریزی شد. پریگر نرخ انرژی مصرفی بر اساس کار پلاستیک را بر حسب متجه‌های تنش محاسبه نمود. دراگر [۷] نشان داد که این نرخ همواره بزرگ‌تر و یا مساوی صفر است. بر اساس کار آن‌ها، هاج [۸] سطوح تسلیم مناسب را برای پوسته‌ها در نظر گرفت. با استفاده از این سطوح تسلیم و با توجه به فرضیات به کار برده شده در متجه‌های تنش، می‌توان مرزی برای شروع پلاستیک شدگی در ماده در نظر گرفت. با استفاده از سطوح تسلیم ساده شده به صورت سطوح تسلیم مستطیلی و یا شش ضلعی با استفاده از دو متجه تنش، محققان بسیاری به مطالعه فشار فروریزش ورق‌ها و پوسته‌های متفاوت پرداختند. دراگر [۹] پوسته استوانه‌ای تحت بار متقارن محوری را بدون اعمال شرایط مرزی و با استفاده از دو سطح تسلیم شش ضلعی و ترسکای واقعی بررسی نمود. سپس دراگر و دمیر [۱۰] با نتایج تجربی خود نشان دادند که روابط مرجع [۸] برای استوانه‌های بلند صادق است و حدی از بلندی را متناسب با نتایج تجربی خود تعریف کردند. همچنین آسون [۱۱] پوسته‌های استوانه‌ای را بدون شرط مرزی و تحت بار حلقوی تحلیل نمود.

شرط مرزی تکیه‌گاه مقید با حلقه صلب می‌تواند در مدل‌سازی انواع سازه‌ها مفید واقع شود و به طور عمده توسط محققان استفاده شده است. جونز [۱۲] و هاج [۱۳] استوانه‌ها را با بارگذاری فشاری متقارن محوری و استفاده از شرط مرزی حلقه صلب تقویتی به ترتیب به صورت استاتیکی و دینامیکی تحلیل نمودند. همچنین جونز [۱۲] مطالعات عمیقی در زمینه حد پلاستیک استاتیکی و دینامیکی انواع ورق‌ها و پوسته‌ها انجام داده است. تحلیل حد پلاستیک پوسته‌های مخروطی تحت بار متمرکز عرضی توسط هاج [۱۴]، کوچ و لی [۱۵] با فرض شرط تسلیم ترسکا انجام شده است. لپ و پومان [۱۶] در زمینه بهینه کردن سازه‌ای یک پوسته مخروطی تحت فشار خارجی با استفاده از سطوح تسلیم مستطیلی تحقیق نمودند. آنها از دو سطح تسلیم مستطیلی که هریک از آنها

در برگیرنده یک متجه نیرویی و یک متجه ممان بود، استفاده کردند. جونز و ایچ [۱۷] از سطوح تسلیم "الماسی" برای تحلیل حد پلاستیک پوسته‌های مخروطی استفاده نمودند که پیش از آن توسط اونات و پریگر [۱۸] برای تحلیل پوسته‌های کم عمق ارائه شده بود. همین سطح تسلیم برای بهینه کردن پوسته‌های مخروطی تحت جرم صلب مرکزی توسط لپ و پومان [۱۹] استفاده شد.

معادلات دیفرانسیلی پایه برای به دست آوردن حالت‌های تنش در پوسته‌های مخروطی پیچیده است [۱۹]. بنابراین اگر امکان استفاده از سطوح تسلیم ساده‌تر برای تحلیل حد تسلیم پلاستیک پوسته‌های دورانی، از جمله پوسته‌های مخروطی فراهم شود، می‌توان روابط بسته‌ای استخراج کرد که در تخمین‌های مهندسی سریع با دقت‌های قابل قبول به کار برده شوند. همچنین می‌توان از این روابط برای سایر تحلیل‌ها مانند تحلیل فروریزش پلاستیک پوسته‌هایی که از اتصال پوسته‌های دورانی متفاوت از قبیل پوسته‌های استوانه‌ای، کروی و مخروطی ایجاد شده‌اند استفاده نمود. علاوه بر آن این روابط برای تحلیل‌های پلاستیک-دینامیک پوسته‌ها نیز قابل استفاده است. هاج [۱۳] از روابط فروریزش پوسته استوانه‌ای برای تحلیل فروریزش پلاستیک-دینامیک این پوسته‌ها به ازای نرخ بارگذاری‌های متفاوت به عنوان روابط پایه استفاده کرده است.

در این مقاله حد پلاستیک پوسته‌های مخروطی تحت فشار داخلی با شرایط مرزی به صورت دو حلقه صلب در دو انتهای پوسته ارائه شده است. سطح تسلیم مستطیلی در نظر گرفته شده که در جهت طول و عرض آن از متجه تنش‌های ممان واحد طول در راستای یال و نیروی محیطی واحد طول استفاده شده است. این سطح تسلیم برای ماده صلب-کامل پلاستیک مناسب است. این مدل فشار فروریزش حالت‌های حدی خود یعنی ورق مدور تو خالی و پوسته استوانه‌ای را پیش‌بینی می‌کند که با نتایج ارائه شده در منابع تطبیق دارد. روند حل بدین ترتیب است که با استفاده از معادلات تعادل پوسته‌های دورانی معادلات حاکم استخراج، سطح تسلیم در نظر گرفته شده و با پیش‌بینی شکل فروریزش برای آن‌ها، فشار فروریزش محاسبه شده است. سپس پوسته‌های مخروطی به دو دسته پوسته کوتاه و پوسته بلند تقسیم شده و رابطه بسته‌ای برای هر دسته از آن‌ها استخراج گردیده است. در نهایت، اثرات متغیرهای هندسی به صورت نموداری بررسی شده است.

معرفی روش حل جدید تحلیلی

در این قسمت ابتدا معادلات مرتبط با پوسته مخروطی شکل در حالت کلی و بدون اعمال شرایط مرزی استخراج و سپس با اعمال شرایط مرزی، مسئله به صورت پوسته مخروطی کوتاه و بلند حل شده است.

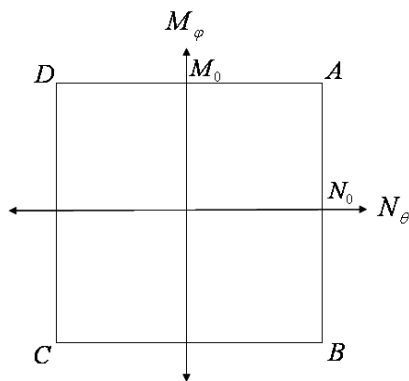
استخراج معادلات

اگر یک المان از پوسته دورانی متقارن با تمامی نیروهای وارد بر آن مطابق شکل (۱) در نظر گرفته شود، آنگاه با استفاده از معادلات تعادل نیرو و ممان می توان نوشت:

برای باز نویسی رابطه (۱) باید رفتار پلاستیک ماده سازنده مخروط مشخص گردد. برای ساده سازی روابط فرض می شود رفتار پلاستیک ماده صلب-کاملاً پلاستیک است. همچنین باید از سطح تسلیم مشخصی استفاده کرد و مسیر مشخصی را برای متصل کردن لولاهای پلاستیک بر روی سطح تسلیم تعیین نمود. همان طور که جونز [۱۲] نشان داده است، سطح تسلیم برای یک پوسته استوانه ای با صرف نظر کردن از M_ϕ و N_ϕ مطابق شکل (۲) خواهد بود. در این نمودار M_ϕ ممان واحد طول در راستای یال و N_ϕ نیروی محیطی واحد طول می باشد. همچنین مقادیر M_0 و N_0 به ترتیب با استفاده از روابط (۳) و (۴) محاسبه می شوند که در آن ها σ_y تنش تسلیم ماده و h ضخامت پوسته است.

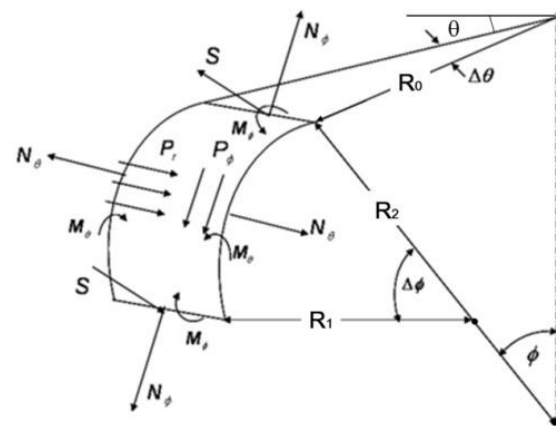
$$N_0 = \sigma_y h \quad (3)$$

$$M_0 = \frac{\sigma_y h^2}{4} \quad (4)$$



شکل ۲. سطح تسلیم ۴ ضلعی برای پوسته استوانه ای [۱۲]

برای پوسته های مخروطی نیز از سطح تسلیمی مطابق شکل (۲) استفاده می شود. حال باید اضلاع چهار ضلعی ABCD را برای پیش بینی درست رفتار پلاستیک مخروط تحت فشار داخلی انتخاب کرد. یک انتخاب می تواند ضلع AD باشد که در آن M_ϕ ثابت و N_ϕ متغیر است. البته این انتخاب به حل صحیح مسئله کمکی نمی کند، زیرا با توجه به اینکه در مسئله استاتیکی با فاصله گرفتن از تکیه گاه، مقدار ممان تغییر می کند، در طول یال مخروط، مقدار ممان نمی تواند ثابت باشد. البته می توان علت عدم انتخاب ضلع AD را با استفاده از اصل دراکر [۷] توضیح داد. این اصل بیان می کند نرخ کرنش های تعمیم یافته بر سطوح تسلیم عمود هستند. با استفاده از این اصل مقدار K_ϕ (تغییر انحنای سازه در واحد زمان) بر ضلع AD عمود خواهد بود. با توجه به اینکه در آستانه فروریزش سازه، تغییرات انحنا به وجود نخواهد آمد، در نتیجه $K_\phi = 0$ بوده و



شکل ۱. نیروهای وارد بر پوسته دورانی [۱]

$$(R_0 N_\phi)' - R_1 N_\phi \cos \phi - R_0 S + R_0 R_1 P_\phi = 0$$

$$(R_0 S)' + R_1 N_\phi \sin \phi + R_0 N_\phi + R_0 R_1 P_r = 0 \quad (1)$$

$$(R_0 M_\phi)' - R_1 M_\phi \cos \phi - R_0 R_1 S = 0$$

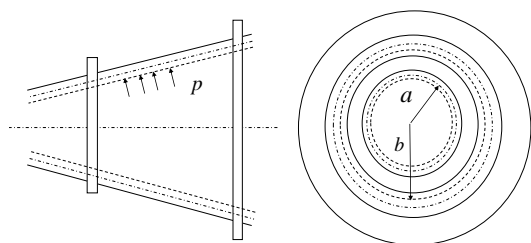
در رابطه (۱) پریم ها اشاره به مشتق نسبت به ϕ دارند و شعاع های R_0 و R_2 به صورت رابطه (۲) با هم مرتبط هستند.

$$R_0 = R_2 \sin \phi \quad (2)$$

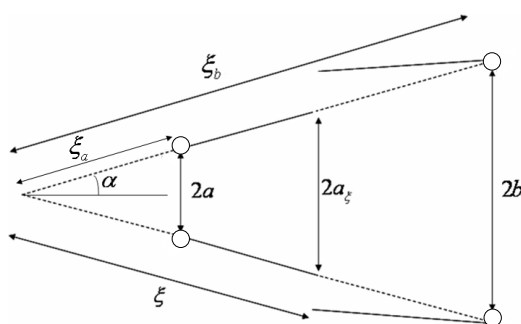
رابطه (۱) که برای کلیه پوسته های دورانی صادق است، برای پوسته مخروطی باز نویسی می شود. به منظور ساده سازی روند حل، فرض می شود که در راستای یال مخروط، آزادی حرکت وجود دارد و در نتیجه می توان از برآیند تنش در راستای یال که در شکل (۱) با N_ϕ نمایش داده شده است، صرف نظر نمود. به دلیل تقارن موجود در مسئله، مقدار ممان واحد طول محیطی، M_ϕ ، صفر است. با توجه به هندسه خاص پوسته مخروطی، مقدار R_1 بی نهایت و به دلیل اینکه مخروط تحت فشار داخلی است مقدار P_ϕ نیز صفر است.

حل پوسته مخروطی بلند

برای فروریزش یک پوسته استوانه‌ای تقویت شده با رینگ‌هایی با فواصل مساوی تحت بار استاتیکی، به دلیل تقارن موجود در مسئله نیاز به تشکیل سه لولای پلاستیک می‌باشد [۱۱]. یک لولا در مرکز استوانه با نیروی برشی صفر و دو لولای دیگر در محل تکیه‌گاه‌ها قرار می‌گیرند. این شرایط مرزی بر یک پوسته مخروطی ناقص نیز قابل اعمال می‌باشد (شکل (۳)). همان‌طور که در شکل (۴) نشان داده شده است، در مورد پوسته مخروطی با تشکیل دو لولای پلاستیک می‌توان به یک مکانیزم با یک درجه آزادی رسید. اما برخلاف پوسته استوانه‌ای که مکان تشکیل لولاهای پلاستیک در تکیه‌گاه‌ها و در مرکز استوانه قرار دارد، به دلیل عدم تقارن پوسته مخروطی در جهت یال، مکان تشکیل این لولاهای مشخص نیست.



شکل ۳. شرایط هندسی و بارگذاری یک پوسته مخروطی ناقص



شکل ۴. مکانیزم فروریزش پوسته مخروطی

یکی از لولاهای پلاستیک در محل تکیه‌گاه با شعاع بزرگ مخروط قرار دارد که لولای پلاستیک تکیه‌گاهی نامیده می‌شود. دلیل ایجاد لولای پلاستیک این است که در این محل سفتی خمشی سازه به کمترین مقدار خود می‌رسد. بنابراین در معادله (۱۰) چهار مجهول وجود دارد که عبارتند از مقدار فشار فروریزش استاتیکی، P ، فاصله مجهول لولای پلاستیک دوم از رأس مخروط (لولای پلاستیک میانی)، ξ و ثابت مورد نیاز در معادله (۱۰)، C_1 و C_2 . با اعمال شرایط مرزی در معادله (۱۲) در حالت $\alpha = 90^\circ$ و مخروط کامل روابط زیر حاصل خواهند شد:

انتخاب ضلع AD متنفی خواهد بود. مسیر دیگر می‌تواند ضلع AB باشد که در آن N_θ ثابت و برابر با N_0 و M_ϕ متغیر است. پس با استفاده از رابطه (۱) می‌توان به دستگاه معادلات (۵) رسید.

$$\begin{aligned} -R_1 N_0 \cos \phi - R_0 S &= 0 \\ (R_0 S)' + R_1 N_0 \sin \phi + R_0 R_1 P_r &= 0 \\ (R_0 M_\phi)' - R_0 R_1 S &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

با استفاده از رابطه (۵) می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial R_0}{\partial \phi} S + R_0 \frac{\partial S}{\partial \phi} + R_1 N_0 \sin \phi + R_0 R_1 P_r = 0 \quad (6)$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$dy = R_1 d\phi \quad (7)$$

با توجه به هندسه مخروط مقدار R_1 حاصل می‌شود:

$$R_0 = y \sin \alpha \quad (8)$$

با استفاده از روابط (۶)، (۷) و (۸) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$S \sin \alpha + y \sin \alpha \frac{\partial S}{\partial y} + N_0 \cos \alpha + y \sin \alpha P_r = 0 \quad (9)$$

از طرفی از رابطه (۵) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$S = \frac{M_\phi}{y} + \frac{\partial M_\phi}{\partial y} \quad (10)$$

با جایگذاری رابطه (۱۰) در معادله (۹) معادله دیفرانسیل نهایی به دست می‌آید.

$$2 \frac{dM_\phi}{dy} + y \frac{d^2 M_\phi}{dy^2} + N_0 \cot \alpha - py = 0 \quad (11)$$

با حل معادله دیفرانسیل (۱۱) معادله ممان بر حسب y به صورت

معادله (۱۲) در می‌آید.

$$M_\phi = \frac{Py^2}{6} - \frac{yN_0 \cot \alpha}{2} - \frac{c_1}{y} + c_2 \quad (12)$$

با استفاده از معادله (۱۲) و اعمال شرایط مرزی مناسب می‌توان

میزان فشار فروریزش استاتیکی پوسته مخروطی شکل جدار نازک را محاسبه نمود.

اعمال شرایط مرزی

پس از به دست آوردن معادله کلی ممان، نیاز است تا با اعمال شرایط مرزی مناسب، ثابت مجهول معادله (۱۲) تعیین شود تا از این طریق بتوان میزان بار فروریزش را به صورت تحلیلی محاسبه نمود. در این پژوهش این معادله با دو فرض متفاوت حل شده است که در ادامه به آن‌ها پرداخته شده است.

$$S(y = \xi) = 0 \Rightarrow \frac{p\xi}{2} - N_0 \cot(\alpha) + \frac{c_2}{\xi} = 0$$

با حل این ۳ معادله و ۴ مجهول و مینیمم کردن مقدار بار در مجموعه معادلات (۱۴) مقدار ξ در مخروط ناقص با استفاده از حل معادله درجه ۳ زیر محاسبه می شود.

$$\begin{aligned} N_0 \cot(\alpha) \xi^3 + (4M_0 - 3N_0 \cot(\alpha) \xi_b) \xi^2 \\ + (7M_0 \xi_b + 3N_0 \cot(\alpha) \xi_b^2) \xi \\ + (M_0 \xi_b^2 - N_0 \cot(\alpha) \xi_b^3) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

پس از به دست آوردن مقدار مجهول ξ از معادله (۱۵) می توان مقدار فشار فروریزش استاتیکی مخروط بلند را از رابطه (۱۷) محاسبه نمود:

$$p = \frac{N_0 \cot(\alpha)}{\xi} - \frac{M_0}{(\xi_b - \xi) \xi} \quad (16)$$

حل پوسته مخروطی ناقص کوتاه

در صورتی که $a < \xi_a$ باشد، برای کمینه شدن مقدار بار فروریزش لازم است لولاهای پلاستیک در دو تکیه گاه تشکیل شوند و در نتیجه معادله (۱۵) به صورت زیر نوشته خواهند شد.

$$S(y = \xi_a) = 0 \Rightarrow \frac{p\xi_a}{2} - N_0 \cot(\alpha) + \frac{c_2}{\xi_a} = 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} M(y = \xi_b) = M_0 \Rightarrow \\ M_0 = \frac{p\xi_b^2}{6} - \frac{N_0 \xi_b \cot(\alpha)}{2} - \frac{c_1}{\xi_b} + c_2 \end{aligned} \quad (18)$$

$$S(y = \xi_a) = 0 \Rightarrow \frac{p\xi_a}{2} - N_0 \cot(\alpha) + \frac{c_2}{\xi_a} = 0 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} M(y = \xi_a) = -M_0 \Rightarrow \\ -M_0 = \frac{p\xi_a^2}{6} - \frac{N_0 \xi_a \cot(\alpha)}{2} - \frac{c_1}{\xi_a} + c_2 \end{aligned} \quad (20)$$

پس از حل دستگاه معادلات (۱۷)، مجهول اصلی یعنی فشار فروریزش مخروط کوتاه مطابق رابطه (۱۸) محاسبه می شود.

$$p = \frac{6[N_0 \cot(\alpha) (\frac{\xi_a}{2} - \frac{\xi_b}{2}) - M_0 (\frac{\xi_a + \xi_b}{\xi_a - \xi_b})}{2\xi_a^2 - \xi_b^2 - \xi_a \xi_b} \quad (21)$$

تحلیل و بررسی نتایج

در تمام نمودارهای ارائه شده، میزان تنش تسلیم ۲۰۰ مگا پاسکال در نظر گرفته شده و مقدار فشار فروریزش در زوایای رأس مختلف مخروط با نسبت های b/h متفاوت رسم گردیده است. همان طور که در شکل (۵) نشان داده شده است، در تمام نسبت های b/h میزان بار فروریزش در حالت $\alpha = 0$ مساوی با فشار فروریزش استاتیکی استوانه با شعاع برابر می باشد. همچنین در حالت $\alpha = 90$ این

$$M(y = 0) = -M_0 \Rightarrow c_2 = -M_0, c_1 = 0$$

$$M(y = \xi_b) = M_0 \Rightarrow p_c = \frac{12M_0}{\xi_b^2} \quad (13)$$

در این رابطه ξ_b فاصله تکیه گاه از رأس مخروط در راستای یال آن است. همان طور که مشخص است معادله (۱۳) دقیقاً برابر با فشار فروریزش ورق دایروی گیردار با شعاع ξ_b تحت بار یکنواخت گسترده می باشد که روش به دست آوردن آن در ضمیمه آورده شده است.

در معادله (۱۳) فرض بر این بوده که مقدار ممان در مرکز و تکیه گاه M_0 بوده است. یعنی رأس مخروط نمایانگر نقطه A و تکیه گاه نمایانگر نقطه B در شکل (۲) هستند و نقاط مابین لولاهای پلاستیک بر روی خط AB قرار دارند. در نمودار ممان بر حسب مکان باید توجه داشت که مقدار ممان در هیچ نقطه ای از مقدار M_0 فراتر نرفته و از مقدار M_0 کمتر نشود، زیرا در غیر این صورت از شرط تسلیم عدول خواهد شد. برای مخروط کامل در حالت $\alpha < 90$ باید مکان لولای پلاستیک که در آن نیروی برشی صفر است از بین دو لولای پلاستیک مشخص گردد. به دلیل اینکه نتایج مخروط به ازای $\alpha = 90$ باید به نتایج ورق دایروی میل نماید، لولای پلاستیک با برش صفر در محل لولای پلاستیک میانی در نظر گرفته می شود. مسئله توزیع ممان در مخروط به مسئله توزیع ممان در نصف استوانه شباهت زیادی دارد. تفاوت مخروط در اینجاست که با توجه به معادله (۸) و صفر نبودن مشتق ممان در لولای پلاستیک میانی، نمی توان انتظار تغییر شیب در معادله ممان مخروط بعد از لولای پلاستیک میانی را داشت. بنابراین نقاطی که فاصله آنها از رأس مخروط کمتر از لولای پلاستیک میانی هستند، وارد ناحیه پلاستیک نخواهند شد. البته به دلیل سفتی خمشی بالای مخروط در نقاط نزدیک به رأس، این مسئله از قبل حدس زده می شد. با توجه به اینکه در حالت $\alpha < 90$ و مخروط کامل، مکان لولای پلاستیک میانی، در رأس مخروط نخواهد بود و اساساً رأس مخروط وارد ناحیه پلاستیک کامل نمی شود، نمی توان ترم c_1 در معادله (۱۲) را برابر با صفر در نظر گرفت. در نتیجه مسئله فروریزش مخروط کامل، دقیقاً با مسئله مخروط ناقص بلند یکسان خواهد بود. برای حل مخروط ناقص می توان از معادله (۱۲) استفاده کرد.

$$M(y = \xi_b) = M_0 \Rightarrow$$

$$M_0 = \frac{p\xi_b^2}{6} - \frac{N_0 \xi_b \cot(\alpha)}{2} - \frac{c_1}{\xi_b} + c_2$$

$$M(y = \xi) = -M_0 \Rightarrow \quad (14)$$

$$-M_0 = \frac{p\xi^2}{6} - \frac{N_0 \xi \cot(\alpha)}{2} - \frac{c_1}{\xi} + c_2$$

از شکل (۶) مشخص است که با افزایش زاویه رأس مخروط، گستره بزرگ‌تری از نسبت‌های a/b در محدوده مخروط کوتاه قرار می‌گیرد و این مسئله تا جایی ادامه پیدا می‌کند که در زاویه رأس ۹۰ درجه (ورق دایروی توخالی) هر مقداری از a/b در محدوده مخروط ناقص کوتاه قابل حل است. این مطلب در شکل (۶) نشان داده شده است. در حالت $\alpha = 90$ میزان a/b برابر صفر است.

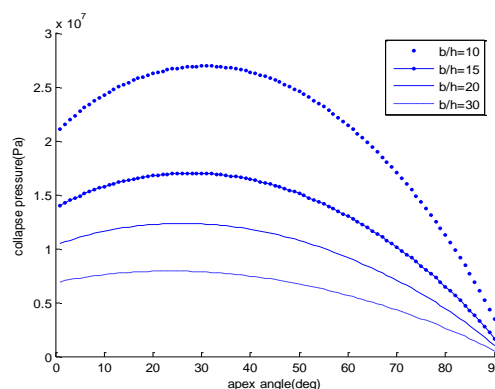
نتیجه دیگری که می‌توان از شکل (۶) گرفت این است که در یک زاویه رأس مشخص با افزایش نسبت b/h ، میزان a/b برای تعریف مخروط بلند افزایش می‌یابد و در نتیجه در مخروط‌های ضخیم‌تر نواحی بیشتری از سازه تحت فشار داخلی، وارد ناحیه پلاستیک کامل می‌شوند. این مسئله به این ترتیب قابل توضیح است که به ازای یک b مشخص، با افزایش ضخامت، نواحی پلاستیک شدگی در طول یال به سمت رأس مخروط پیش می‌رود. وقتی یک سازه مخروطی تحت فشار داخلی قرار می‌گیرد طبق رابطه (۱۹) که نشان دهنده منته‌تشن محیطی غشایی است، ابتدا نواحی با شعاع بیشتر وارد ناحیه پلاستیک می‌شوند. با افزایش مقدار p ناحیه پلاستیک گسترش می‌یابد تا جایی که در نقطه مجهول ξ مقدار M_0 نیز برابر با $-M_0$ خواهد شد و سازه فرو می‌ریزد. حال اگر با افزایش ضخامت سازه، مقدار M_0 را که با مجذور h متناسب است (در مقایسه با N_0 که با h متناسب است) افزایش داده شود، تشکیل لولای پلاستیک دشوارتر شده و لولای پلاستیک در محلی نزدیک‌تر به رأس مخروط تشکیل خواهد شد.

$$N_0 = \frac{Pr}{\cos(\alpha)} \quad (22)$$

در شکل‌های (۷) و (۸) نتایج حل پوسته مخروطی کوتاه ارائه شده است، در این شکل مشخص است که در تمام زوایای رأس مخروط، در نسبت‌های کم a/b ، میزان بار فروریزش تغییر چندانی نخواهد داشت. نکته قابل توجه در مخروط‌های بلند این است که میزان فشار فروریزش تابعی از شعاع کوچک مخروط که در شکل ۴ با a نمایش داده شده است، نیست. بنابراین قسمت‌های مستقل از a/b شکل‌های (۷) و (۸) فشار فروریزش مخروط‌های بلند را پیش‌بینی می‌کنند. در قسمت مخروط‌های بلند مشخص است که میزان بار فروریزش در حالت $\alpha = 20$ ماکزیمم است ولی با افزایش نسبت a/b و ورود به محدوده مخروط کوتاه دقیقاً این روند معکوس شده و مخروط‌های با زاویه رأس بیشتر دارای مقاومت بیشتری خواهند بود.

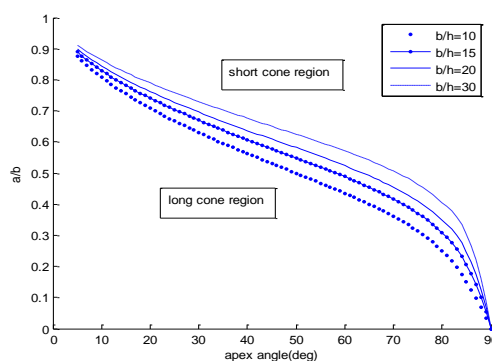
در جدول (۱) فشار فروریزش برای مخروط، با $b/h=20$ با زاویه رأس ۲۰ درجه آورده شده است. در ستون سوم این جدول میزان بار بحرانی فروریزش استاتیکی استوانه با طول کوتاه آمده

جواب با حل ورق دایروی توخالی با شعاع برابر، یکسان است. با نگاهی دقیق‌تر به نمودارهای شکل (۵) مشاهده می‌شود که با افزایش میزان زاویه رأس مخروط از صفر درجه تا حدود ۲۵ درجه، میزان بار فروریزش استاتیکی مخروط افزایش می‌یابد. البته زاویه‌ای که در آن مقاومت سازه حداکثر است، کاملاً به مقدار b/h وابسته است. یعنی هرچه b/h کمتر باشد، زاویه‌ای که در آن بار فروریزش حداکثر است، بیشتر خواهد بود. در ضمن همان‌طور که از قبل نیز مشخص بود، با افزایش b/h ، سازه ضعیف‌تر شده و میزان بار فروریزش کاهش می‌یابد که این مطلب نیز در شکل (۵) مشهود است.



شکل ۵. میزان فشار فروریزش استاتیکی مخروط بلند در زوایای مختلف

با استفاده از نمودار ارائه شده در شکل (۶) می‌توان مرز تعریف مخروط بلند و کوتاه را در زوایای مختلف رأس مخروط و در نسبت‌های مختلف b/h مشخص کرد. یعنی به ازای یک b/h مشخص، خطوط رسم شده در شکل (۶) نشانگر مرز مخروط‌های کوتاه و بلند است که اگر a/b زیر منحنی مورد نظر باشد، مخروط بلند تلقی می‌شود و اگر a/b بالای منحنی قرار گیرد، مخروط کوتاه حاصل می‌شود.



شکل ۶. بیشترین میزان a/b برای تعریف مخروط بلند

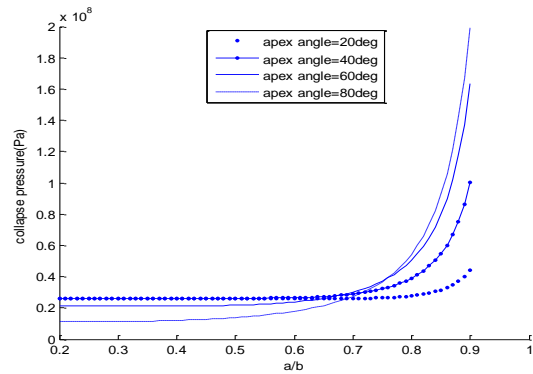
نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این تحقیق رفتار پلاستیک پوسته‌های مخروطی در حالت استاتیکی تحت فشار داخلی بررسی و از مدل صلب-پلاستیک کامل برای مدل‌سازی رفتار ماده استفاده شد. در این تحقیق فرض شده است که مخروط توسط رینگ‌های تقویت کننده صلب مقید شده و امکان صرف نظر از برآیندهای تنش در راستای یال مخروط وجود دارد. پس از استفاده از معادلات تعادل، المان پوسته دورانی جدار نازک و اعمال شروط تسلیم مربوط به سطح تسلیم مستطیلی معمول و همچنین قیود هندسی مخروط، معادلات لازم استخراج گردید. برای حل معادلات، دو دسته مخروط با توجه به شرایط هندسی آن و مکان قرارگیری لولاهای پلاستیک شناسایی شد. نتایج هر دسته به صورت تحلیلی ارائه و مرز آنها مشخص گردید. در ضمن نتایج حل مخروط به ازای زوایای رأس مختلف مخروط به دست آمد و مشخص شد که در قسمت مخروط‌های بلند میزان بار فروریزش در حالت $\alpha = 20$ ماکزیمم است. با افزایش نسبت a/b و ورود به محدوده مخروط کوتاه دقیقاً این روند معکوس شده و مخروط‌های با زاویه رأس بیشتر دارای مقاومت بیشتری خواهند بود. همچنین با کاهش مقدار b/h زاویه‌ای که در آن بار فروریزش حداکثر است، افزایش می‌یابد. روابط ارائه شده به خوبی فشار فروریزش حالات حدی یعنی ورق حلقوی به ازای زاویه رأس 90 درجه و استوانه به ازای زاویه رأس صفر شده را پیش بینی می‌کنند. علاوه بر آن به ازای یک b مشخص، با افزایش ضخامت، نواحی پلاستیک شدگی در طول یال به سمت رأس مخروط پیش می‌رود.

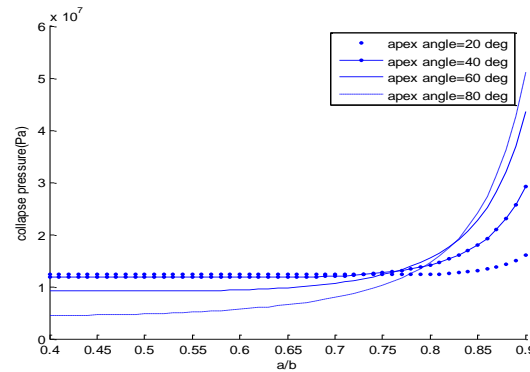
ضمیمه

با توجه به هندسه خاص پوسته مخروطی مشخص است که اگر نصف زاویه رأس مخروط α نامیده شود در حالت $\alpha=90$ پوسته تبدیل به ورق دایروی شده و در حالت $\alpha=0$ پوسته مخروطی تبدیل به پوسته استوانه‌ای می‌شود. به همین دلیل ورق دایروی گیردار با شعاع b تحت بار گسترده یکنواخت به صورت پلاستیک-استاتیک حل شده است. معادله تعادل برآیندهای دوم تنش در ورق دایروی روابط (ضمیمه ۱-۱) و (ضمیمه ۲-۱) استخراج شده‌اند. همچنین در این معادلات از N_r و N_θ صرف‌نظر شده است.

است. برای محاسبه فشار فروریزش استوانه، طول استوانه برابر با طول یال مخروط در نظر گرفته شده است.



شکل ۷. تغییر میزان بار فروریزش استاتیکی با تغییر نسبت a/b در حالت $b/h=10$



شکل ۸. تغییر میزان بار فروریزش استاتیکی با تغییر نسبت a/b در حالت $b/h=20$

جدول ۱. مقایسه بار بحرانی فروریزش استاتیکی استوانه و مخروط با طول

(یال) کوتاه

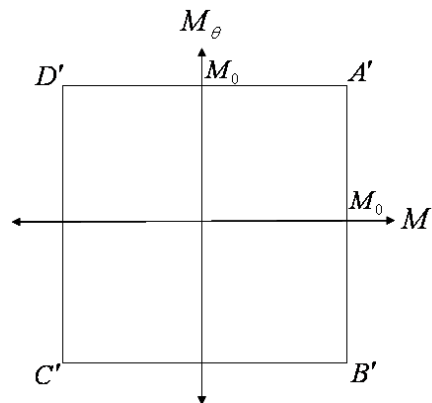
a/b	میزان فشار بحرانی برای مخروط ناقص (bar)	میزان فشار بحرانی برای استوانه (bar)
۰/۶۸۵	۱۲۳	۱۰۶
۰/۷۴۳	۱۲۳	۱۰۹
۰/۷۶	۱۲۳	۱۱۰
۰/۸	۱۲۳	۱۱۵
۰/۸۵۷	۱۳۳	۱۲۹
۰/۹۱۴	۱۷۷	۱۸۰
۰/۹۷۱	۷۱۰	۸۲۰

$$P_c = \frac{6M_0}{b^2}$$

(ضمیمه ۵)

مراجع

1. Ugural, A. C. 1981. Stresses in plates and shells, New York, McGraw-Hill.
2. Tani, J., and N. Yamaki, 1969. Buckling of truncated conical shells under hydrostatic pressure, The report of the Institute of High Speed Mechanics, Tohoku University, Sendai, Japan 2: 235-261.
3. Seide P. 1956. Axisymmetrical buckling of circular cones under axial compression. *Journal of Applied Mechanics*, 625-628.
4. Ross C. T. F., D. Sawkins, J. Thomas, A. P. F. Little. 1999. Plastic collapse of circular conical shells under uniform external pressure, *Advances in Engineering Software* 30: 631-647.
5. Teng J. G. 1996. Elastic buckling of cone-cylinder intersection under localized circumferential compression, *Engineering Structures* 18(1): 41-48.
6. Prager, W. 1959. An introduction to plasticity, Boston, Addison-Wesley.
7. Drucker, D.C. 1951. A more fundamental approach to plastic stress-strain relations, *Proceeding First US Congress of Applied Mechanics*, ASME, 478-491.
8. Hodge, P.G. 1963. Limit analysis of rotationally symmetric plates and shells, Englewood Cliffs, Prentice-Hall.
9. Drucker, D.C. 1953. Limit analysis of cylindrical shells under axial-symmetric loading, *proceeding First Midwestern Conference on Solid Mechanics*: 158-163.
10. Demir, H., D. C. Drucker, 1963. An experimental study of cylindrical shells under ring loading, *Proceeding in Applied Mechanics*, Prager anniversary volume, New York, Macmillan 205-220.
11. Eason G. 1955. The load carrying capacities of cylindrical shells subjected to ring of force. *Journal of Mechanic and Physic of Solids* 4: 17-27.
12. Jones, N. 1989 *Structural impact*, Second Edition, UK, University of Cambridge.
13. Hodge, P.G., 1955. Impact pressure loading of rigid-plastic cylindrical shells, *Journal of Mechanic and Physic of Solids* 3: 176-188.
14. Hodge, P. G., and J. A. Deruntz. 1964. The carrying capacity of conical shells under concentrated and distributed loads. In: Olszak, W., Sawczuk, A. (Eds.), *Non-Classical Shell Problems*, Amsterdam North Holland PC, 660-684.
15. Kuech, R. W., and S. L. Lee. 1965. Limit analysis of simply supported conical shells subjected to uniform internal pressure, *J. Franklin Inst* 280: 71-87.
16. Lellep, J., E. Puman. 1999. Optimization of plastic conical shells of piece-wise constant thickness, *Structures and multidisciplinary optimization* 18 (1): 74-79.
17. Jones, N., and N. T. Ich. 1972. The load carrying capacities of symmetrically loaded shallow shells, *International journal of solids structures* 8: 1339-1351.
18. Onat, E. T., and W. Prager. 1954. Limit analysis of shells of revolution, *Proceedings of the royal Netherlands academy of science B57*: 534- 541 and 542-548.
19. Lellep, J., and E. Puman. 2000. Optimization of plastic conical shells loaded by a rigid central boss. *International Journal of solids structures* 37: 2695- 2708.



شکل ضمیمه ۱. سطح تسلیم مربعی برای تحلیل ورق دایروی

$$\frac{d(rM_r)}{dr} - M_\theta - rQ_r = 0 \quad (\text{ضمیمه ۱-۱})$$

$$\frac{d(rQ_r)}{dr} + rp = 0 \quad (\text{ضمیمه ۱-۲})$$

که در آن p بار یکنواخت اعمالی بر ورق، Q_r برآیند تنش برشی، r شعاع المان دایروی، M_r و M_θ به ترتیب منتجه‌های شعاعی و محیطی ممان می‌باشند.

برای حل مجموعه معادلات (ضمیمه ۱) باید یک سطح تسلیم مناسب، مطابق با شکل (ضمیمه ۱) انتخاب نمود و سپس به حل مسئله پرداخت. با انتخاب ضلع $A'D'$ در سطح تسلیم مقدار M_θ در ورق برابر با مقدار ثابت M_0 بوده و مقدار M_r با تغییر شعاع تغییر می‌کند.

با اعمال معادله (ضمیمه ۱-۲) در معادله (ضمیمه ۱-۱) و حل معادله دیفرانسیل مربوطه، معادله توزیع ممان مطابق رابطه (ضمیمه ۲) به دست می‌آید.

$$M = -M_0 + \frac{pr^2}{6} + d_1 - \frac{d_2}{r} \quad (\text{ضمیمه ۲})$$

در معادله (ضمیمه ۲) ترم های d_1 و d_2 ثوابت انتگرال گیری هستند. در حالت ورق کامل ترم d_2 باید برابر با صفر باشد تا ترم $\frac{d_2}{r}$ با جایگذاری r به بی‌نهایت میل نکند. همچنین در محل تکیه گاه با توجه به شرایط مرزی حلقه صلب پلاستیک، $M_r = 0$ خواهد بود (نقطه A' در شکل (ضمیمه ۱))

$$M(r=b) = -M_0 + \frac{pb^2}{6} + d_1 = 0 \quad (\text{ضمیمه ۳})$$

و در مرکز ورق دایروی داریم $M = M_0$ (نقطه B' در شکل (ضمیمه ۱))

$$M(r=0) = -M_0 + d_1 + \frac{pb^2}{6} = 0 \quad (\text{ضمیمه ۴})$$

$$\Rightarrow d_1 = M_0 - \frac{pb^2}{6}$$

با جایگذاری رابطه (ضمیمه ۴) در رابطه (ضمیمه ۳) رابطه زیر

حاصل خواهد شد: