

بررسی خمش غیرخطی صفحات کامپوزیتی توسط روش بدون‌المان با استفاده از توابع پایه‌ای لژاندر

سید امیرمهدی قناده‌پور^۱، محمدعلی مهرپویا^۲، پیام کیانی^۳

۱ استادیار، دانشکده مهندسی و فناوری‌های نوین، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، a_ghannadpour@sbu.ac.ir

۲ استادیار، دانشکده ریاضی، دانشگاه تفرش، تفرش

۳ دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی و فناوری‌های نوین، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۸/۱۱

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۸/۱۶

چکیده

در این مقاله خمش غیرخطی صفحات کامپوزیتی با استفاده از روش بدون‌المان بررسی شده است. روش مذکور از جمله روش‌های عددی مورد توجه طی دهه‌های اخیر بوده است. در این روش، تقریب‌های عددی حل معادله دیفرانسیلی، نه بر مبنای المان‌ها و روابط پیوستگی بین آنها، که بر مبنای مجموعه‌ای از نقاط انجام می‌شود. در این مقاله دامنه مسئله با نقاط لژاندر - گاوس - لوباتو گسسته‌سازی شده است. چون ضخامت صفحات نازک فرض شده، برای تحلیل مسئله از نظریه صفحات کامپوزیتی کلاسیک استفاده می‌شود. در پژوهش حاضر از توابع پایه لژاندر برای حل معادلات تعادل حاکم بر صفحات کامپوزیتی استفاده شده است. این معادلات با در نظر گرفتن فرضیات ون کارمن استخراج شده‌اند. به علت تغییر شکل‌های بزرگ و وجود ترم‌های غیرخطی در روابط کرنش - جابه‌جایی و ترم‌های غیرخطی ناشی از ضرب میدان‌های جابه‌جایی، معادلات نهایی حاصل از گسسته‌سازی معادلات تعادل و شرایط مرزی حاکم، تشکیل دستگاه معادلات غیرخطی می‌دهند که برای حل آن از روش نیوتن رافسون استفاده شده است. چون تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیشتر است، برای حل دستگاه از روش حداقل مربعات متحرک استفاده خواهد شد. نتایج برای صفحات کامپوزیتی با شرایط مرزی و لایه‌چینی‌های گوناگون استخراج شده که تا حد امکان با نتایج موجود در مراجع مقایسه شده‌اند.

واژگان کلیدی

خمش غیرخطی، تئوری کلاسیک صفحات کامپوزیتی، توابع لژاندر، روش بدون‌المان، باهم‌گذاری^۱

۱. مقدمه

در رشته‌های متنوع ورزشی کاربرد پیدا کرده است. این سازه‌ها به یکی از زمینه‌های مهم تحقیقاتی در حوزه مهندسی طی چند دهه

امروزه سازه‌های کامپوزیتی و ساندویچی در بسیاری از حوزه‌های مهندسی همچون هوافضا، خودروسازی، ساخت زیردریایی و حتی

آخرین مبدل شده‌اند. دلیل این امر امکان طراحی ماده با توجه به ویژگی‌های مورد نظر طراح و استحکام بالا در کنار وزن پایین آنهاست.

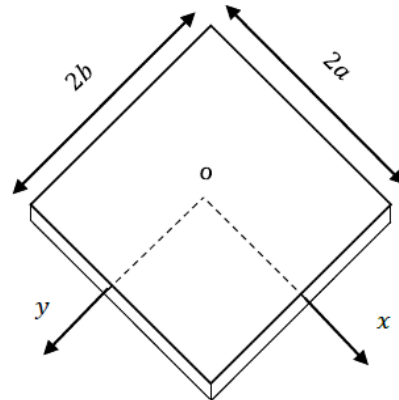
با توجه به استفاده گسترده از سازه‌های جدارنازک و صفحات کامپوزیتی در ساختار سازه‌های هوایی، نیاز به روش‌های دقیق جهت تحلیل‌های مورد نظر سازه‌های احساس می‌شود. آنالیز غیرخطی خمش، ناشی از تغییر شکل‌های بزرگ خارج صفحه‌ای است که به‌عنوان ترم‌های غیرخطی در رابطه کرنش جابه‌جایی آورده می‌شود. تاکنون روش‌های گوناگونی در این‌خصوص گسترش داده شده‌اند. در تحلیل بسیاری از سازه‌های کامپوزیتی و مسائل حاکم بر آن از روش‌های عددی رایج مانند المان محدود و تفاضل محدود استفاده می‌شود؛ اما در روش‌های رایجی چون المان محدود به‌دلیل مشکلاتی مانند اعوجاج المانی در تغییر شکل‌های بزرگ و نیاز به شبکه‌بندی مجدد در مسائل رشد ترک، امروزه توجه محققان به روش‌های بدون المان باهم‌گذاری معطوف شده است. مهم‌ترین ویژگی روش‌های بدون المان تقریب‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل، نه با تعریف المان و روابط پیوستگی مربوط به آنها که با عبور توابع پایه از میان نقاط یکنواخت یا غیریکنواخت می‌باشد که این نقاط دامنه مسئله مورد نظر را شبیه‌سازی می‌کنند. ساده‌ترین نظریه صفحات، تئوری کلاسیک^۲ است که کرنش‌های برشی را در نظر نمی‌گیرد؛ بنابراین روشی مطمئن برای پیش‌بینی رفتار صفحات نازک به حساب می‌آید.

برخی از حل‌های تحلیلی نظریه کلاسیک و برشی اصلاحی مرتبه اول توسط محققان اولیه ارائه شده است [۱-۲]. روش‌های تحلیلی و حل دقیق نمی‌توانند به آسانی برای بررسی هندسه‌ها و شرایط مرزی پیچیده مورد استفاده قرار گیرند. استفاده از روش‌های عددی یکی از ابزارهای مورد استفاده برای چنین تحلیل‌هایی است. تحلیل تغییر شکل‌های بزرگ با استفاده از معادلات ون‌کارمن به‌صورت گسترده مورد استفاده قرار گرفته است [۳-۴]. شوکالا و نث (۲۰۰۰) به بررسی تحلیلی معادلات غیرخطی صفحات کامپوزیتی با شرایط مرزی گوناگون پرداخته‌اند [۵]. آنها برای خطی‌سازی معادلاتشان از تکنیک برون‌یابی مربعی استفاده نموده‌اند و جهت تخمین میدان‌های جابه‌جایی از چندجمله‌ای‌های سریع چیشو بهره برده‌اند. چانگ و هوانگ (۱۹۹۱) به بررسی صفحات کامپوزیتی با تئوری مرتبه بالاتر و

روش المان محدود پرداخته‌اند که جهت ایجاد ماتریس جرم، ماتریس خطی سختی و ماتریس غیرخطی سختی از المان‌های رایج در گسسته‌سازی مسئله به‌کار رفته است [۶]. یانگ [۷] و ویتنی و پاگانو [۸] به گسترش نظریه مرتبه اول برشی برای بررسی خمش صفحات کامپوزیتی پرداخته‌اند. بهره‌گیری از چندجمله‌ای‌هایی چون چندجمله‌ای‌های چیشف، لاگرانژ و جز این‌ها به‌منظور تخمین میدان‌های جابه‌جایی یکی از روش‌های بررسی خمش غیرخطی است. خصوصیات چندجمله‌ای‌های لژاندر از جمله متعامد بودن آنها سبب کاهش میزان ترم‌های مورد نیاز برای دستیابی به جوابی قابل قبول و در نتیجه کاهش حجم و زمان مورد نیاز برای محاسبات می‌شود. نکته دیگر برای استفاده درست از توابع پایه‌ای لژاندر انتخاب نقاط شبکه می‌باشد. کانس (۱۹۹۰) به گسترش حل معادلات دیفرانسیلی جزئی با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی و روش بدون المان باهم‌گذاری پرداخت [۹]. وی توانست با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی چند درجه دوم به حل انواع معادلات دیفرانسیلی بپردازد، تابع چند درجه دوم^۳ تنها تابع درونیاب تخمینی نیست، اما نسبت به روش تفاضل محدود جهت حل معادلات دیفرانسیلی از کارایی بالاتر و همگرایی سریع‌تری برخوردار است. مرور کلی بر مطالعات انجام‌شده در حوزه روش‌های بدون المان تا سال ۲۰۱۱ م در مطالعه لیو مشاهده می‌شود [۱۰]. در پژوهش حاضر به بررسی رفتار الاستیکی خمش غیرخطی صفحاتی که تحت بارگذاری یکنواخت^۴ و کسینوسی^۵ قرار گرفته‌اند، با استفاده از توابع پایه‌ای لژاندر پرداخته می‌شود. اضلاع صفحات کامپوزیتی دارای شرایط مرزی ساده و گیردار هستند. فرمول‌بندی مورد استفاده در این تحقیق به‌منظور بررسی خمش غیرخطی صفحات کامپوزیتی بر پایه نظریه صفحات کامپوزیتی کلاسیک است. معادلات نهایی حاصل از گسسته‌سازی معادلات تعادل و شرایط مرزی حاکم، تشکیل یک دستگاه معادلات غیرخطی را می‌دهند که همواره در آن تعداد معادلات از مجهولات بیشتر است. جهت تحصیل ضرایب مجهول و حل دستگاه غیرخطی از روش نیوتن رافسون^۶ استفاده شده و چون تعداد معادلات از مجهولات بیشتر است از روش حداقل مربعات برای حل دستگاه استفاده خواهد شد. نتایج حاصل از این شیوه تا سرحد امکان با نتایج حاصل از روش‌های دیگر مقایسه شده است.

۲. استخراج معادلات

در شکل ۱ صفحه مستطیلی دلخواه را نمایش می‌دهد که دستگاه مختصات روی مرکز آن لحاظ شده است. با این فرض که نسبت ضخامت به طول اضلاع صفحه بسیار کوچک است، می‌توان از تنش‌های برشی در جهت ضخامت صفحه صرف‌نظر کرد. با توجه به این فرض، برای استخراج معادلات تعادل صفحه می‌توان از نظریه صفحات کامپوزیتی کلاسیک استفاده کرد.



شکل ۱. یک صفحه مستطیلی شکل

با در نظر گرفتن فرضیات تنش صفحه‌ای، رابطه تنش- کرنش براساس نظریه صفحات کامپوزیتی کلاسیک برای یک ماده کامپوزیتی متشکل از چندلایه به صورت زیر است:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

به طوری که در این رابطه \bar{Q}_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) ضرایب سختی انتقال یافته کاهش یافته^۷ است. با انتگرال گیری از تنش‌های معادله ۱ در جهت ضخامت می‌توان نیرو و ممان‌های معادل را به ترتیب زیر به دست آورد:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (3)$$

با توجه به فرضیات ون کارمن، بردار کرنش‌های یک صفحه، که اصطلاحاً کرنش‌های ون کارمن نامیده می‌شوند، به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \varepsilon^0 + z\varepsilon^1 \quad (4)$$

که ε^0 معرف بردار کرنش‌های غشایی در صفحه میانی و ε^1 نیز بیانگر کرنش‌های انحنایی است. کرنش‌های صفحه میانی را می‌توان به صورت ۵ نوشت:

$$\varepsilon^0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \varepsilon_i^0 + \varepsilon_{NL}^0 \quad (5)$$

که کرنش‌های خطی ε_i^0 و غیرخطی ε_{NL}^0 در صفحه میانی به صورت ۶ تعریف می‌شوند:

$$\varepsilon_i^0 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\varepsilon_{NL}^0 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon^1 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

مقادیر u_0, v_0, w_0 نشان‌دهنده جابه‌جایی بر روی صفحه میانی هستند. معادلات تعادل یک صفحه بر مبنای نظریه صفحات کامپوزیتی کلاسیک به صورت ۸ است [۱]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + N_{xx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ + N_{yy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - q &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

در معادلات اخیر، M و N به ترتیب نشان‌دهنده ممان‌ها و نیروهای منتجه می‌باشند که پیشتر در روابط ۲ و ۳ تعریف شدند.

یک بعد و در جهت x به‌صورت زیر نوشته می‌شود و برای جهت y نیز به‌صورت مشابه به‌دست می‌آید:

$$P_0(x)=1, P_1(x)=x \quad (13)$$

$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x) \quad (14)$$

به‌منظور استفاده از توابع لژاندر در بازه $[-a, a]$ باید x به فرم بی‌بعد x/a تغییر داده شود بنابراین $P(x)$ به‌صورت ۱۵ نمایش داده می‌شود.

$$P_i(x) \rightarrow P_i\left(\frac{x}{a}\right) \quad (15)$$

با توجه به مطالب فوق می‌توان میدان‌های جابه‌جایی را به‌صورت روابط ۱۶ تا ۱۸ تعریف نمود:

$$u_0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i^u \alpha_j^u P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) \quad (16)$$

$$v_0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i^v \alpha_j^v P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) \quad (17)$$

$$w_0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i^w \alpha_j^w P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) \quad (18)$$

به‌طوری‌که α^u و α^v ضرایب مجهول میدان‌های جابه‌جایی می‌باشند که از حل دستگاه معادلات به‌دست می‌آیند. به‌عنوان مثال، نخستین معادله‌ی تعادل با استفاده از میدان‌های جابه‌جایی به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i^u \alpha_j^u \left(A_{11} \frac{\partial^2 P_{i-1}}{\partial x^2} P_{j-1} \right. \\ & \left. + A_{66} \frac{\partial^2 P_{j-1}}{\partial y^2} P_{i-1} \right) \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i^v \alpha_j^v \left(A_{12} \frac{\partial P_{i-1}}{\partial x} \frac{\partial P_{j-1}}{\partial y} \right. \\ & \left. + A_{66} \frac{\partial P_{i-1}}{\partial x} \frac{\partial P_{j-1}}{\partial y} \right) \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{i'=1}^n \sum_{j'=1}^m \alpha_i^w \alpha_j^w \alpha_{i'}^w \alpha_{j'}^w \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(A_{11} \frac{\partial P_{i-1}}{\partial x} \frac{\partial^2 P_{i'-1}}{\partial x^2} P_{j-1} P_{j'-1} \right. \\ & + A_{12} \frac{\partial P_{i-1}}{\partial x} \frac{\partial P_{j-1}}{\partial y} \frac{\partial P_{j'-1}}{\partial y} P_{i-1} \\ & + A_{66} \frac{\partial P_{j-1}}{\partial y} \frac{\partial P_{i-1}}{\partial x} \frac{\partial P_{j'-1}}{\partial y} P_{i-1} \\ & \left. + A_{66} \frac{\partial^2 P_{j'-1}}{\partial y^2} \frac{\partial P_{i-1}}{\partial x} P_{j-1} P_{i'-1} \right) \end{aligned}$$

به‌منظور حل معادلات ۸ باید ابتدا آنها را برحسب میدان‌های جابه‌جایی بیان کرد، بنابراین میدان‌های جابه‌جایی در کل صفحه با در نظر گرفتن فرضیات نظریه‌ی صفحات کامپوزیتی کلاسیک به‌صورت ۹ نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \quad (9)$$

$$w(x, y) = w_0(x, y)$$

با استفاده از معادلات ۱ تا ۷ می‌توان رابطه‌ی نیرو و ممان‌های معادل را با کرنش تشکیل داد:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

مؤلفه‌های ماتریس‌های A ، B و D که به‌ترتیب ماتریس سختی محوری، سختی خمشی و کوپلینگ سختی محوری - خمشی نامیده می‌شوند، به‌صورت ۱۲ به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{-k} (Z_{k+1} - Z_k) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{-k} (Z_{k+1}^2 - Z_k^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{-k} (Z_{k+1}^3 - Z_k^3) \end{aligned} \quad (12)$$

۳. فرایند حل معادلات حاکم

در پژوهش حاضر میدان‌های جابه‌جایی تعریف‌شده در معادلات با استفاده از توابع پایه‌ی لژاندر تخمین زده می‌شوند. سری لژاندر از جمله سری‌های قدرتمند ریاضیات است. به‌منظور حل معادلات تعادل با شرایط مرزی انتخاب‌شده نخست این معادلات با استفاده از توابع پایه گسسته‌سازی می‌شوند. رابطه‌ی بازگشتی لژاندر برای

درون‌یاب در بسیاری از مسائل مقدار مرزی در نزدیکی مرزها دارای نوسانات شدیدی می‌شود و همین مسئله دقت و همگرایی مسئله را دچار مشکل می‌کند. به بیان دیگر اگر درون‌یابی لژاندر برای نقاط با فواصل یکسان انجام شود، این مسئله به ذهن متبادر می‌شود که آیا مقدار باقیمانده $E_N(x) = f(x) - P_N(x)$ در شرایطی که N افزایش می‌یابد به صفر میل می‌کند؟ (N تعداد ترم‌های چندجمله‌ای لژاندر می‌باشد). باید گفت برای توابعی نظیر $\sin(x)$ یا $\exp(x)$ که همه مشتقات دارای مقدار ثابتی از کران می‌باشد، پاسخ سؤال مثبت است، اما در کل پاسخ سؤال خیر است؛ زیرا به‌عنوان مثال در خصوص تابعی مانند $f(x) = 1/1+x^2$ ماکزیمم مقدار باقیمانده هنگامی که تعداد جملات افزایش می‌یابد، بزرگ می‌شود که به این پدیده رانگ^۹ گفته می‌شود. به‌طوری‌که اگر چندجمله‌ای‌های لژاندر از درجه ۱۰ باشد و از نقاط با فواصل یکنواخت عبور کند، دارای نوسانات بزرگی در انتهای بازها می‌شود و هرچه تعداد نقاط افزایش یابد این نوسانات شدیدتر خواهد شد حال اگر از نقاط چبیشو یا لژاندر برای درونیابی استفاده شود دیگر این نوسانات به‌وجود نخواهد آمد و با افزایش تعداد جملات و نقاط مقدار باقیمانده به سمت صفر میل می‌کند. چنانچه معادلات و شرایط مرزی با استفاده از چندجمله‌ای‌های لژاندر گسسته‌سازی شوند، یک دستگاه معادلات غیرخطی ایجاد می‌شود که ترم‌های غیرخطی در نتیجه ضرب متغیرها، در معادلات تعادل حاکم بر صفحه به‌وجود می‌آیند. برای حل دستگاه معادلات غیرخطی، از روش نیوتن رافسون استفاده می‌شود. دستگاه غیرخطی مذکور توسط روش نیوتن رافسون به یک دستگاه خطی به شکل $Ax = b$ مبدل می‌گردد که برای یافتن پاسخی با دقت مناسب لازم است تا از یک تکنیک تکرارشونده استفاده گردد. باید توجه داشت که در این دستگاه تعداد معادلات از مجهولات بیشتر است، در این حالت دستگاه دارای پاسخ یکتا نیست. لذا، به‌منظور یافتن یک سازگار با دستگاه از تکنیک حداقل مربعات [۱۷] استفاده شده است. روند تکراری تا زمانی که حد خطای در نظر گرفته شده برای بردار ضرایب مجهول d_i اکتان شود، ادامه پیدا می‌کند. همان‌طور که در معادله ۱۰ و ۱۱ نشان داده شده است، برای به‌دست آوردن نیرو و ممان‌های منتجه لازم است تا دو دسته کمیت تعیین شود. دسته نخست کمیت‌های مربوط به ماده است که از اطلاعات صفحات کامپوزیتی به‌دست می‌آید. دسته دوم، کمیت‌های مورد نیاز کرنش

$$-\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i^w \alpha_j^w \begin{pmatrix} +3B_{16} \frac{\partial^2 P_{i-1}}{\partial x^2} \frac{\partial P_{j-1}}{\partial y} \\ +B_{26} \frac{\partial^3 P_{j-1}}{\partial y^3} P_{i-1} \end{pmatrix} = 0$$

دیگر معادلات دیفرانسیلی حاکم و معادلات شرایط مرزی نیز به‌همین صورت گسسته‌سازی می‌شوند. در کنار ترم‌های سری لژاندر برای گسسته‌سازی معادلات حاکم بر صفحه، چون روش حل بر پایه روش باهم‌گذاری می‌باشد، باید معادلات گسسته‌سازی شده در نقاط توزیع‌شده در دامنه و معادلات شرایط مرزی هندسی و نیرویی هم در نقاط مرزی قرار داده شوند. در نهایت به‌صورت یک دستگاه معادلات به شکل ۲۰ و ۲۱ بیان می‌شوند:

$$Lu(\mathbf{x}_i) = f_i; i = 1 : N_D \quad (20)$$

$$Bu(\mathbf{x}_i) = 0; i = 1 : N_B \quad (21)$$

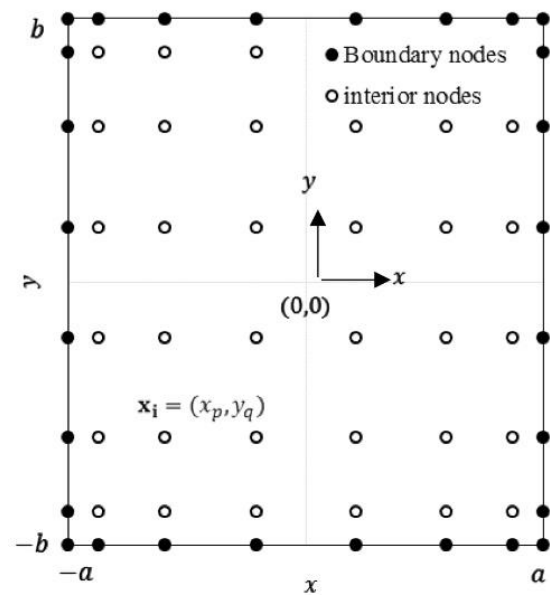
که در اینجا L و B عملگرهای دیفرانسیلی می‌باشند، u متغیری است که با توابع پایه لژاندر جایگزین شده است، \mathbf{x}_i مختصات نقاط مورد نظر هستند، f مقادیر سمت راست معادله و N_D و N_B نیز به‌ترتیب تعداد نقاط درون دامنه و روی مرز می‌باشند. برای توزیع نقاط دامنه از نقاط لژاندر - گاوس - لوباتو استفاده شده است. نمایش این نقاط به‌عنوان نمونه در شکل ۲ برای حالت $(n \times m) = (8 \times 8)$ نقطه نشان داده شده است. که n تعداد نقاط در جهت طولی و m در جهت عرضی است. مختصات این نقاط در روش لژاندر به‌صورت زیر می‌باشد که از حل معادلات ۲۲ به‌دست می‌آیند.

$$x_i (i = 1, \dots, N_B + N_D) = \begin{pmatrix} x_p, y_q \end{pmatrix} \begin{matrix} p = 1, \dots, n \\ q = 1, \dots, m \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right) \frac{dP_p\left(\frac{x}{a}\right)}{dx} = 0, p = 1, \dots, n \\ \left(1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right) \frac{dP_q\left(\frac{y}{b}\right)}{dy} = 0, q = 1, \dots, m \end{cases} \quad (22)$$

در این پژوهش همواره تعداد ترم و تعداد نقاط در هر ضلع برابر در نظر گرفته شده است؛ یعنی $n^2 = m^2 = N_B + N_D$. انتخاب نقاط و نحوه توزیع آنها در دامنه از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است؛ زیرا انتخاب درست نقاط معمولاً سبب افزایش دقت و سرعت همگرایی در مسئله می‌شود. گفتنی است چنانچه برای گسسته‌سازی دامنه از نقاط یکنواخت استفاده شود نسبت به زمانی که از نقاط لژاندر - گاوس - لوباتو استفاده می‌شود تابع

در هر نقطه است. به‌منظور محاسبه کرنش‌ها در هر نقطه براساس معادلات ۴ تا ۷ لازم است تا میدان‌های جابه‌جایی تعیین گردند.



شکل ۲. نحوه توزیع نقاط لژاندر - گاوس - لوباتو

$$a = b$$

$$\frac{a}{h} = 100$$

$$\frac{E_1}{E_2} = 40$$

$$G_{12} = 0.6E_2$$

$$\nu_{12} = 0.25$$

مدل ریاضی مربوط به شرایط مرزی خارج‌صفحه‌ای ساده (۲۳) و گیردار (۲۴) به‌صورت زیر ارائه شده‌اند:

$$x = \mp a, w_0 = M_{xx} = 0 \quad (23)$$

$$y = \mp b, w_0 = M_{yy} = 0$$

$$x = \mp a, w_0 = \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \quad (24)$$

$$y = \mp b, w_0 = \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0$$

ضمن اینکه مدل ریاضی شرایط مرزی داخل‌صفحه‌ای نیز به دو صورت آزاد^{۱۱} (۲۵) و مقید^{۱۱} (۲۶) نشان داده شده‌اند:

$$x = \mp a, v_0 = N_{xx} = 0 \quad (25)$$

$$y = \mp b, u_0 = N_{yy} = 0$$

$$x = \mp a, u_0 = v_0 = 0 \quad (26)$$

$$y = \mp b, u_0 = v_0 = 0$$

همچنین w_0 خیز وسط صفحه می‌باشد، برای $q = q_0$ بار یکنواخت و $q = q_0 \cos(\pi x/a) \cos(\pi y/b)$ برای بار کسینوسی در نظر گرفته می‌شود. q_0 شدت فشار جانبی وارد بر صفحه می‌باشد. در ابتدا، به‌منظور بررسی صحت و دقت روش، همگرایی این شیوه مورد بررسی قرار می‌گیرد. شکل ۳ همگرایی را با افزایش تعداد جملات سری لژاندر و نقاط لژاندر - گاوس - لوباتو برای یک صفحه کامپوزیتی با لایه‌چینی متعامد $[0/90]_s$ و شرایط مرزی خارج‌صفحه‌ای گیردار (۲۴) و ساده (۲۳) و شرایط مرزی درون‌صفحه‌ای مقید (۲۶) (تشکیل‌شده از ماده ۲) نمایش می‌دهد. گفتنی است محور عمودی سمت راست شکل ۳ مربوط به شرایط مرزی (۲۴) و (۲۶) و محور عمودی سمت چپ مربوط به شرایط مرزی (۲۳) و (۲۶) می‌باشند. با توجه به این مثال مشاهده می‌شود که استفاده از ۷ ترم و 7×7 نقطه برای رسیدن به پاسخ دقیق مناسب است، اما برای احتیاط از جواب‌ها در تمام

۴. نتایج و تحلیل

در مقاله حاضر، حل معادلات غیرخطی خمش تحت بارگذاری جانبی یکنواخت و کسینوسی و شرایط مرزی ساده و مقید برای مواد کامپوزیتی توسط چندجمله‌ای‌های لژاندر بررسی شده است. به‌منظور بررسی دقت و کاربرد روش حاضر چندین مثال جهت مقایسه با نتایج موجود آورده شده است. مشخصات مواد انتخابی، شرایط مرزی و هندسه در نظر گرفته شده در پژوهش به‌صورتی که در زیر آمده است می‌باشد [۲۰-۲۱]:

$$a = b = 152.4 \text{ mm (6in)}$$

$$h = 3.505 \text{ mm (0.138in)}$$

$$E_1 = 20684.271 \text{ MPa (} 3 \times 10^6 \text{ Psi)}$$

$$E_2 = 8825.289 \text{ MPa (} 1.28 \times 10^6 \text{ Psi)}$$

$$G_{12} = 2154.6116 \text{ MPa (} 0.37 \times 10^6 \text{ Psi)}$$

$$\nu_{12} = 0.32$$

$$a = b = 152.4 \text{ mm (6in)}$$

$$h = 2.4384 \text{ mm (0.096in)}$$

$$E_1 = 12604.995 \text{ MPa (} 1.8282 \times 10^6 \text{ Psi)}$$

$$E_2 = 12627.747 \text{ MPa (} 1.8315 \times 10^6 \text{ Psi)}$$

$$G_{12} = 2154.6116 \text{ MPa (} 0.37 \times 10^6 \text{ Psi)}$$

$$\nu_{12} = 0.2395$$

به‌عنوان متغیرهای گره‌ای در طول فرایند گسسته‌سازی معادله دیفرانسیل می‌باشد. به‌عنوان نمونه یکی از کاربردهای روش مذکور در محاسبه تنش و کرنش‌های اجسام ارتجاعی تراکم‌ناپذیر می‌باشد. در ادامه این تحقیق اثر شرایط مرزی ترکیبی به‌صورت جداگانه مورد بررسی قرار گرفته‌اند. اعمال شرایط مرزی متفاوت و ترکیبی و اثر آنها را بر خیز ماکزیمم یک صفحه متعامد متقارن چهارلایه می‌توان در شکل ۷ مشاهده نمود. در استخراج نتایج این منحنی از مشخصات ماده ۲ استفاده شده است. در اینجا از شرایط مرزی داخل‌صفحه‌ای مقید (۲۶) استفاده شده است. نمودارهای شکل زیر با ۹ ترم و 9×9 نقطه به‌دست آمده است. در شکل ۸ خیز وسط صفحه برای دو صفحه کامپوزیتی متعامد و زاویه‌ای (تشکیل‌شده از ماد ۳) برای شرایط مرزی خارج‌صفحه‌ای یکسان گیردار (۲۴) و داخل‌صفحه‌ای مقید (۲۶) بررسی شده است و به‌خوبی نشان می‌دهد که خیز وسط یک صفحه کامپوزیتی زاویه‌ای [۴۵/-۴۵] در شرایط یکسان نسبت به خیز یک کامپوزیت دولایه متعامد کمتر به‌دست آمده است. پاسخ‌ها با نرم‌افزار المان محدود^{۱۳} با المان‌های گرفته‌شده از نوع پوسته^{۱۴} و خطی (مرتبه اول) و تعداد چهارصد المان مقایسه شده و روش حاضر نیز با تعداد ۹ ترم و 9×9 نقطه به‌دست آمده است. به‌منظور مقایسه بهتر، اعداد مرتبط به شکل ۸ در جدول ۱ آورده شده است

۵. نتیجه‌گیری

خمش غیرخطی صفحات کامپوزیتی، چهار لایه متقارن، متعامد [۰/۹۰] و همچنین زاویه‌ای [۴۵/-۴۵] برای انواع شرایط مرزی در این تحقیق مورد بررسی قرار گرفت. همان‌گونه که از شکل ۳ مشخص است، در روش باهم‌گذاری برای خمش غیرخطی نتایج برای تعداد ۹ ترم و 9×9 نقطه به هم‌گرایی رسیده‌اند، اما جهت حصول نتیجه بهتر نیاز به افزایش ترم و تعداد نقاط می‌باشد. در ادامه و در شکل ۵ میزان تغییر شکل لایه‌چینی‌ها و شرایط مرزی یکسان برای بارگذاری‌های کسینوسی و یکنواخت ارائه شده‌اند و همان‌طور که از شکل مشخص است مقدار تغییر شکل صفحه در شرایط یکسان و تحت بارگذاری کسینوسی کمتر از بارگذاری یکنواخت می‌باشد. در شکل ۶ اثر شرایط مرزی خارج‌صفحه‌ای برای لایه‌چینی یکسان مقایسه شده و به‌خوبی مشخص است که با سفت‌تر شدن شرایط مرزی میزان تغییر شکل صفحه کاهش یافته است. در نهایت، شکل ۸ اثر لایه‌چینی متفاوت را روی تغییر

مسائل با شرایط مرزی ترکیبی از تعداد ۹ ترم و تعداد نقاط 9×9 استفاده شده است.

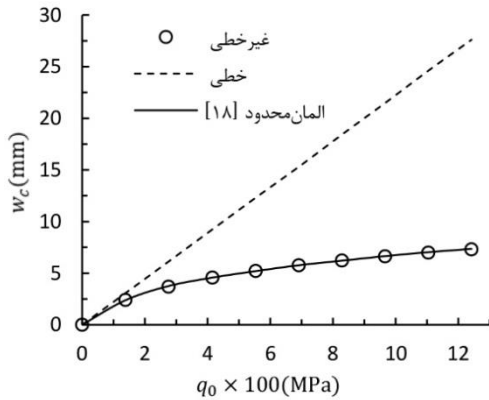
۴-۱. صفحات ارتوتروپیک

در نخستین بررسی نتایج حاصل از این شیوه برای یک صفحه ارتوتروپ (تشکیل‌شده از ماده ۱) چهار طرف گیردار (۲۴) و مقید (۲۶) و تحت بار جانبی یکنواخت مورد بررسی قرار گرفته شده است. در شکل ۴ خمش غیرخطی روش حاضر با مرجع [۱۸]، مربوط به روش المان محدود مقایسه شده است، در کنار این نتایج خمش خطی روش باهم‌گذاری نیز نمایش داده شده است. در مرجع مذکور از تعداد المان 8×8 استفاده شده و برای تخمین متغیرهای حالت U_0 و u_0 از توابع درون‌یاب خطی و برای w_0 از توابع درون‌یاب هرمیتی مرتبه سوم استفاده شده است. نتایج روش حاضر تطابق مناسبی با مرجع اشاره شده دارد.

در شکل ۵ به بررسی خمش غیرخطی صفحات چهار لایه متعامد [0/90]_s (تشکیل‌شده از ماده ۲) با شرایط مرزی چهار طرف گیردار (۲۴) و مقید (۲۶) تحت بار جانبی یکنواخت و کسینوسی پرداخته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، خیز وسط صفحه برای بارگذاری کسینوسی در بار $0/55$ حدود $19/5$ درصد کمتر از بار یکنواخت می‌باشد و هرچه میزان بارگذاری افزایش یابد این اختلاف کمتر می‌شود برای مثال در بار $1/5$ میزان اختلاف خیز وسط صفحه بارکسینوسی به بار یکنواخت حدود ۱۰ درصد می‌باشد که نشان‌دهنده کاهش این اختلاف می‌باشد. مرجع [۱۹] از روش المان محدود با المان‌های چهارگره‌ای استفاده کرده است. نتایج حاصل از تحقیق حاضر تطابق مناسبی با مرجع [۱۹] دارد.

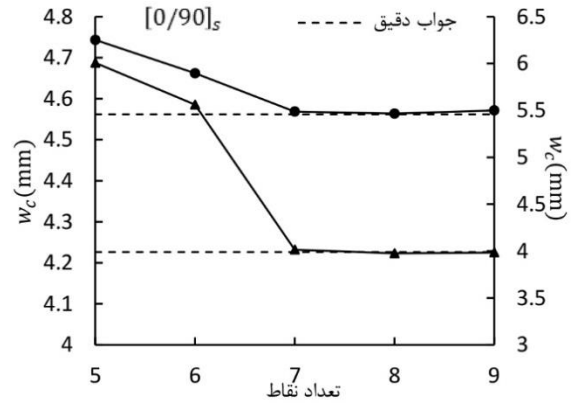
همان‌گونه که از شکل ۶ برمی‌آید، اثر شرایط مرزی روی یک صفحه کامپوزیتی چهارلایه با شرایط مرزی خارج‌صفحه‌ای گیردار و ساده و شرایط مرزی درون‌صفحه‌ای مقید بررسی شده و مشخص است که با سفت‌تر شدن شرایط مرزی خارج‌صفحه‌ای در شرایط بارگذاری و لایه‌چینی یکسان خیز کمتری به‌دست می‌آید. نتایج به‌دست آمده از روش باهم‌گذاری با توابع لژاندر با مرجع [۲۰] مقایسه شده و نشان‌دهنده دقت مناسب نتایج روش حاضر می‌باشد. در مرجع [۲۰] برای به‌دست آوردن نتایج از روش حساب تغییرات و المان محدود ترکیبی^{۱۲} استفاده نموده است. ویژگی روش المان محدود ترکیبی استفاده از متغیرهای مستقل اضافی

ایده اصلی در روش‌های بدون‌المان بر پایه تقریب‌زنی تمامی میدان مسئله تنها با گره‌هاست. بنابراین روش‌های بدون‌المان از سرعت قابل قبول و سادگی در حل معادلات دیفرانسیلی برخوردارند و به همین دلیل این‌گونه روش‌ها طی دهه‌های اخیر مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است.

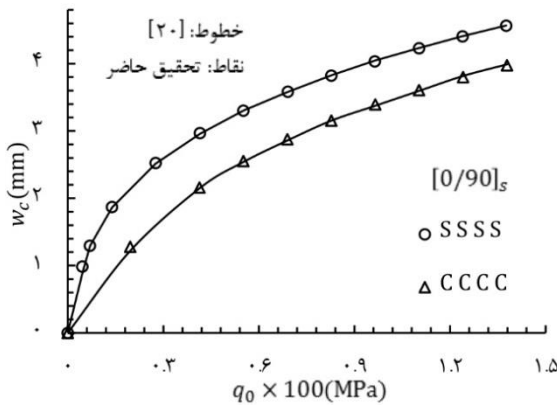


شکل ۴. خمیز وسط یک صفحه ارتوتروپ مربعی تحت شرایط مرزی خارج‌صفحه‌ای گیردار و داخل‌صفحه‌ای مقید

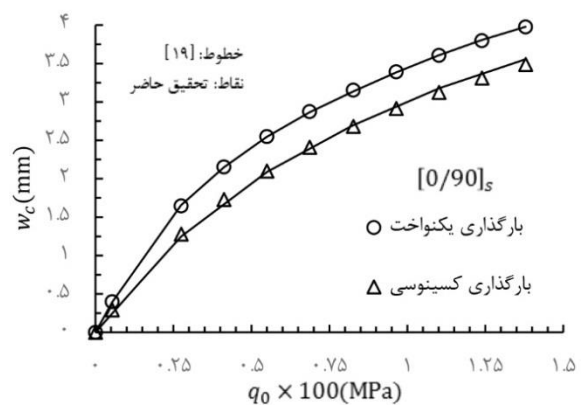
شکل صفحه با شرایط مرزی و بارگذاری یکسان نشان می‌دهد و همان‌گونه که در شکل مشخص است، خمیز لایه‌چینی زاویه‌ای در شرایط برابر کمتر است. مزیت روش بدون‌المان باهم‌گذاری تلاش به حل معادلات دیفرانسیل نه بر مبنای المان‌ها و روابط پیوستگی مربوط به آنها، که بر مبنای مجموعه‌ای از نقاط می‌باشد. لذا این



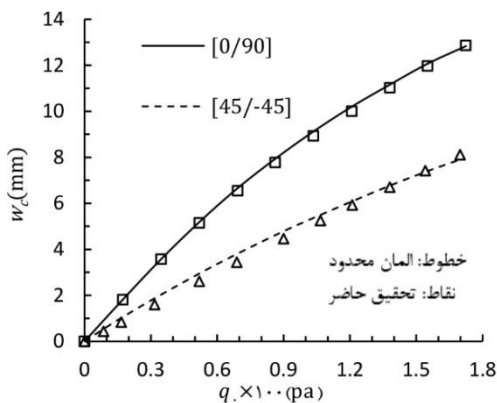
شکل ۳. همگرایی خمیز وسط یک صفحه کامپوزیتی با شرایط مرزی خارج‌صفحه‌ای چهار طرف گیردار و ساده و شرایط مرزی داخل‌صفحه‌ای مقید



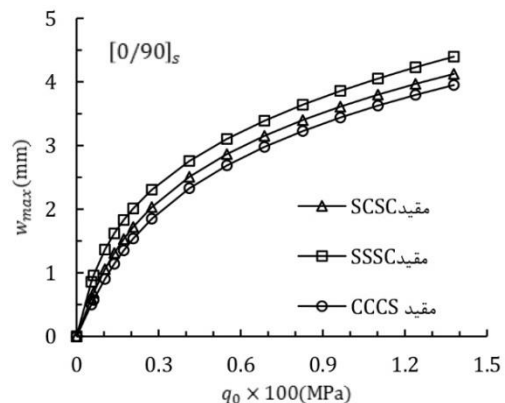
شکل ۶. اثر شرایط مرزی مختلف بر خمیز وسط یک صفحه



شکل ۵. اثر بار جانبی بر خمیز وسط یک صفحه با شرایط مرزی گیردار تحت بار جانبی یکنواخت و کسینوسی



شکل ۸. اثر لایه‌چینی متفاوت بر خمیز وسط یک صفحه کامپوزیتی



شکل ۷. اثر شرایط مرزی ترکیبی خارج‌صفحه‌ای بر خمیز ماکزیمم یک صفحه با شرایط درون‌صفحه‌ای مقید

جدول ۱. اثر لایہ چینی بر خیز وسط صفحات کامپوزیتی [۰/۹۰] و [۴۵/-۴۵]

نرم افزار المان محدود [۴۵/-۴۵]	نرم افزار المان محدود [۰/۹۰]	تحقیق حاضر [۴۵/-۴۵]	تحقیق حاضر [۰/۹۰]	بار (100×Pa)
۰	۰	۰	۰	۰
۰/۹۸	۰/۹۰	۰/۹۴	۰/۸۹	۰/۰۸۵
۳/۸۲	۳/۴۸	۳/۵۷	۳/۴۴	۰/۳۴
۷/۱۲	۶/۴۷	۶/۷۰	۶/۳۸	۰/۶۸
۱۰/۹۸	۹/۹۷	۱۰/۴۶	۹/۹۰	۱/۱۹
۱۲/۵۳	۱۱/۳۸	۱۲/۰۰	۱۱/۴۰	۱/۴۴
۱۳/۹۲	۱۲/۶۲	۱۳/۳۸	۱۲/۵۳	۱/۷۰

۶. مآخذ

- [1] J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis*, CRC Press, 2003.
- [2] J. Pagano, Exact Solution for Rectangle Bidirectional Composites and Sandwich Plates, *Journal of Composites Materials*, Vol. 4, No. 1, pp. 20-34, 1970.
- [3] S. Sirinivas, A. K. Rao, Bending, Vibration and Buckling of Simply Supported Thick Orthotropic Rectangular Plates and Laminates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 6, No. 11, pp. 1463-1481, 1970.
- [4] N. J. Pango, S. J Hatfield, Elastic Behaviour of Multilayerd Bidirectional Composites, *AIAA Journal*, Vol. 10, No. 7, pp. 931-933, 1972.
- [5] K. K. Shukla, Y. Nath, Nonlinear Analysis of Moderately Thick Laminated Rectangular Plates, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, Vol. 126, No. 8, pp. 831-839, 2000.
- [6] J. s. Chang, Y. P. Huang, Geometrically Nonlinear and Transiently Dynamic Behaviour of Laminated Composite Plates Based on a Higher Order Displacement Field, *Composite Structures*, Vol. 18, No. 4, pp. 327-364, 1991.
- [7] P. Yang, C. Noris, Y Stavsky, Elastic Wave Propagation in Heterogeneous Plates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 2, No. 4, pp. 665-684, 1991.
- [8] J. Whitney, N Pagano, Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 37, No. 4, pp. 1031-1036, 1970.
- [9] E. J. Kansa, Multiquarics Scattered Data Approximation with Applications to Computational Fluid Dynamics, Surface Approximations and Partial Derivative Estimates, *Computers and Mathematics.with Applications*, Vol. 19, No. 8-9, pp. 127-145, 1990.
- [10] K. M. Liew, Zhao, Xin, Ferrira, J. M. Antonio, A Review of Meshless Method for Laminated and Functionally Graded Plates and Shells, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 8, pp. 2031-2041, 2011.
- [11] J. N Reddy, *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford University Press, 2004.
- [12] Jeoot Singh., K. K. Shukla, Nonlinear Flexural of Laminated Composite Plates Using RBF Based Meshless Method, *Composite. Structures*, Vol. 94, No. 5, pp. 1714-1720, 2012.

پی نوشت

1. collocation
2. CPT
3. multiquadratic

4. uniform distributed load (UDL)
5. cosine load (CL)
6. Newton-Raphson
7. transformed reduced stiffness coefficients

-
8. residual
 9. Runge phenomenon
 10. movable
 11. immovable
 12. mixed finite element
 13. Abaqus
 14. Shell (S4R)