

ارائه حل تحلیلی برای ارتعاشات آزاد تیر ساندویچی ضخیم با هسته انعطاف پذیر به کمک تئوری مرتبه بالا و روش سفتی دینامیکی

کرامت ملک زاده فرد^۱

۱. مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران

دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۱۰/۱۸

پذیرش مقاله: ۱۳۹۳/۰۶/۱۶

چکیده

در تحقیق حاضر، ارتعاشات آزاد تیر ساندویچی ضخیم با هسته انعطاف پذیر به روش سفتی دینامیکی و با استفاده از تئوری برشی مرتبه بالا مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. بدین منظور ابتدا معادلات حاکم بر حرکت برای یک المان تیر ساندویچی با استفاده از اصل همیلتون و جواب تحلیلی این معادلات به صورت حل صریح و بسته تعیین می شود. پس از اعمال شرایط مرزی المان، ماتریس سفتی دینامیکی المان به دست می آید و در نهایت با اعمال شرایط مرزی دو سر تیر ماتریس سفتی دینامیکی تیر تعیین می شود. با استفاده از تکنیک‌های محاسباتی و الگوریتم معروف ویتریک-ویلیامز، فرکانس‌های طبیعی مربوط به ارتعاشات آزاد تیر تعیین می شود. برای مثال‌های عددی، در نهایت چند مثال عددی با استفاده از روش‌های تحلیلی و سفتی دینامیکی مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. برای صحت‌گذاری، نتایج به دست آمده در این تحقیق با نتایج حاصل از روش‌های المان محدود و حل دقیق مقایسه شد.

کلید واژه

ارتعاشات آزاد، سفتی دینامیکی، تیر ساندویچی، هسته.

مقدمه

دینامیکی ارتعاشات آزاد تیرهای ساندویچی را بررسی کرده‌اند [۸-۶]. از مزایای این روش می‌توان به قدرت این روش برای دستیابی به جواب‌های دقیق‌تر با حداقل تعداد المان، اشاره کرد. به عنوان نمونه بنرجی^۴ [۶] و هوسن و زر^۵ [۷] با روش سفتی دینامیکی ارتعاشات تیرهای ساندویچی با مقطع متجان را بررسی کرده‌اند. فروستینگ و باروچ^۶ [۹] مدل متفاوتی برای تحلیل تیرهای ساندویچی ارائه کردند. آنها ارتعاشات تیرهای ساندویچی را با هسته انعطاف‌پذیر و با تئوری برشی مراتب بالا بررسی کرده‌اند. در این مدل هسته علاوه بر تغییر شکل برشی، دارای تغییر شکل عرضی نیز می‌باشد. در این تئوری جابه‌جایی‌های دینامیکی هسته نسبت به تغییرات ضخامت با توابع مرتبه اول تعیین شده و در نهایت پس از حل معادلات حاکم بر تعادل، جابه‌جایی طولی و عرضی هسته نسبت به تغییرات ضخامت به ترتیب با تابعی مرتبه سه و دو تعیین می‌شوند. محققان بسیاری به تحلیل تیرهای ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر و تئوری‌های مراتب بالا با استفاده از روش اجزاء محدود پرداختند [۱۴-۱۰]. به هر حال مقایسه نتایج آزمایشگاهی با

در صنعت و مهندسی، کاربرد تیرهای ضخیم ساندویچی به عنوان اعضای با وزن کم و مقاومت بالا، گسترش یافته است. بنابراین تحلیل ارتعاشات آزاد این تیرها مورد توجه دانشمندان بسیاری قرار گرفته است [۸-۱]. از نخستین محققانی که به ارتعاشات آزاد تیرهای ساندویچی با تئوری کلاسیک پرداخته‌اند می‌توان به دی تاران^۱ [۱] و مید و مارکوس^۲ [۲] اشاره کرد. مید^۳ [۳] به ارزیابی و مقایسه مدل‌های متفاوتی که برای تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای ساندویچی سه لایه مورد استفاده قرار می‌گرفت، پرداخت. اساس این مدل‌ها در تغییر شکل اولر-برنولی رویه‌ها و تغییر شکل برشی هسته می‌باشد. این مدل در تحقیقات بسیاری مورد استفاده قرار گرفت. با ظهور کامپیوترهای دیجیتال، محققان بسیاری با این مدل به تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای ساندویچی با روش اجزاء محدود پرداختند [۵-۴]. در سال‌های اخیر دانشمندان با روش سفتی

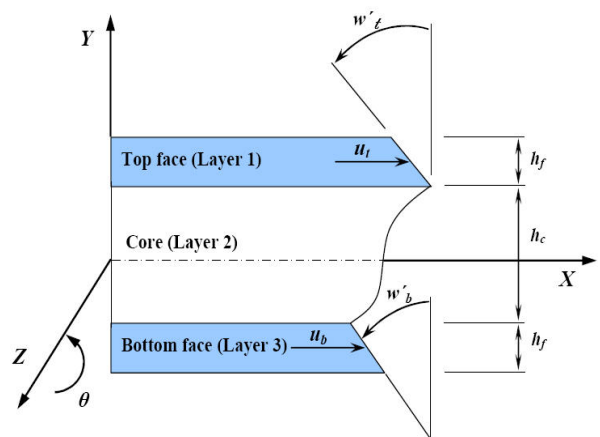
۱. دانشیار، kmalekzadeh@mut.ac.ir (نویسنده مخاطب)

تئوری های فوق، نشان دهنده برتری فرمولاسیون مراتب بالا می باشد.

در تحقیق حاضر جابه‌جایی‌های دینامیکی هسته خطی در نظر گرفته می‌شود، ولی جابه‌جایی‌های استاتیکی هسته از مراتب بالا می‌باشد. معادلات حاکم بر حرکت برای یک المان تیر ساندویچی متقارن با هسته نرم، با استفاده از اصل همیلتون به دست می‌آید. سپس فرم کلی جواب این معادلات به فرم پارامتری تعیین می‌شود. در انتها، پس از اعمال شرایط مرزی گره‌های ابتدا و انتهای، ماتریس سفتی دینامیکی تیر تعیین می‌شود. آن‌گاه با استفاده از الگوریتم مشهور ویتربیک-ویلیامز^{۱۷-۱۵} فرکانس‌های طبیعی تیر به دست می‌آیند. در مرجع [۱۸] خلیلی و همکارانش به تحلیل ارتعاشات آزاد تیر ساندویچی با وجود سیستم‌های متصل جرم و فنر پرداخته‌اند. در این مقاله تیر یک جسم سه لایه در نظر گرفته شده و از انعطاف‌پذیری عرضی در هسته میانی صرف نظر شده است. در تحقیق حاضر، ارتعاشات تیرهای ساندویچی ضخیم با هسته انعطاف‌پذیر با استفاده از تئوری مرتبه بالا و روش سفتی دینامیکی بررسی شده است.

تئوری و به دست آوردن معادلات

مقطع عرضی یک تیر ساندویچی، در شکل (۱) نشان داده شده است. برای تحلیل ارتعاشات آزاد این تیر، ابتدا معادلات حاکم بر حرکت تیر تعیین می‌شود.



شکل ۱. سیستم مختصات و علائم اختصاری برای یک تیر ساندویچی متقارن

برای تعیین معادلات حاکم بر حرکت تیر، فرضیات زیر در نظر گرفته می‌شود.

۱- تمام تغییرشکل‌ها و کرنش‌ها بسیار کوچک می‌باشند به طوری که می‌توان از تئوری الاستیسیته خطی استفاده کرد.

۲- جنس رویه‌ها و هسته تیر ساندویچی از مواد ایزوتروپیک و همگن می‌باشد و تغییرات کرنش بین آنها خطی است.

۳- از کرنش‌های نرمال عرضی در رویه‌ها صرف نظر شده است.

۴- لایه‌ها کاملاً به هم اتصال دارند.

در شکل (۱)، تغییرشکل مقطع عرضی برای یک المان تیر ساندویچی متقارن به طول l و پهنای b نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل (۱) نشان داده شده است، ضخامت هر یک از رویه‌ها برابر h_f و ضخامت هسته h_c می‌باشد. در سیستم مختصات نشان داده شده، X امتداد محور تیر و Y امتداد عرضی (به سمت بالا) و Z در امتداد ضخامت تیر (عمود بر صفحه به سمت خارج) می‌باشند. تمام جابه‌جایی‌های این تیر در صفحه XY می‌باشد. تغییرشکل رویه‌ها در امتداد عرضی و محوری مانند تیرهای اولر-برنولی در نظر گرفته می‌شوند و از تنش‌های نرمال محوری در هسته صرف نظر می‌شود. همچنین $u_t(x,t)$ ، $w_t(x,t)$ و $u_b(x,t)$ ، $w_b(x,t)$ جابه‌جایی عرضی و محوری لایه بالایی و $u_b(x,t)$ ، $w_b(x,t)$ جابه‌جایی عرضی و محوری لایه پایینی می‌باشند. میدان جابه‌جایی استاتیکی تیر به صورت رابطه (۱) در نظر گرفته می‌شود.

$$X_S : \begin{cases} T. \text{face} & u_t - yw'_t & -\frac{h_f}{2} \leq y \leq \frac{h_f}{2} \\ Core & u_c + \phi_1 y + \phi_2 y^2 + \phi_3 y^3 & -\frac{h_c}{2} \leq y \leq \frac{h_c}{2} \\ B. \text{face} & u_b - yw'_b & -\frac{h_f}{2} \leq y \leq \frac{h_f}{2} \end{cases} \quad (1-f)$$

$$Y_S : \begin{cases} T. \text{face} & w_b & -\frac{h_f}{2} \leq y \leq \frac{h_f}{2} \\ Core & w_c + \psi_1 y + \psi_2 y^2 & -\frac{h_c}{2} \leq y \leq \frac{h_c}{2} \\ B. \text{face} & w_b & -\frac{h_f}{2} \leq y \leq \frac{h_f}{2} \end{cases} \quad (1-b)$$

$$Z(\text{for all layer}): 0 \quad (1-c)$$

با توجه به عدم وجود هرگونه لغزش بین لایه‌ها، می‌توان شرایط سازگاری تغییرشکل‌های مقطع عرضی تیر را به صورت رابطه (۲) تعریف کرد.

$$\begin{cases} X^{Core}(y = \frac{h_c}{2}) = X^{Top \text{ face}}(y = \frac{-h_f}{2}) \\ X^{Core}(y = \frac{-h_c}{2}) = X^{Bottom \text{ face}}(y = \frac{h_f}{2}) \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} Y^{Core}(y = \frac{h_c}{2}) = Y^{Top \text{ face}}(y = \frac{-h_f}{2}) \\ Y^{Core}(y = \frac{-h_c}{2}) = Y^{Bottom \text{ face}}(y = \frac{h_f}{2}) \end{cases}$$

با استفاده از شرایط سازگاری تغییرشکل‌ها، میدان جابه‌جایی

استاتیکی تیر به صورت رابطه (۳) تعیین می‌شود.

$$Y_D : \begin{cases} T. face & w_t & -\frac{h_f}{2} \leq y \leq \frac{h_f}{2} \\ Core & \psi_0 + \psi_1 y & -\frac{h_c}{2} \leq y \leq \frac{h_c}{2} \\ B. face & w_b & -\frac{h_f}{2} \leq y \leq \frac{h_f}{2} \end{cases} \quad (ب-۷)$$

Z (for all layer): 0 (ج-۷)
با استفاده از شرایط سازگاری تغییر شکل‌ها، میدان جابه‌جایی

دینامیکی تیر به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$X_D : \begin{cases} T. face & u_t - yw'_t & -\frac{h_f}{2} \leq y \leq \frac{h_f}{2} \\ & (u_t + u_b + \frac{h_f}{2} w'_t) & \\ Core & -\frac{h_f}{2} w'_b \frac{1}{2} & -\frac{h_c}{2} \leq y \leq \frac{h_c}{2} \\ & + (u_t - u_b + \frac{h_f}{2} w'_t) & \\ & + \frac{h_f}{2} w'_b \frac{y}{h_c} & \\ B. face & u_b - yw'_b & -\frac{h_f}{2} \leq y \leq \frac{h_f}{2} \end{cases} \quad (الف-۸)$$

$$Y_D : \begin{cases} T. face & w_t & -\frac{h_f}{2} \leq y \leq \frac{h_f}{2} \\ Core & (w_t + w_b) \frac{1}{2} + (w_t - w_b) \frac{y}{h_c} & -\frac{h_c}{2} \leq y \leq \frac{h_c}{2} \\ B. face & w_b & -\frac{h_f}{2} \leq y \leq \frac{h_f}{2} \end{cases} \quad (ب-۸)$$

انرژی جنبشی این تیر ساندویچی نیز به صورت زیر می‌باشد.

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \int_{V_t} \rho_f (\dot{X}_D^2 + \dot{Y}_D^2) dV_t + \int_{V_c} \rho_c (\dot{X}_D^2 + \dot{Y}_D^2) dV_c + \int_{V_b} \rho_f (\dot{X}_D^2 + \dot{Y}_D^2) dV_b \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \int_{V_t} \rho_f [(\dot{u}_t - y\dot{w}'_t)^2 + \dot{w}_t^2] dV_t + \int_{V_b} \rho_f [(\dot{u}_b - y\dot{w}'_b)^2 + \dot{w}_b^2] dV_b + \int_{V_c} \rho_c \left[\frac{1}{2} (u_t + u_b + \frac{h_f}{2} w'_t - \frac{h_f}{2} w'_b)^2 + (u_t - u_b + \frac{h_f}{2} w'_t + \frac{h_f}{2} w'_b) \frac{y}{h_c} \right]^2 + [(w_t + w_b) \frac{1}{2} + (w_t - w_b) \frac{y}{h_c}]^2 \right\} dV_c \quad (۹)$$

در رابطه بالا، ρ_f چگالی هر یک از رویه‌ها و ρ_c چگالی هسته می‌باشد. با محاسبه انتگرال‌های رابطه (۹)، انرژی جنبشی این المان تیر ساندویچی نیز به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \int_{A_t} \rho_f [(\dot{u}_t - y\dot{w}'_t)^2 + \dot{w}_t^2] dA_t + \int_{A_b} \rho_f [(\dot{u}_b - y\dot{w}'_b)^2 + \dot{w}_b^2] dA_b + \int_{A_c} \rho_c \left[(u_t + u_b + \frac{h_f}{2} w'_t - \frac{h_f}{2} w'_b) \frac{1}{2} + (u_t - u_b + \frac{h_f}{2} w'_t + \frac{h_f}{2} w'_b) \frac{y}{h_c} \right]^2 + [(w_t + w_b) \frac{1}{2} + (w_t - w_b) \frac{y}{h_c}]^2 \right\} dA_c dx \quad (۱۰)$$

$$(m_f) = \rho_f A_f, \quad (m_c) = \rho_c A_c \quad (۱۱)$$

$$X_S : \begin{cases} T. face & u_t - yw'_t & -\frac{h_f}{2} \leq y \leq \frac{h_f}{2} \\ & u_c + \phi_1 y & \\ & + (u_t + u_b + \frac{h_f}{2} w'_t) & \\ Core & -\frac{h_f}{2} w'_b - 2u_c & -\frac{h_c}{2} \leq y \leq \frac{h_c}{2} \\ & + (u_t - u_b + \frac{h_f}{2} w'_t) & \\ & + \frac{h_f}{2} w'_b - h_c \phi_1 & \frac{4y^3}{h_c^3} & \\ B. face & u_b - yw'_b & -\frac{h_f}{2} \leq y \leq \frac{h_f}{2} \end{cases} \quad (الف-۳)$$

$$Y_S : \begin{cases} T. face & w_t & -\frac{h_f}{2} \leq y \leq \frac{h_f}{2} \\ Core & w_c + (w_t - w_b) \frac{y}{h_c} & -\frac{h_c}{2} \leq y \leq \frac{h_c}{2} \\ & + (w_t + w_b - 2w_c) \frac{2y^2}{h_c^2} & \\ B. face & w_b & -\frac{h_f}{2} \leq y \leq \frac{h_f}{2} \end{cases} \quad (ب-۳)$$

با توجه به فرضیات ارائه شده، انرژی کرنشی تیر ساندویچی به صورت رابطه (۴) است.

$$U = \frac{1}{2} \left\{ \int_{V_t} \sigma_x \varepsilon_x dV_t + \int_{V_c} (\sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV_c + \int_{V_b} \sigma_x \varepsilon_x dV_b \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \int_{V_t} E_f \varepsilon_x^2 dV_t + \int_{V_c} (E_c \varepsilon_y^2 + G_c \gamma_{xy}^2) dV_c + \int_{V_b} E_f \varepsilon_x^2 dV_b \right\} \quad (۴)$$

در رابطه فوق E_c, E_f به ترتیب مدول یانگ هر یک از رویه‌ها و هسته G_c مدول برشی هسته می‌باشد. با جایگذاری مقادیر کرنش و محاسبه انتگرال‌های رابطه (۴)، انرژی کرنشی برای یک المان تیر به صورت رابطه (۵) تعیین می‌شود.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \int_{A_t} E_f (u'_t - yw''_t)^2 dA_t + \int_{A_b} E_f (u'_b - yw''_b)^2 dA_b + \int_{A_c} E_c \left[(w_t - w_b) \frac{1}{h_c} + (w_t + w_b - 2w_c) \frac{4y}{h_c^2} \right]^2 dA_c + \int_{A_c} G_c (\phi_1 + w'_c)^2 + (u_t + u_b + \frac{2h_f + h_c}{4} w'_t - \frac{2h_f + h_c}{4} w'_b - 2u_c) \frac{4y}{h_c^2} + (u_t - u_b + \frac{3h_f + h_c}{6} w'_t + \frac{3h_f + h_c}{6} w'_b - h_c \phi_1 - \frac{h_c}{3} w'_c) \frac{12y^2}{h_c^3} \right]^2 dA_c \right\} dx \quad (۵)$$

$$(A_f, 0, I_f) = \int_{A_t, b} (1, y, y^2) dA_{t, b} ; \quad (A_c) = \int_{A_c} dA_c \quad (۶)$$

برای تعیین انرژی جنبشی، ابتدا باید میدان جابه‌جایی دینامیکی

تیر ساندویچی تعیین شود.

$$X_D : \begin{cases} T. face & u_t - yw'_t & -\frac{h_f}{2} \leq y \leq \frac{h_f}{2} \\ Core & \phi_0 + \phi_1 y & -\frac{h_c}{2} \leq y \leq \frac{h_c}{2} \\ B. face & u_b - yw'_b & -\frac{h_f}{2} \leq y \leq \frac{h_f}{2} \end{cases} \quad (الف-۷)$$

با استفاده از اصل همیلتون، معادلات حاکم بر حرکت و شرایط مرزی این المان تیر ساندویچی به دست می آید.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T-U) dt = 0 \quad (12)$$

در رابطه فوق، δ اپراتور تغییراتی می باشد و t_1, t_2 دو فاصله زمانی مشخص می باشند. با جایگذاری روابط (5) و (10) در رابطه (12) نتیجه می شود:

$$u_c = \frac{1}{2} \left[u_t + u_b + \frac{2h_f + h_c}{4} w'_t - \frac{2h_f + h_c}{4} w'_b \right] \quad (13)$$

$$\phi_l = \frac{1}{h_c} \left[u_t - u_b + \frac{3h_f + h_c}{6} w'_t + \frac{3h_f + h_c}{6} w'_b - \frac{h_c}{3} w'_c \right] \quad (14)$$

$$G_c h_c \left[u'_t - u'_b + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_t + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_b + \frac{2h_c}{3} w''_c \right] - 4E_c [2w_c - w_t - w_b] = 0 \quad (15)$$

$$-\frac{G_c A_c}{h_c^2} \left[u_t - u_b + \frac{3h_f + h_c}{6} w'_t + \frac{3h_f + h_c}{6} w'_b + \frac{2h_c}{3} w'_c \right] + E_f A_f u'' - \frac{3m_f + m_c}{3} \ddot{u}_t - \frac{m_c}{6} \ddot{u}_b - \frac{m_c h_f}{6} \ddot{w}'_t + \frac{m_c h_f}{12} \ddot{w}'_b = 0 \quad (16)$$

$$-\frac{G_c A_c}{h_c^2} \left[u_t - u_b + \frac{3h_f + h_c}{6} w'_t + \frac{3h_f + h_c}{6} w'_b + \frac{2h_c}{3} w'_c \right] + E_f A_f u'' - \frac{3m_f + m_c}{3} \ddot{u}_b - \frac{m_c}{6} \ddot{u}_t - \frac{m_c h_f}{6} \ddot{w}'_b + \frac{m_c h_f}{12} \ddot{w}'_t = 0 \quad (17)$$

$$E_f I_f w''_t + \frac{E_c A_c}{3h_c^2} [7w_t + w_b - 8w_c] - \frac{G_c A_c (3h_f + h_c)}{6h_c^2} \left[u'_t - u'_b + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_t + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_b + \frac{2h_c}{3} w''_c \right] + \frac{3m_f + m_c}{3} \ddot{w}_t - \frac{m_c h_f^2}{12} \ddot{w}''_t - \frac{m_c h_f}{6} \ddot{u}'_t - \frac{m_c h_f}{12} \ddot{u}'_b + \frac{m_c}{6} \ddot{w}_b + \frac{m_c h_f^2}{24} \ddot{w}''_b = 0 \quad (18)$$

$$E_f I_f w''_b + \frac{E_c A_c}{3h_c^2} [7w_b + w_t - 8w_c] - \frac{G_c A_c (3h_f + h_c)}{6h_c^2} \left[u'_t - u'_b + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_t + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_b + \frac{2h_c}{3} w''_c \right] + \frac{3m_f + m_c}{3} \ddot{w}_b - \frac{m_c h_f^2}{12} \ddot{w}''_b - \frac{m_c h_f}{6} \ddot{u}'_b - \frac{m_c h_f}{12} \ddot{u}'_t + \frac{m_c}{6} \ddot{w}_t + \frac{m_c h_f^2}{24} \ddot{w}''_t = 0 \quad (19)$$

$$E_f I_f w''_c + \frac{E_c A_c}{3h_c^2} [7w_c + w_t - 8w_b] - \frac{G_c A_c (3h_f + h_c)}{6h_c^2} \left[u'_t - u'_b + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_t + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_b + \frac{2h_c}{3} w''_c \right] + \frac{3m_f + m_c}{3} \ddot{w}_c - \frac{m_c h_f^2}{12} \ddot{w}''_c - \frac{m_c h_f}{6} \ddot{u}'_c - \frac{m_c h_f}{12} \ddot{u}'_b + \frac{m_c}{6} \ddot{w}_b + \frac{m_c h_f^2}{24} \ddot{w}''_b = 0 \quad (20)$$

$$E_f I_f w''_t + \frac{E_c A_c}{3h_c^2} [7w_t + w_b - 8w_c] - \frac{G_c A_c (3h_f + h_c)}{6h_c^2} \left[u'_t - u'_b + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_t + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_b + \frac{2h_c}{3} w''_c \right] + \frac{3m_f + m_c}{3} \ddot{w}_t - \frac{m_c h_f^2}{12} \ddot{w}''_t - \frac{m_c h_f}{6} \ddot{u}'_t - \frac{m_c h_f}{12} \ddot{u}'_b + \frac{m_c}{6} \ddot{w}_b + \frac{m_c h_f^2}{24} \ddot{w}''_b = 0 \quad (21)$$

$$E_f I_f w''_b + \frac{E_c A_c}{3h_c^2} [7w_b + w_t - 8w_c] - \frac{G_c A_c (3h_f + h_c)}{6h_c^2} \left[u'_t - u'_b + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_t + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_b + \frac{2h_c}{3} w''_c \right] + \frac{3m_f + m_c}{3} \ddot{w}_b - \frac{m_c h_f^2}{12} \ddot{w}''_b - \frac{m_c h_f}{6} \ddot{u}'_b - \frac{m_c h_f}{12} \ddot{u}'_t + \frac{m_c}{6} \ddot{w}_t + \frac{m_c h_f^2}{24} \ddot{w}''_t = 0 \quad (22)$$

$$E_f I_f w''_c + \frac{E_c A_c}{3h_c^2} [7w_c + w_t - 8w_b] - \frac{G_c A_c (3h_f + h_c)}{6h_c^2} \left[u'_t - u'_b + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_t + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_b + \frac{2h_c}{3} w''_c \right] + \frac{3m_f + m_c}{3} \ddot{w}_c - \frac{m_c h_f^2}{12} \ddot{w}''_c - \frac{m_c h_f}{6} \ddot{u}'_c - \frac{m_c h_f}{12} \ddot{u}'_b + \frac{m_c}{6} \ddot{w}_b + \frac{m_c h_f^2}{24} \ddot{w}''_b = 0 \quad (23)$$

$$E_f I_f w''_t + \frac{E_c A_c}{3h_c^2} [7w_t + w_b - 8w_c] - \frac{G_c A_c (3h_f + h_c)}{6h_c^2} \left[u'_t - u'_b + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_t + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_b + \frac{2h_c}{3} w''_c \right] + \frac{3m_f + m_c}{3} \ddot{w}_t - \frac{m_c h_f^2}{12} \ddot{w}''_t - \frac{m_c h_f}{6} \ddot{u}'_t - \frac{m_c h_f}{12} \ddot{u}'_b + \frac{m_c}{6} \ddot{w}_b + \frac{m_c h_f^2}{24} \ddot{w}''_b = 0 \quad (24)$$

$$E_f I_f w''_b + \frac{E_c A_c}{3h_c^2} [7w_b + w_t - 8w_c] - \frac{G_c A_c (3h_f + h_c)}{6h_c^2} \left[u'_t - u'_b + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_t + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_b + \frac{2h_c}{3} w''_c \right] + \frac{3m_f + m_c}{3} \ddot{w}_b - \frac{m_c h_f^2}{12} \ddot{w}''_b - \frac{m_c h_f}{6} \ddot{u}'_b - \frac{m_c h_f}{12} \ddot{u}'_t + \frac{m_c}{6} \ddot{w}_t + \frac{m_c h_f^2}{24} \ddot{w}''_t = 0 \quad (25)$$

$$E_f I_f w''_c + \frac{E_c A_c}{3h_c^2} [7w_c + w_t - 8w_b] - \frac{G_c A_c (3h_f + h_c)}{6h_c^2} \left[u'_t - u'_b + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_t + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_b + \frac{2h_c}{3} w''_c \right] + \frac{3m_f + m_c}{3} \ddot{w}_c - \frac{m_c h_f^2}{12} \ddot{w}''_c - \frac{m_c h_f}{6} \ddot{u}'_c - \frac{m_c h_f}{12} \ddot{u}'_b + \frac{m_c}{6} \ddot{w}_b + \frac{m_c h_f^2}{24} \ddot{w}''_b = 0 \quad (26)$$

$$E_f I_f w''_t + \frac{E_c A_c}{3h_c^2} [7w_t + w_b - 8w_c] - \frac{G_c A_c (3h_f + h_c)}{6h_c^2} \left[u'_t - u'_b + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_t + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_b + \frac{2h_c}{3} w''_c \right] + \frac{3m_f + m_c}{3} \ddot{w}_t - \frac{m_c h_f^2}{12} \ddot{w}''_t - \frac{m_c h_f}{6} \ddot{u}'_t - \frac{m_c h_f}{12} \ddot{u}'_b + \frac{m_c}{6} \ddot{w}_b + \frac{m_c h_f^2}{24} \ddot{w}''_b = 0 \quad (27)$$

$$E_f I_f w''_b + \frac{E_c A_c}{3h_c^2} [7w_b + w_t - 8w_c] - \frac{G_c A_c (3h_f + h_c)}{6h_c^2} \left[u'_t - u'_b + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_t + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_b + \frac{2h_c}{3} w''_c \right] + \frac{3m_f + m_c}{3} \ddot{w}_b - \frac{m_c h_f^2}{12} \ddot{w}''_b - \frac{m_c h_f}{6} \ddot{u}'_b - \frac{m_c h_f}{12} \ddot{u}'_t + \frac{m_c}{6} \ddot{w}_t + \frac{m_c h_f^2}{24} \ddot{w}''_t = 0 \quad (28)$$

$$E_f I_f w''_c + \frac{E_c A_c}{3h_c^2} [7w_c + w_t - 8w_b] - \frac{G_c A_c (3h_f + h_c)}{6h_c^2} \left[u'_t - u'_b + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_t + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_b + \frac{2h_c}{3} w''_c \right] + \frac{3m_f + m_c}{3} \ddot{w}_c - \frac{m_c h_f^2}{12} \ddot{w}''_c - \frac{m_c h_f}{6} \ddot{u}'_c - \frac{m_c h_f}{12} \ddot{u}'_b + \frac{m_c}{6} \ddot{w}_b + \frac{m_c h_f^2}{24} \ddot{w}''_b = 0 \quad (29)$$

$$E_f I_f w''_t + \frac{E_c A_c}{3h_c^2} [7w_t + w_b - 8w_c] - \frac{G_c A_c (3h_f + h_c)}{6h_c^2} \left[u'_t - u'_b + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_t + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_b + \frac{2h_c}{3} w''_c \right] + \frac{3m_f + m_c}{3} \ddot{w}_t - \frac{m_c h_f^2}{12} \ddot{w}''_t - \frac{m_c h_f}{6} \ddot{u}'_t - \frac{m_c h_f}{12} \ddot{u}'_b + \frac{m_c}{6} \ddot{w}_b + \frac{m_c h_f^2}{24} \ddot{w}''_b = 0 \quad (30)$$

$$E_f I_f w''_b + \frac{E_c A_c}{3h_c^2} [7w_b + w_t - 8w_c] - \frac{G_c A_c (3h_f + h_c)}{6h_c^2} \left[u'_t - u'_b + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_t + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_b + \frac{2h_c}{3} w''_c \right] + \frac{3m_f + m_c}{3} \ddot{w}_b - \frac{m_c h_f^2}{12} \ddot{w}''_b - \frac{m_c h_f}{6} \ddot{u}'_b - \frac{m_c h_f}{12} \ddot{u}'_t + \frac{m_c}{6} \ddot{w}_t + \frac{m_c h_f^2}{24} \ddot{w}''_t = 0 \quad (31)$$

$$E_f I_f w''_c + \frac{E_c A_c}{3h_c^2} [7w_c + w_t - 8w_b] - \frac{G_c A_c (3h_f + h_c)}{6h_c^2} \left[u'_t - u'_b + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_t + \frac{3h_f + h_c}{6} w''_b + \frac{2h_c}{3} w''_c \right] + \frac{3m_f + m_c}{3} \ddot{w}_c - \frac{m_c h_f^2}{12} \ddot{w}''_c - \frac{m_c h_f}{6} \ddot{u}'_c - \frac{m_c h_f}{12} \ddot{u}'_b + \frac{m_c}{6} \ddot{w}_b + \frac{m_c h_f^2}{24} \ddot{w}''_b = 0 \quad (32)$$

$$V_t = E_f I_f w''_t - \frac{G_c A_c (3h_f + h_c)}{6h_c^2} \left[u_t - u_b + \frac{3h_f + h_c}{6} w'_t + \frac{3h_f + h_c}{6} w'_b + \frac{2h_c}{3} w'_c \right] \quad (21)$$

$$M_t = -E_f I_f w''_t \quad (22)$$

$$V_c = -\frac{2G_c A_c}{3h_c} \left[u_t - u_b + \frac{3h_f + h_c}{6} w'_t + \frac{3h_f + h_c}{6} w'_b + \frac{2h_c}{3} w'_c \right] \quad (23)$$

$$P_b = -E_f A_f u'_b \quad (24)$$

$$V_b = E_f I_f w''_b - \frac{G_c A_c (3h_f + h_c)}{6h_c^2} \left[u_t - u_b + \frac{3h_f + h_c}{6} w'_t + \frac{3h_f + h_c}{6} w'_b + \frac{2h_c}{3} w'_c \right] \quad (25)$$

$$M_b = -E_f I_f w''_b \quad (26)$$

سپس شرایط مرزی به صورت زیر به دست می آید.

$$\begin{cases} \delta u_t(0,t) = 0 & \text{or } P_t(0,t) = 0 \\ \delta w_t(0,t) = 0 & \text{or } V_t(0,t) = 0 \\ \delta w'_t(0,t) = 0 & \text{or } M_t(0,t) = 0 \\ \delta w_c(0,t) = 0 & \text{or } V_c(0,t) = 0 \\ \delta u_b(0,t) = 0 & \text{or } P_b(0,t) = 0 \\ \delta w_b(0,t) = 0 & \text{or } V_b(0,t) = 0 \\ \delta w'_b(0,t) = 0 & \text{or } M_b(0,t) = 0 \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} \delta u_t(l,t) = 0 & \text{or } P_t(l,t) = 0 \\ \delta w_t(l,t) = 0 & \text{or } V_t(l,t) = 0 \\ \delta w'_t(l,t) = 0 & \text{or } M_t(l,t) = 0 \\ \delta w_c(l,t) = 0 & \text{or } V_c(l,t) = 0 \\ \delta u_b(l,t) = 0 & \text{or } P_b(l,t) = 0 \\ \delta w_b(l,t) = 0 & \text{or } V_b(l,t) = 0 \\ \delta w'_b(l,t) = 0 & \text{or } M_b(l,t) = 0 \end{cases} \quad (28)$$

حل معادلات حاکم بر حرکت برای ارتعاشات آزاد

زمانی که المان تیر ساندویچی در حال ارتعاشات آزاد است، جابه جایی آن به صورت زیر می باشد:

$$u_{t,b}(x,t) = \bar{u}_{t,b}(x) e^{i\omega t}; \quad w_{t,c,b}(x,t) = \bar{w}_{t,c,b}(x) e^{i\omega t} \quad (29)$$

در رابطه (29)، $\bar{w}_{t,c,b}, \bar{u}_{t,b}$ به ترتیب دامنه تغییرات

توابع $w_{t,c,b}, u_{t,b}$ می باشند و ω فرکانس طبیعی تیر است. برای

بی بعدسازی و جداسازی معادلات فوق از تغییر متغیر مستقل و

وابسته روابط (30-الف، ب و ج)، استفاده می شود.

$$\eta = \frac{x}{l} \quad (30-الف)$$

$$u = \bar{u}_t + \bar{u}_b; \quad w = \bar{w}_t - \bar{w}_b \quad (30-ب)$$

$$\bar{u} = \bar{u}_t - \bar{u}_b; \quad \bar{w} = \bar{w}_t + \bar{w}_b \quad (30-ج)$$

با جایگذاری روابط (29) و (30) در روابط (19-15)، نتیجه

می شود.

$$B_j = \alpha_j A_j, \quad \alpha_j = \frac{2\lambda_j^2 + 2b_f^2 + b_c^2}{-b_c^2 r \lambda_j} \quad (42)$$

با جایگذاری رابطه (42) در رابطه (41)، نتیجه می شود.

$$u(\eta) = \sum_{j=1}^6 A_j e^{\lambda_j \eta}, \quad w(\eta) = \sum_{j=1}^6 \alpha_j A_j e^{\lambda_j \eta} \quad (43)$$

همچنین روابط (33) تا (35)، نیز یک دستگاه معادلات دیفرانسیل همگن با ضرایب ثابت می باشد، که با حل این دستگاه معادلات، معادله ای به فرم رابطه (45) به دست می آید.

$$\begin{bmatrix} 18D^2 + 3(6b_f^2 + b_c^2 - 12a^2) & 3(b_c^2 r - 4a^2 c)D \\ 3(b_c^2 r - 4a^2 c)D & \begin{pmatrix} 6r^2 D^4 + (3b_c^2 r^2 - 4a^2 c^2)D^2 \\ -3(6b_f^2 + 3b_c^2 - 16s^2) \end{pmatrix} \\ -48a^2(c-3r)D & -16a^2 c(c-3r)D^2 - 96s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \\ \bar{w}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (44)$$

$$(\bar{c}_8 D^8 + \bar{c}_6 D^6 + \bar{c}_4 D^4 + \bar{c}_2 D^2 + \bar{c}_0) \Phi = 0 \quad (45)$$

Φ می تواند یکی از توابع \bar{u} ، \bar{w} یا \bar{w}_c باشد. در رابطه (45)

مقادیر $\bar{c}_0, \bar{c}_2, \bar{c}_4, \bar{c}_6, \bar{c}_8$ به صورت زیر تعیین می شوند:

$$\begin{aligned} \bar{c}_8 &= 108r^2 k_7 \\ \bar{c}_6 &= 6r^2 [k_1 k_7 - k_3^2 + 3456s^2] - 18[k_6^2 + k_4 k_7] \\ \bar{c}_4 &= 1152s^2 [k_1 r^2 + 3k_6 - 3k_4] \\ &\quad - k_7 [18k_5 + k_1 k_4 + k_2^2] + k_3 [k_3 k_4 + 2k_2 k_6] - k_1 k_6^2 \\ \bar{c}_2 &= 192s^2 [k_1 (k_6 - k_4) - k_2 (k_2 + k_3) - 864s^2 - 18k_5] \\ &\quad + k_5 [k_3^2 - k_1 k_7] \\ \bar{c}_0 &= -192s^2 k_1 [k_5 + 48s^2] \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= 18b_f^2 + 3b_c^2 - 36a^2 & k_2 &= 3b_c^2 r - 12a^2 c \\ k_4 &= 4a^2 c^2 - 3b_c^2 r^2 & k_5 &= 18b_f^2 + 9b_c^2 - 48s^2 \\ k_6 &= -16a^2 c(c-3r) & k_7 &= -64a^2 (c-3r)^2 \\ k_3 &= -48a^2 (c-3r) \end{aligned} \quad (47)$$

جواب معادله (45) می تواند به فرم $e^{\lambda \eta}$ باشد، که پس از جایگذاری در رابطه (45)، معادله مشخصه به دست می آید.

$$\bar{c}_8 \bar{\lambda}^8 + \bar{c}_6 \bar{\lambda}^6 + \bar{c}_4 \bar{\lambda}^4 + \bar{c}_2 \bar{\lambda}^2 + \bar{c}_0 = 0 \quad (48)$$

معادله مشخصه از مرتبه هشت است، پس دارای هشت جواب می باشد. حال می توان توابع \bar{u} ، \bar{w} و \bar{w}_c را به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\bar{u} = \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j e^{\bar{\lambda}_j \eta}; \quad \bar{w} = \sum_{j=1}^8 \bar{B}_j e^{\bar{\lambda}_j \eta}; \quad \bar{w}_c = \sum_{j=1}^8 \bar{C}_j e^{\bar{\lambda}_j \eta} \quad (49)$$

با جایگذاری رابطه (49) در روابط (33) و (34) نتیجه می شود.

$$\bar{B}_j = \bar{\alpha}_j \bar{A}_j \quad (50-الف)$$

$$\bar{\alpha}_j = \frac{\bar{\lambda}_j^4 (18k_7) + \bar{\lambda}_j^2 (3456s^2 + k_1 k_7 - k_3^2) + 192k_1 s^2}{\bar{\lambda}_j^3 (k_3 k_6 - k_2 k_7) - \bar{\lambda}_j (96s^2) (k_3 + 2k_2)}$$

$$\bar{C}_j = \bar{\beta}_j \bar{A}_j, \quad \bar{\beta}_j = \frac{\bar{\lambda}_j^2 (18) + \bar{\lambda}_j \bar{\alpha}_j (k_2) + k_1}{-\bar{\lambda}_j (k_3)} \quad (50-ب)$$

با جایگذاری روابط (50) در رابطه (49) نتیجه می شود.

$$\left[D^2 + \frac{2b_f^2 + b_c^2}{2} \right] u + \left[\frac{b_c^2 r}{2} D \right] w = 0 \quad (31)$$

$$\left[\frac{b_c^2 r}{2} D \right] w + \left[\frac{r^2}{3} D^4 + \frac{b_c^2 r^2}{2} D^2 - \frac{6b_f^2 + b_c^2 - 12s^2}{6} \right] w = 0 \quad (32)$$

$$\left[D^2 + \frac{6b_f^2 + b_c^2 - 12a^2}{6} \right] \bar{u} + \left[\frac{b_c^2 r - 4a^2 c}{6} D \right] \bar{w} + \left[\frac{-8a^2 (c-3r)}{3} D \right] \bar{w}_c = 0 \quad (33)$$

$$\left[\frac{b_c^2 r - 4a^2 c}{6} D \right] \bar{u} + \left[\frac{r^2}{3} D^4 + \frac{3b_c^2 r^2 - 4a^2 c^2}{18} D^2 - \frac{6b_f^2 + 3b_c^2 - 16s^2}{6} \right] \bar{w} + \left[\frac{-8a^2 c(c-3r)}{9} D^2 - \frac{16s^2}{3} \right] \bar{w}_c = 0 \quad (34)$$

$$\left[\frac{-8a^2 (c-3r)}{3} D \right] \bar{u} + \left[\frac{-8a^2 c(c-3r)}{9} D^2 - \frac{16s^2}{3} \right] \bar{w} + \left[\frac{-32a^2 (c-3r)^2}{9} D^2 + \frac{32s^2}{3} \right] \bar{w}_c = 0 \quad (35)$$

$$\left[\frac{-8a^2 (c-3r)}{3} D \right] \bar{u} + \left[\frac{-8a^2 c(c-3r)}{9} D^2 - \frac{16s^2}{3} \right] \bar{w} + \left[\frac{-32a^2 (c-3r)^2}{9} D^2 + \frac{32s^2}{3} \right] \bar{w}_c = 0 \quad (35)$$

در روابط فوق $D = d/d\eta$ است و مقادیر b_f^2, b_c^2, c, r

به صورت رابطه (36) تعیین می شوند:

$$a^2 = \frac{A_c G_c l^2}{E_f A_f h_c^2}; \quad s^2 = \frac{A_c E_c l^2}{E_f A_f h_c^2}; \quad b_f^2 = \frac{m_f \omega^2 l^2}{E_f A_f} \quad (36)$$

$$b_c^2 = \frac{m_c \omega^2 l^2}{E_f A_f}; \quad c = \frac{3h_f + h_c}{2l}; \quad r = \frac{h_f}{2l}$$

روابط (31) و (32) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل همگن با

ضرایب ثابت می باشد، که با حل این دستگاه معادلات، معادله ای به

شکل رابطه (38) به دست می آید.

$$\begin{bmatrix} 6D^2 + 6b_f^2 + 3b_c^2 & (3b_c^2 r)D \\ (3b_c^2 r)D & \begin{pmatrix} 2r^2 D^4 + 3b_c^2 r^2 D^2 \\ -(6b_f^2 + b_c^2 - 12s^2) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (37)$$

$$(c_6 D^6 + c_4 D^4 + c_2 D^2 + c_0) \Phi = 0 \quad (38)$$

Φ می تواند یکی از توابع u یا w باشد. در رابطه (48) مقادیر

c_0, c_2, c_4, c_6 به صورت زیر تعیین می شوند.

$$\begin{aligned} c_6 &= 4r^2 \\ c_4 &= 4r^2 [b_f^2 + 2b_c^2] \\ c_2 &= 24s^2 + 6b_f^2 [b_c^2 r^2 - 2] - 2b_c^2 \\ c_0 &= 4b_f^2 [6s^2 - 3b_f^2 - 2b_c^2] + b_c^2 [12s^2 - b_c^2] \end{aligned} \quad (39)$$

جواب معادله (38) می تواند به فرم $e^{\lambda \eta}$ باشد، که پس از

جایگذاری در رابطه (38)، معادله مشخصه به دست می آید.

$$c_6 \lambda^6 + c_4 \lambda^4 + c_2 \lambda^2 + c_0 = 0 \quad (40)$$

معادله مشخصه از مرتبه شش است، پس دارای شش جواب

می باشد. حال می توان توابع u, w را به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$u = \sum_{j=1}^6 A_j e^{\lambda_j \eta}; \quad w = \sum_{j=1}^6 B_j e^{\lambda_j \eta} \quad (41)$$

با جایگذاری رابطه (41) در رابطه (31) نتیجه می شود.

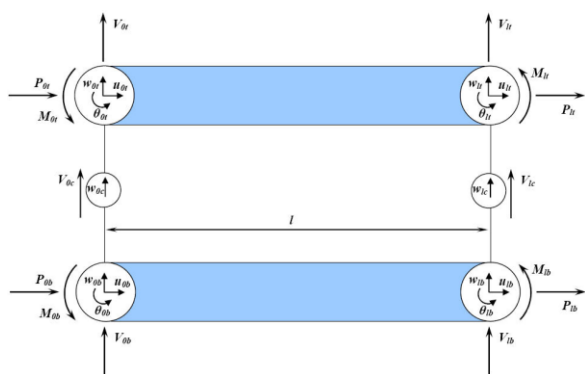
$$\eta = 0: \begin{cases} u_{0r} = \bar{u}_r(1) = \sum_{j=1}^6 A_j + \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \\ w_{0r} = \bar{w}_r(1) = \sum_{j=1}^6 A_j \alpha_j + \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\alpha}_j \\ \theta_{0r} = \bar{\theta}_r(1) = \sum_{j=1}^6 A_j l^{-1} \lambda_j \alpha_j + \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j l^{-1} \bar{\lambda}_j \bar{\alpha}_j \\ w_{0c} = \bar{w}_c(1) = \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\beta}_j \\ u_{0b} = \bar{u}_b(1) = \sum_{j=1}^6 A_j - \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \\ w_{0b} = \bar{w}_b(1) = -\sum_{j=1}^6 A_j \alpha_j + \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\alpha}_j \\ \theta_{0b} = \bar{\theta}_b(1) = -\sum_{j=1}^6 A_j l^{-1} \lambda_j \alpha_j + \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j l^{-1} \bar{\lambda}_j \bar{\alpha}_j \end{cases} \quad (55-f)$$

$$\eta = l: \begin{cases} u_{lr} = \bar{u}_r(1) = \sum_{j=1}^6 A_j e^{\lambda_j} + \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j e^{\bar{\lambda}_j} \\ w_{lr} = \bar{w}_r(1) = \sum_{j=1}^6 A_j \alpha_j e^{\lambda_j} + \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\alpha}_j e^{\bar{\lambda}_j} \\ \theta_{lr} = \bar{\theta}_r(1) = \sum_{j=1}^6 A_j l^{-1} \lambda_j \alpha_j e^{\lambda_j} + \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j l^{-1} \bar{\lambda}_j \bar{\alpha}_j e^{\bar{\lambda}_j} \\ w_{lc} = \bar{w}_c(1) = \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\beta}_j e^{\bar{\lambda}_j} \\ u_{lb} = \bar{u}_b(1) = \sum_{j=1}^6 A_j e^{\lambda_j} - \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j e^{\bar{\lambda}_j} \\ w_{lb} = \bar{w}_b(1) = -\sum_{j=1}^6 A_j \alpha_j e^{\lambda_j} + \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\alpha}_j e^{\bar{\lambda}_j} \\ \theta_{lb} = \bar{\theta}_b(1) = -\sum_{j=1}^6 A_j l^{-1} \lambda_j \alpha_j e^{\lambda_j} + \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j l^{-1} \bar{\lambda}_j \bar{\alpha}_j e^{\bar{\lambda}_j} \end{cases} \quad (55-b)$$

اگر بردارهای جابه‌جایی \mathbf{u}_e و ثوابت المانی \mathbf{a}_e به صورت زیر تعریف شوند:

$$\mathbf{u}_e = \{u_{0r} \quad w_{0r} \quad \theta_{0r} \quad u_{0b} \quad w_{0b} \quad \theta_{0b} \quad w_{0c} \quad u_{lr} \quad w_{lr} \quad \theta_{lr} \quad u_{lb} \quad w_{lb} \quad \theta_{lb} \quad w_{lc}\}^T \quad (56)$$

$$\mathbf{a}_e = \{A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \quad A_5 \quad A_6 \quad \bar{A}_1 \quad \bar{A}_2 \quad \bar{A}_3 \quad \bar{A}_4 \quad \bar{A}_5 \quad \bar{A}_6 \quad \bar{A}_7 \quad \bar{A}_8\}^T \quad (57)$$



شکل ۲. المان تیر ساندویچی متقارن با هسته انعطاف پذیر

می‌توان روابط (۵۵) را به فرم ماتریسی نوشت:

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{S} \mathbf{a}_e \quad (58)$$

$$\bar{u}(\eta) = \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j e^{\bar{\lambda}_j \eta} \quad (51)$$

$$\bar{w}(\eta) = \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\alpha}_j e^{\bar{\lambda}_j \eta}$$

$$\bar{w}_c(\eta) = \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\beta}_j e^{\bar{\lambda}_j \eta}$$

با جایگذاری روابط (۴۳) و (۵۱) در روابط (۳۰) می‌توان توابع

جابه‌جایی تیر را تعیین کرد.

$$\bar{u}_i(\eta) = u(\eta) + \bar{u}(\eta) = \sum_{j=1}^6 A_j e^{\lambda_j \eta} + \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j e^{\bar{\lambda}_j \eta} \quad (52-f)$$

$$\bar{u}_b(\eta) = u(\eta) - \bar{u}(\eta) = \sum_{j=1}^6 A_j e^{\lambda_j \eta} - \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j e^{\bar{\lambda}_j \eta} \quad (52-b)$$

$$\bar{w}_i(\eta) = w(\eta) + \bar{w}(\eta) = \sum_{j=1}^6 A_j \alpha_j e^{\lambda_j \eta} + \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\alpha}_j e^{\bar{\lambda}_j \eta} \quad (52-c)$$

$$\bar{w}_b(\eta) = -w(\eta) + \bar{w}(\eta) = -\sum_{j=1}^6 A_j \alpha_j e^{\lambda_j \eta} + \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\alpha}_j e^{\bar{\lambda}_j \eta} \quad (52-d)$$

$$\bar{w}_c(\eta) = \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\beta}_j e^{\bar{\lambda}_j \eta} \quad (52-e)$$

همچنین با جایگذاری رابطه (۵۲) در معادلات (۲۰) تا (۲۶)

نیروهای محوری، برشی و ممان‌های خمشی لایه‌های تیر نیز به

صورت مشابه تعیین می‌شود.

$$\bar{p}_i(\eta) = \frac{-E_f A_f}{l} \left[\sum_{j=1}^6 A_j \lambda_j e^{\lambda_j \eta} + \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\lambda}_j e^{\bar{\lambda}_j \eta} \right] \quad (53-f)$$

$$\bar{V}_i(\eta) = \frac{-E_f A_f}{l} \left[\sum_{j=1}^6 A_j \mu_j e^{\lambda_j \eta} + \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\mu}_j e^{\bar{\lambda}_j \eta} \right] \quad (53-b)$$

$$\bar{M}_i(\eta) = \frac{-E_f I_f}{l^2} \left[\sum_{j=1}^6 A_j \alpha_j \lambda_j^2 e^{\lambda_j \eta} + \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\alpha}_j \bar{\lambda}_j^2 e^{\bar{\lambda}_j \eta} \right] \quad (53-c)$$

$$\bar{V}_c(\eta) = \frac{-E_f A_f}{l} \left[\sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\xi}_j e^{\bar{\lambda}_j \eta} \right] \quad (53-d)$$

$$\bar{p}_b(\eta) = \frac{-E_f A_f}{l} \left[\sum_{j=1}^6 A_j \lambda_j e^{\lambda_j \eta} - \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\lambda}_j e^{\bar{\lambda}_j \eta} \right] \quad (53-e)$$

$$\bar{V}_b(\eta) = \frac{-E_f A_f}{l} \left[-\sum_{j=1}^6 A_j \mu_j e^{\lambda_j \eta} + \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\mu}_j e^{\bar{\lambda}_j \eta} \right] \quad (53-g)$$

$$\bar{M}_b(\eta) = \frac{-E_f I_f}{l^2} \left[-\sum_{j=1}^6 A_j \alpha_j \lambda_j^2 e^{\lambda_j \eta} + \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\alpha}_j \bar{\lambda}_j^2 e^{\bar{\lambda}_j \eta} \right] \quad (53-z)$$

که:

$$\mu_j = \frac{1}{6} [-2\lambda_j^3 \alpha_j r^2 - 3b_c^2 r(1 + \alpha_j \lambda_j r)]$$

$$\bar{\mu}_j = \frac{1}{18} [-6\bar{\lambda}_j^3 \bar{\alpha}_j r^2 + 12a^2 c + 4a^2 c^2 \bar{\lambda}_j \bar{\alpha}_j + 16a^2 c(c - 3r) \bar{\lambda}_j \bar{\beta}_j - 3b_c^2 r(1 + \bar{\lambda}_j \bar{\alpha}_j r)] \quad (54)$$

$$\bar{\xi}_j = \frac{1}{9} [4a^2(c - 3r)\{3 + \bar{\lambda}_j \bar{\alpha}_j c + 4(c - 3r) \bar{\lambda}_j \bar{\beta}_j\}]$$

فرمولاسیون سفتی دینامیکی برای یک المان تیر ساندویچی با هسته انعطاف پذیر

در شکل (۲) المان یک تیر ساندویچی با هسته انعطاف پذیر و طول l

نشان داده شده است. با استفاده از روابط (۵۲)، می‌توان مقادیر

جابه‌جایی گره‌های ابتدا و انتهای تیر را تعیین کرد.

می توان روابط (۶۰) را نیز به فرم ماتریسی نوشت:

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{Q}\mathbf{a}_e \quad (62)$$

که ماتریس \mathbf{Q} ، یک ماتریس 14×14 می باشد که عناصر آن به

صورت زیر تعیین می شود.

$$\begin{aligned} & (j=1 \sim 6) & & (j=7 \sim 14) \\ Q_{1j} &= -E_f A_f l^{-1} \lambda_j & Q_{1j} &= -E_f A_f l^{-1} \bar{\lambda}_{j-6} \\ Q_{2j} &= -E_f A_f l^{-1} \mu_j & Q_{2j} &= -E_f A_f l^{-1} \bar{\mu}_{j-6} \\ Q_{3j} &= -E_f I_f l^{-2} \lambda_j^2 \alpha_j & Q_{3j} &= -E_f I_f l^{-2} \bar{\lambda}_{j-6}^2 \bar{\alpha}_{j-6} \\ Q_{4j} &= -E_f A_f l^{-1} \lambda_j & Q_{4j} &= E_f A_f l^{-1} \bar{\lambda}_{j-6} \\ Q_{5j} &= E_f A_f l^{-1} \mu_j & Q_{5j} &= -E_f A_f l^{-1} \bar{\mu}_{j-6} \\ Q_{6j} &= E_f I_f l^{-2} \lambda_j^2 \alpha_j & Q_{6j} &= -E_f I_f l^{-2} \bar{\lambda}_{j-6}^2 \bar{\alpha}_{j-6} \\ Q_{7j} &= 0 & Q_{7j} &= -E_f A_f l^{-1} \bar{\xi}_{j-6} \\ Q_{8j} &= E_f A_f l^{-1} \lambda_j e^{\lambda_j} & Q_{8j} &= E_f A_f l^{-1} \bar{\lambda}_{j-6} e^{\bar{\lambda}_{j-6}} \\ Q_{9j} &= E_f A_f l^{-1} \mu_j e^{\lambda_j} & Q_{9j} &= E_f A_f l^{-1} \bar{\mu}_{j-6} e^{\bar{\mu}_{j-6}} \\ Q_{10j} &= E_f I_f l^{-2} \lambda_j^2 \alpha_j e^{\lambda_j} & Q_{10j} &= E_f I_f l^{-2} \bar{\lambda}_{j-6}^2 \bar{\alpha}_{j-6} e^{\bar{\lambda}_{j-6}} \\ Q_{11j} &= E_f A_f l^{-1} \lambda_j e^{\lambda_j} & Q_{11j} &= -E_f A_f l^{-1} \bar{\lambda}_{j-6} e^{\bar{\lambda}_{j-6}} \\ Q_{12j} &= -E_f A_f l^{-1} \mu_j e^{\lambda_j} & Q_{12j} &= E_f A_f l^{-1} \bar{\mu}_{j-6} e^{\bar{\mu}_{j-6}} \\ Q_{13j} &= -E_f I_f l^{-2} \lambda_j^2 \alpha_j e^{\lambda_j} & Q_{13j} &= E_f I_f l^{-2} \bar{\lambda}_{j-6}^2 \bar{\alpha}_{j-6} e^{\bar{\lambda}_{j-6}} \\ Q_{14j} &= 0 & Q_{14j} &= E_f A_f l^{-1} \bar{\xi}_{j-6} e^{\bar{\xi}_{j-6}} \end{aligned} \quad (63)$$

با جایگذاری رابطه (۵۸) در رابطه (۶۲) رابطه زیر حاصل

می شود:

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{K}_e^{\text{DSM}} \mathbf{u}_e \quad (64)$$

ماتریس سفتی دینامیکی $\mathbf{K}_e^{\text{DSM}}$ تعیین می شوند.

$$\mathbf{K}_e^{\text{DSM}} = \mathbf{Q}\mathbf{S}^{-1} \quad (65)$$

پس از مونتاژ و ترکیب ماتریس های سفتی دینامیکی المان ها و

اعمال شرایط مرزی ابتدا و انتهای تیر، ماتریس سفتی دینامیکی کل

تیر \mathbf{K}^{DSM} تعیین می شود. برای تعیین فرکانس های طبیعی، از

دترمینان ماتریس سفتی دینامیکی، استفاده می شود. با استفاده از

تکنیک های محاسباتی و الگوریتم معروف ویتریک-ویلیامز

می توان فرکانس های طبیعی و شکل مودهای تیر را تعیین کرد.

تحلیل ارتعاشات آزاد تیر ساندویچی با تکیه گاه های

ساده

زمانی که المان یک تیر ساندویچی به طول l و با تکیه گاه های ساده،

در حال ارتعاشات آزاد است، جابه جایی های تیر به صورت زیر

می باشد. A و B در رابطه (۶۶) دامنه های ارتعاش در جهات طولی

و عرضی می باشند.

$$\begin{cases} u_{t,b}^{(n)}(x,t) = A_{t,b}^{(n)} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{i\omega t} \\ w_{t,c,b}^{(n)}(x,t) = B_{t,c,b}^{(n)} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{i\omega t} \end{cases}, n=1,2,3,\dots \quad (66)$$

که ماتریس \mathbf{S} یک ماتریس می باشد که عناصر آن به صورت

زیر تعیین می شود.

$$\begin{aligned} & (j=1 \sim 6) & & (j=7 \sim 14) \\ S_{1j} &= 1 & S_{1j} &= 1 \\ S_{2j} &= \alpha_j & S_{2j} &= \bar{\alpha}_{j-6} \\ S_{3j} &= l^{-1} \alpha_j \lambda_j & S_{3j} &= l^{-1} \bar{\alpha}_{j-6} \bar{\lambda}_{j-6} \\ S_{4j} &= 1 & S_{4j} &= -1 \\ S_{5j} &= -\alpha_j & S_{5j} &= \bar{\alpha}_{j-6} \\ S_{6j} &= -l^{-1} \alpha_j \lambda_j & S_{6j} &= l^{-1} \bar{\alpha}_{j-6} \bar{\lambda}_{j-6} \\ S_{7j} &= 0 & S_{7j} &= \bar{\beta}_{j-6} \\ S_{8j} &= e^{\lambda_j} & S_{8j} &= e^{\bar{\lambda}_{j-6}} \\ S_{9j} &= \alpha_j e^{\lambda_j} & S_{9j} &= \bar{\alpha}_{j-6} e^{\bar{\lambda}_{j-6}} \\ S_{10j} &= l^{-1} \alpha_j \lambda_j e^{\lambda_j} & S_{10j} &= l^{-1} \bar{\alpha}_{j-6} \bar{\lambda}_{j-6} e^{\bar{\lambda}_{j-6}} \\ S_{11j} &= e^{\lambda_j} & S_{11j} &= -e^{\bar{\lambda}_{j-6}} \\ S_{12j} &= -\alpha_j e^{\lambda_j} & S_{12j} &= \bar{\alpha}_{j-6} e^{\bar{\lambda}_{j-6}} \\ S_{13j} &= -l^{-1} \alpha_j \lambda_j e^{\lambda_j} & S_{13j} &= l^{-1} \bar{\alpha}_{j-6} \bar{\lambda}_{j-6} e^{\bar{\lambda}_{j-6}} \\ S_{14j} &= 0 & S_{14j} &= \bar{\beta}_{j-6} e^{\bar{\lambda}_{j-6}} \end{aligned} \quad (59)$$

همچنین مقادیر نیرو و ممان های اعمالی در ابتدا و انتهای المان

نیز به دست می آیند.

$$\eta = 0: \begin{cases} P_t = \bar{P}_t(0) = \frac{-E_f A_f}{l} \left[\sum_{j=1}^6 A_j \lambda_j + \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\lambda}_j \right] \\ V_t = \bar{V}_t(0) = \frac{-E_f A_f}{l} \left[\sum_{j=1}^6 A_j \mu_j + \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\mu}_j \right] \\ M_{tt} = \bar{M}_{tt}(0) = \frac{-E_f I_f}{l^2} \left[\sum_{j=1}^6 A_j \alpha_j \lambda_j^2 + \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\alpha}_j \bar{\lambda}_j^2 \right] \\ V_{tc} = \bar{V}_{tc}(0) = \frac{-E_f A_f}{l} \left[\sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\xi}_j \right] \\ P_b = \bar{P}_b(0) = \frac{-E_f A_f}{l} \left[\sum_{j=1}^6 A_j \lambda_j - \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\lambda}_j \right] \\ V_b = \bar{V}_b(0) = \frac{-E_f A_f}{l} \left[-\sum_{j=1}^6 A_j \mu_j + \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\mu}_j \right] \\ M_{tb} = \bar{M}_{tb}(0) = \frac{-E_f I_f}{l^2} \left[-\sum_{j=1}^6 A_j \alpha_j \lambda_j^2 + \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\alpha}_j \bar{\lambda}_j^2 \right] \end{cases} \quad (60\text{-الف})$$

$$\eta = l: \begin{cases} P_t = -\bar{P}_t(1) = \frac{E_f A_f}{l} \left[\sum_{j=1}^6 A_j \lambda_j e^{\lambda_j} + \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\lambda}_j e^{\bar{\lambda}_{j-6}} \right] \\ V_t = -\bar{V}_t(1) = \frac{E_f A_f}{l} \left[\sum_{j=1}^6 A_j \mu_j e^{\lambda_j} + \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\mu}_j e^{\bar{\mu}_{j-6}} \right] \\ M_{tt} = -\bar{M}_{tt}(1) = \frac{E_f I_f}{l^2} \left[\sum_{j=1}^6 A_j \alpha_j \lambda_j^2 e^{\lambda_j} + \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\alpha}_j \bar{\lambda}_j^2 e^{\bar{\lambda}_{j-6}} \right] \\ V_{tc} = -\bar{V}_{tc}(1) = \frac{E_f A_f}{l} \left[\sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\xi}_j e^{\bar{\xi}_{j-6}} \right] \\ P_b = -\bar{P}_b(1) = \frac{E_f A_f}{l} \left[\sum_{j=1}^6 A_j \lambda_j e^{\lambda_j} - \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\lambda}_j e^{\bar{\lambda}_{j-6}} \right] \\ V_b = -\bar{V}_b(1) = \frac{E_f A_f}{l} \left[-\sum_{j=1}^6 A_j \mu_j e^{\lambda_j} + \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\mu}_j e^{\bar{\mu}_{j-6}} \right] \\ M_{tb} = -\bar{M}_{tb}(1) = \frac{E_f I_f}{l^2} \left[-\sum_{j=1}^6 A_j \alpha_j \lambda_j^2 e^{\lambda_j} + \sum_{j=1}^8 \bar{A}_j \bar{\alpha}_j \bar{\lambda}_j^2 e^{\bar{\lambda}_{j-6}} \right] \end{cases} \quad (60\text{-ب})$$

اگر بردار نیروی المانی \mathbf{f}_e به صورت زیر تعریف شود:

$$\mathbf{f}_e = \{P_{0t} \quad V_{0t} \quad M_{0t} \quad P_{0b} \quad V_{0b} \quad M_{0b} \quad V_{0c} \quad P_{1t} \quad V_{1t} \quad M_{1t} \quad P_{1b} \quad V_{1b} \quad M_{1b} \quad V_{1c}\}^T \quad (61)$$

جابه‌جایی سطرها حاصل شده، می‌باشد. به هر حال $S\{K^{DSM}\}$ با استفاده از روش حذفی گوس [۱۷] به آسانی تعیین می‌شود.

بررسی نتایج عددی

بررسی نتایج عددی تحت سه مثال ارائه می‌شود. در مثال اول، ارتعاشات آزاد تیر ساندویچی با تکیه‌گاه‌های ساده، در مثال دوم، ارتعاشات آزاد تیر ساندویچی با تکیه‌گاه‌های گیردار و در مثال سوم ارتعاشات آزاد تیر ساندویچی یکسرگیردار مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

حالت ۱: در جدول (۱)، چهار فرکانس طبیعی کمینه برای یک تیر ساندویچی با تکیه‌گاه‌های ساده با استفاده از دو روش سفتی دینامیکی و حل دقیق (بخش ۲-۴) نشان داده شده است.

جدول ۱. چهار فرکانس طبیعی کمینه تیر ساندویچی

Methods	(Hz) ω_1	(Hz) ω_2	(Hz) ω_3	(Hz) ω_4
Exact	۹۳/۶۱۵	۳۱۵/۲۶	۷۲۱/۳۲۸	۱۱۵۴/۸۶۶
DSM	۹۳/۶۱۹	۳۵۱/۲۶	۷۲۱/۳۲۸	۱۱۵۴/۸۶۶

خواص هندسی و موادی تیر در حالت ۱ عبارتند از:

$$E_f = 6.89 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2} \quad \rho_f = 2680 \text{ kgm}^{-3} \quad h_f = 0.4572 \text{ mm}$$

$$E_c = 215 \times 10^6 \text{ Nm}^{-2} \quad \rho_c = 32.8 \text{ kgm}^{-3} \quad h_f = 12.7 \text{ mm}$$

$$G_c = 82.68 \times 10^6 \text{ Nm}^{-2} \quad L = 711.2 \text{ mm} \quad b = 25.4 \text{ mm}$$

همان‌طور که در جدول (۱) نشان داده شده، نتایج روش سفتی

دینامیکی با دقت قابل توجهی با نتایج حل تحلیلی مطابقت دارد.

حالت ۲: در جدول (۲)، پنج فرکانس طبیعی کمینه برای یک تیر ساندویچی با تکیه‌گاه‌های گیردار با استفاده از دو روش سفتی دینامیکی و اجزاء محدود [۱۴] نشان داده شده است. خواص

هندسی و موادی تیر در مثال ۲ عبارتند از:

$$E_f = 21 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2} \quad \rho_f = 7900 \text{ kgm}^{-3} \quad h_f = 1.9 \text{ mm}$$

$$E_c = 56 \times 10^6 \text{ Nm}^{-2} \quad \rho_c = 60 \text{ kgm}^{-3} \quad h_f = 34.8 \text{ mm}$$

$$G_c = 22 \times 10^6 \text{ Nm}^{-2} \quad L = 2600 \text{ mm} \quad b = 59.9 \text{ mm}$$

با توجه به تفاوت فرضیات و تئوری‌های مورد استفاده در هر روش، نتایج حاصله از سفتی دینامیکی حاضر (به غیر از فرکانس اول) نسبت به نتایج به دست آمده از سایر روش‌های اجزای محدود، کمتر می‌باشد. یکی از عوامل کاهش فرکانس‌های طبیعی در روش حاضر، در نظر گرفتن انعطاف‌پذیری عرضی تیر با استفاده از مدل تیر ساندویچی فروستینگ و باروچ [۹] می‌باشد. در این تئوری، هسته هیچ‌گونه تکیه‌گاهی را در راستای محوری تحمل نمی‌کند و همین عامل باعث عدم ایجاد شرایط تکیه‌گاهی کاملاً گیردار می‌شود.

با جایگذاری رابطه (۶۶) در روابط (۱۵) تا (۱۹) و بازنویسی آنها به شکل ماتریسی برای ارتعاشات آزاد، معادله‌ای به شکل زیر ظاهر می‌شود:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{e} = 0 \quad (۶۷)$$

به دست می‌آید که مربع فرکانس‌های طبیعی، به آسانی از مقادیر ویژه ماتریس (\mathbf{KM}^{-1}) ، محاسبه می‌شوند. این ماتریس‌ها در پیوست نشان داده شده‌اند.

الگوریتم ویتریک-ویلیامز

پس از محاسبه ماتریس سفتی نهایی K^{DSM} از ترکیب ماتریس‌های سفتی المانی K_e^{DSM} ، برای تعیین فرکانس‌های طبیعی، معادله‌ای به شکل معادله (۶۸) باید حل شود.

$$\mathbf{K}^{DSM} \mathbf{u} = 0 \quad (۶۸)$$

که بردار \mathbf{u} دامنه جابه‌جایی‌های نودال المان‌ها و K^{DSM} نیز ماتریسی مربعی و تابعی از فرکانس‌های طبیعی ω می‌باشد. در اغلب موارد برای تعیین فرکانس‌های طبیعی از دترمینان ماتریس سفتی دینامیکی $|\mathbf{K}^{DSM}|$ استفاده می‌شود، که باید برابر صفر باشد.

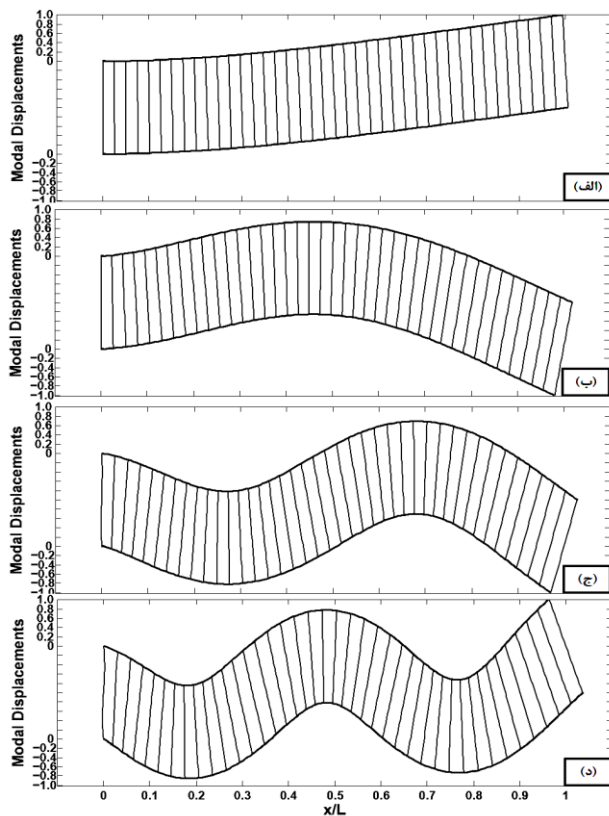
$$|\mathbf{K}^{DSM}| = 0 \quad (۶۹)$$

در حالت معمول برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی باید، رابطه دترمینان ماتریس سفتی دینامیکی $|\mathbf{K}^{DSM}|$ با فرکانس‌های طبیعی ω مشخص شده تا فرکانس متناظر با $|\mathbf{K}^{DSM}| = 0$ ، تعیین شود. به هر حال زمانی که ماتریس سفتی دینامیکی از ترکیب ماتریس‌های سفتی المانی به دست آمده، رابطه دترمینان ماتریس سفتی دینامیکی با فرکانس‌های طبیعی بسیار نامنظم و غیرجبری است. از طرف دیگر ممکن است چند فرکانس طبیعی بسیار نزدیک به هم یا برابر باشند و یا از رابطه $\mathbf{u} = 0$ محاسبه شوند. بنابراین در هر روش آزمون و خطایی که با محاسبه دترمینان ماتریس سفتی دینامیکی انجام می‌شود، امکان محاسبه نشدن برخی از فرکانس‌ها وجود دارد. این مشکل با استفاده از الگوریتم معروف ویتریک-ویلیامز، کاملاً برطرف می‌شود [۱۵ و ۱۶]. این الگوریتم به صورت رابطه (۷۰) می‌باشد:

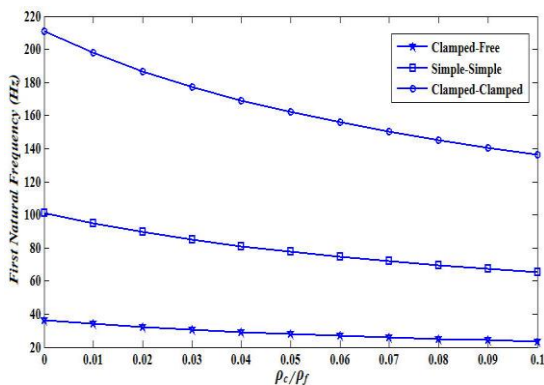
$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + S \{ \mathbf{K}^{DSM} \} \quad (۷۰)$$

که \mathbf{J} تعداد فرکانس‌های طبیعی سازه، و \mathbf{J}_0 تعداد فرکانس‌های طبیعی سازه برای زمانی است که تمام المان‌ها دارای تکیه‌گاه‌های گیردار باشند یا $\mathbf{u} = 0$ ، همچنین $S \{ \mathbf{K}^{DSM} \}$ تابع علامت برای ماتریس سفتی دینامیکی می‌باشد. $S \{ \mathbf{K}^{DSM} \}$ تعداد مؤلفه‌های منفی مستقر روی قطر ماتریس با مثلی که از ماتریس K^{DSM} بدون

چگالی هسته، جرم کل تیر افزایش می‌یابد، در حالی که سختی خمشی تیر ثابت است.



شکل ۳. چهار شکل مود اولیه مربوط به ارتعاشات آزاد تیر ساندویچی یکسرگیردار الف: شکل مود اول، ب: شکل مود دوم، ج: شکل مود سوم، د: شکل مود چهارم



شکل ۴. تغییرات اولین فرکانس طبیعی با ρ_c/ρ_f

در شکل (۵)، تغییرات اولین فرکانس طبیعی یک تیر ساندویچی تحت اثر تغییرات h_f/h_c نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل (۵) نشان داده شده است، با افزایش نسبت h_f/h_c ، اولین فرکانس طبیعی تیر ساندویچی یکسرگیردار و یا تیر ساندویچی با تکیه‌های ساده افزایش می‌یابد، در صورتی که با افزایش نسبت h_f/h_c ، اولین فرکانس طبیعی تیر ساندویچی با

جدول ۲. پنج فرکانس طبیعی کمینه تیر ساندویچی دو سرگیردار

فرکانس‌های طبیعی (Hz)	روش تحلیل				
	FEM*				DSM
	روش ۱	روش ۲	روش ۳	روش ۴	
	گیردار	گیردار	گیردار	گیردار	گیردار
ω_1	۲۴/۵۲	۲۶/۲۷	۲۶/۲۷	۲۶/۲۷	۲۶/۲۶
ω_2	۶۹/۵۸	۸۱/۵۲	۸۱/۵۲	۸۱/۶۸	۵۵/۱۲
ω_3	۱۰۸/۵۲	۱۴۵/۲۲	۱۴۵/۳۸	۱۴۵/۸۰	۱۱۰/۳۳
ω_4	۱۴۲/۹۹	۲۱۹/۴۲	۲۱۹/۵۸	۲۲۰/۲۸	۱۷۶/۸۱
ω_5	۱۷۸/۹۸	۳۰۸/۹۱	۳۰۸/۵۷	۳۱۰/۰۳	۲۶۶/۵۳

*نتایج مربوط به روش اجزای محدود، در مرجع [۱۴] ارائه شده است. در روش اول از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی با المان سه‌بعدی، در روش دوم از تئوری اولبر، در روش سوم از تئوری تیموشنکو و در روش چهارم تئوری مرتبه سه استفاده شده است.

حالت ۳: در جدول (۳)، پنج فرکانس طبیعی کمینه برای یک تیر ساندویچی یکسرگیردار با استفاده از روش سفتی دینامیکی نشان داده شده است. مقایسه نتایج با نتایج حل دقیق و المان محدود تطابق خوبی را نشان می‌دهد.

جدول ۳. پنج فرکانس طبیعی کمینه تیر ساندویچی یکسرگیردار

Method	ω_1 (Hz)	ω_2 (Hz)	ω_3 (Hz)	ω_4 (Hz)	ω_5 (Hz)
DSM	۳۳/۷۶	۱۸۹/۳۶	۵۱۱/۳۲	۹۰۵/۱۳	۱۳۴۵/۶۱
Ahmed[4]	۳۳/۹۷	۲۰۰/۵۳	۵۱۷/۶۳	۹۱۸/۲۲	۱۳۶۸/۳۷
Howson and Zare [7]	۳۳/۷۵	۱۹۸/۹۸	۵۱۲/۳۰	۹۰۷/۲۹	۱۳۴۹/۲۹

خواص هندسی و مادی تیر در مثال ۳ عبارتند از:

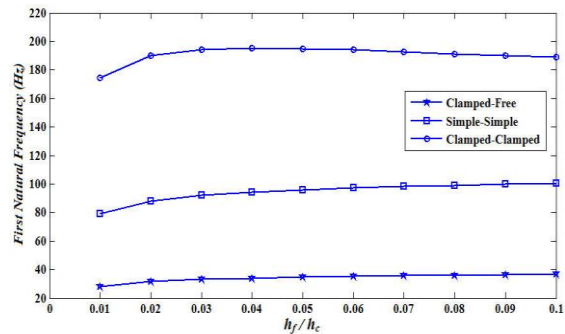
$$E_f = 6.89 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2} \quad \rho_f = 2680 \text{ kgm}^{-3} \quad h_f = 0.4572 \text{ mm}$$

$$E_c = 215 \times 10^6 \text{ Nm}^{-2} \quad \rho_c = 32.8 \text{ kgm}^{-3} \quad h_c = 12.7 \text{ mm}$$

$$G_c = 82.68 \times 10^6 \text{ Nm}^{-2} \quad L = 711.2 \text{ mm} \quad b = 25.4 \text{ mm}$$

در شکل (۳)، تغییرشکل‌های محوری و عرضی هسته و رویه‌ها در چهار شکل مود اولیه این تیر ساندویچی نشان داده شده است. همان‌طور که در حالت (۲) اشاره شد، شرایط کاملاً گیردار را در این روش نمی‌توان اعمال کرد. بنابراین همان‌طور که در شکل (۳) در مودهای بالاتر نشان داده شده، جابه‌جایی محوری هسته در تکیه‌گاه گیردار صفر نیست. در شکل (۴)، تغییرات اولین فرکانس طبیعی یک تیر ساندویچی تحت اثر تغییرات ρ_c/ρ_f نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل (۴) نشان داده شده است، با صرف‌نظر از نوع شرایط مرزی، با افزایش نسبت ρ_c/ρ_f ، اولین فرکانس طبیعی تیر ساندویچی کاهش می‌یابد. زیرا با افزایش

تکیه‌های گیردار ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد. زیرا تغییر ضخامت رویه‌ها، روی سختی خمشی و جرم کل تیر تأثیر می‌گذارد.



شکل ۵. تغییرات اولین فرکانس طبیعی با h_f/h_c

نتیجه‌گیری

نتایج نشان می‌دهد که تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای ساندویچی توسط روش سفتی دینامیکی دارای دقت خوبی می‌باشد. نتایج ارائه شده تطابق خوبی با روش‌های حل دقیق و المان محدود دارد. در مواردی که در ابتدا و انتهای تیر، هسته آزاد و یا دارای تکیه‌گاه ساده است، روش ارائه شده با حداقل تعداد المان دارای جواب‌های خوب و قابل قبولی می‌باشد. سرعت حل روش ارائه شده مناسب می‌باشد. با وجود پیچیدگی سازه‌های ساندویچی ضخیم به علت داشتن هسته انعطاف‌پذیر، به کمک فرمول‌بندی ارائه شده در این مقاله، با دقت و سرعت خوبی می‌توان مسائل مقادیر ویژه مانند ارتعاشات آزاد سازه‌های ساندویچی را حل کرد و برای تحقیقات آتی فرمول‌بندی را از تیرها به ورق‌های تخت و دوانحنایی توسعه داد.

علائم و اختصارات

c	متغیر بی‌بعد
D	اپراتور دیفرانسیلی
E_f	مدول الاستیسیته رویه‌ها
F_e	بردار نیروی المان
$F_{0t}, F_{0b}, F_{lt}, F_{lb}$	نیروهای مؤثر
G_c	مدول برشی هسته میانی
h_c	ضخامت هسته میانی
h_f	ضخامت هر رویه
i	$\sqrt{-1}$
i	شمارنده فرکانس طبیعی
j	شمارنده فرکانس طبیعی
J	تعداد فرکانس طبیعی
J_0	تعداد فرکانس طبیعی وقتی که $\mathbf{u}^{\text{DSM}} = 0$
\mathbf{K}^{DSM}	ماتریس سفتی دینامیکی کلی
$\mathbf{K}_e^{\text{DSM}}$	ماتریس سفتی دینامیکی المان
$\mathbf{K}_e^{\text{HEM}}$	ماتریس سفتی المان
l	طول المان
L	طول تیر
m	شمارنده فرکانس طبیعی
m_c	جرم واحد طول هسته میانی
m_f	جرم واحد طول در رویه‌ها
$\mathbf{M}_e^{\text{HEM}}$	ماتریس سفتی المان
$M(x, t)$	ممان خمشی
M_0, M_l	ممان خمشی در گره‌ها
$P(x, t)$	نیروی محوری
P_0, P_l	نیروی محوری در گره‌ها
r	متغیر بی‌بعد
s^2	متغیر بی‌بعد
$s \{ \mathbf{K}^{\text{DSM}} \}$	تعداد عضوهای منفی روی قطر ماتریس بالا مثلثی حاصل شده از \mathbf{K}^{DSM} بدون تعویض ردیف‌ها
t	زمان
T	انرژی جنبشی
\mathbf{u}_e	بردار تغییر مکان المان

a^2	متغیر بی‌بعد
\mathbf{a}_e	بردار ثابت
A_c	مساحت سطح عمودی هسته
A_f	مساحت سطح عمودی هر رویه
A_j	j^{th} اندیکس ثابت
b	پهنای المان
b_f^2	متغیر بی‌بعد
b_c^2	متغیر بی‌بعد
B_j	j^{th} اندیکس ثابت

مراجع

1. Di Taranto, 1965. Theory of vibratory bending for elastic and viscoelastic layered finite length beams. *Journal of Applied Mechanics* 87(88): 1-6.
2. Mead, DJ. and S. Markus. 1969. The forced vibration of a three-layer damped sandwich beam with arbitrary boundary condition. *Journal of Sound and Vibration* 10(2): 63-75.
3. Mead, Diogi. 1982. A comparison of some equations for the flexural vibration of damped sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration* 83(3): 63-77.
4. Ahmed., Kim. 1971. Free vibration of curved sandwich beams by the method of finite elements. *Journal of Sound and Vibration* 18(1): 61-74.
5. Ahmed, Kim. 1972. Dynamic analysis of sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration* 21(3): 263-276.
6. Banerjee, Jabari. 2003. Free vibration of sandwich beams using the dynamic stiffness method. *Journal of Computers and Structures* 81: 1915-1922.
7. Howson, W. 2005. Exact dynamic stiffness matrix for flexural vibration of three-layered sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration* 282: 753-767.
8. Banerjee, J. 2005. Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of a three-layered sandwich beam. *Journal of Solids and Structures* 42: 2181-2197.
9. Frostig, Y., and M. Baruch. 1994. Free vibration of sandwich beams with a transversely flexible core: A high order approach. *Journal of Sound and Vibration* 176(2): 195-208.
10. Baber, T., R. Maddox, and C. Orozco. 1998. A finite element method for harmonically excited viscoelastic sandwich beams. *Computers and Structures* 66: 105-113.
11. Sokolinsky, V., and Nutt, SR. 2004. Consistent higher-order dynamic equations for soft-core sandwich beams. *AIAA Journal* 42(2): 374-382.
12. Sokolinsky, V., Nutt, SR. and Frostig Y. 2002. Boundary condition effects in free vibrations of higher-order soft sandwich beams. *AIAA Journal* 40(6): 1220-1227.
13. Sokolinsky, V.S., H. F. Bremen, J. Lavoie, and Nuttm SR. 2004. Analytical and experimental study of free vibration response of soft-core sandwich beams. *Journal of Sandwich Structure Mathematics* 6: 230-261.
14. Bekuit, J., Oguamanam, D. and Damisa, D.m. 2007. A quasi finite element formulation for the analysis of sandwich beams. *Finite Element in Analysis and Design* 43: 1099-1107.
15. Williams, F., and W. H. Wittrick. 1970. An automatic computational procedure for calculating natural frequencies

u

$u(x, t)$

u_0, u_l

U

$V(x, t)$

V_0, V_l

V

$w(x, t)$

w_0, w_l

x

X

y

Y

Z

α_j

γ_{xy}

δ

ε_x

η

λ_j

$\theta(x, t)$

θ_0, θ_l

ρ_c

ρ_f

σ_x

τ_{xy}

ω

بردار تغییر مکان کلی

تغییر مکان محوری

تغییر مکان محوری در گره‌ها

انرژی کرنشی

نیروی برشی

نیروی برشی در گره‌ها

حجم المان

تغییر مکان عمودی

تغییر مکان عمودی در گره‌ها

محور عضو

جهت محوری

محور عضو

جهت عمودی

در جهت پهنای تیر

متغیر بی بعد

کرنش برشی

اپراتور اول تغییرات

کرنش نرمال

متغیر بی بعد

j^{th} ریشه‌ی معادله مفسر

تغییر مکان چرخشی

تغییر مکان چرخشی در گره‌ها

چگالی هسته میانی

چگالی روبه‌ها

تنش نرمال

تنش برشی

فرکانس طبیعی

پی نوشت

1. Di Taranto
2. Mead and Markus
3. Mead
4. Banerjee
5. Howson and Zare
6. Frosting and Baruch
7. Vittriz-Williams

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 18\bar{b}_f^2 + 6\bar{b}_c^2 & 3\bar{b}_c^2 & 6\bar{b}_c^2 r\alpha \\ 3\bar{b}_c^2 & 18\bar{b}_f^2 + 6\bar{b}_c^2 & 3\bar{b}_c^2 r\alpha \\ 6\bar{b}_c^2 r\alpha & 3\bar{b}_c^2 r\alpha & 6\bar{b}_c^2 r^2 \alpha^2 + 18\bar{b}_f^2 + 6\bar{b}_c^2 \\ -3\bar{b}_c^2 r\alpha & -6\bar{b}_c^2 r\alpha & -3\bar{b}_c^2 r^2 \alpha^2 + 3\bar{b}_c^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ & & -3b_c^2 r\alpha \\ & & -6b_c^2 r\alpha \\ & & -3b_c^2 r^2 \alpha^2 + 3b_c^2 \\ & & 6b_c^2 r^2 \alpha^2 + 18b_f^2 + 6b_c^2 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

:که

$$a^2 = \frac{A_c G_c l^2}{E_f A_f h_c^2}; s^2 = \frac{A_c E_c l^2}{E_f A_f h_c^2}; \bar{b}_f^2 = \frac{m_f l^2}{E_f A_f}$$

$$\bar{b}_c^2 = \frac{m_c l^2}{E_f A_f}; c = \frac{3h_f + h_c}{2l}; r = \frac{h_f}{2l}; \alpha = n\pi$$

of skeletal structures. *International Journal of Mechanical Sciences* 12: 781–791.

16. Williams, Fedrick. 1993. Review of exact buckling and frequency calculations with optional multi-level substructuring. *Journal of Computers and Structures* 48(3): 547–552.
17. Wittrick, W., and F. Williams. 1971. A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures. *Quarterly Journal of Mechanics Applied Mathematics* 24: 263–284.
18. Khalili, S. M. R., A. R. Damanpack, N. Nemati, and K. Malekzadeh. 2010. Free vibration analysis of sandwich beam carrying sprung masses. *Internatinal Journal of Mechanical sciences* 52: 1620–1633.

پیوست

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 18(\alpha^2 + a^2) & -18a^2 & 6a^2 c\alpha \\ -18a^2 & 18(\alpha^2 + a^2) & -6a^2 c\alpha \\ 6a^2 c\alpha & -6a^2 c\alpha & 6r^2 \alpha^4 + 2a^2 c^2 \alpha^2 + 42s^2 \\ 6a^2 c\alpha & -6a^2 c\alpha & 2a^2 c^2 \alpha^2 + 6s^2 \\ 24a^2 \alpha(c-3r) & -24a^2 \alpha(c-3r) & 8a^2 c(c-3r)\alpha^2 - 48s^2 \\ & 6a^2 c\alpha & 24a^2 \alpha(c-3r) \\ & -6a^2 c\alpha & -24a^2 \alpha(c-3r) \\ & 2a^2 c^2 \alpha^2 + 6s^2 & 8a^2 c(c-3r)\alpha^2 - 48s^2 \\ 6r^2 \alpha^4 + 2a^2 c^2 \alpha^2 + 42s^2 & 8a^2 c(c-3r)\alpha^2 - 48s^2 & \\ 8a^2 c(c-3r)\alpha^2 - 48s^2 & 32a^2 (c-3r)^2 \alpha^2 + 96s^2 & \end{bmatrix}$$