ارائه رویکرد جدید برای طراحی مسیر ماهواره با سیستم پیشرانش تراست پایین در مسئله سه‌جسمی انتقال از مدار ژئو به مدار هالو

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۵/۱۰
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۸/۱۱

کامران دانشجو[۱]، عباسعلی محمدی ده‌آبادی[۲]
۱- استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، kjoo@iust.ac.ir
۲- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

چکیده

هدف از این تحقیق در این مقاله روش جدیدی برای طراحی مسیر ماهواره در فاز اولیه طراحی مأموریت در مسئله سه‌جسمی انتقال از مدار ژئو به مدار هالو ارائه شده است. در این روش مسیر تقریبی و نزدیک به بهینه از نظر زمان مأموریت، از طریق تخمین زاویه تراست حاصل می‌شود، بدین صورت که زوایای تراست در صفحه و خارج از صفحه به‌صورت سری‌های فوریه با ضرایب محدود و نامعین در نظر گرفته می‌شوند. باتوجه به اینکه تعداد دورهای مسیر مشخص نیست، این پارامتر نیز به‌عنوان متغیر تصمیم گسسته مسئله بهینه‌سازی در نظر گرفته می‌شود. به دلیل وجود متغیرهای تصمیم پیوسته و گسسته، الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات گسسته به‌عنوان روش بهینه‌سازی استفاده شده است. از مزایای این روش می‌توان به سادگی اجرا و حجم کم محاسبات ریاضی، در نظر گرفتن تغییرات جرم ماهواره به دلیل مصرف سوخت، عدم اعمال قید خاص برای زاویه تراست نظیر تراست مماسی و تعیین زمان و مسیر نزدیک به بهینه اشاره کرد. برای ارزیابی روش ارائه‌شده، طراحی مسیر انتقال از مدار ژئو به مدار هالو برای سطوح تراست مختلف بررسی شده است. نتایج نشان دادند که رویکرد ارائه‌شده با دقت بسیار خوبی تعداد دورهای مسیر، جرم سوخت مصرفی، زمان و مسیر نزدیک به بهینه را ارائه می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: *طراحی مسیر تراست پایین، مسئله سه‌جسمی، طراحی اولیه مأموریت، روش تقریبی و نزدیک به بهینه، الگوریتم ازدحام ذرات گسسته*

A new approach for low-thrust trajectory design for GEO to HALO transfer in three-body problem

Kamran Daneshjou[1], Abbasali Mohammadi Dehabadi[2]

1- Professor, School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, kjoo@iust.ac.ir
2- Ph.D candidate, School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran

Abstract

In this study, a new approach is proposed to design low-thrust trajectory in the preliminary design phase for GEO to Halo transfer in the three-body problem. In this method, the approximate and near optimal trajectory is conducted through guessing thrust angles. In this approach, the in-plane and out of plane thrust angles are considered as finite Fourier series with unknown coefficients. Since the number of the trajectory revolutions is unknown, this parameter is also considered as a discrete decision variable of optimization algorithm. Due to the existence of continues and discrete decision variables, discrete particle swarm optimization algorithm is employed to solve the problem. The advantages of this method include: simplicity of execution and low volume of mathematical computation, considering satellite mass, do not assume special restriction for thrust angle such as tangential thrust and determination the near optimal mission duration. In order to evaluate the proposed method, Trajectory design of GEO to Halo is performed for several level of thrust. Results indicate that this approach determines the number of trajectory revolutions, fuel consumed, near optimal duration and trajectory of the mission with high accuracy.

Keywords: *low thrust trajectory design, three-body problem, preliminary design phase, approximate and near optimal solution, discrete particle swarm optimization algorithm.*

۱. مقدمه

اکتشافات اعماق فضا و سفر به سیاره‌های دیگر، نیازمند ایجاد تغییرات بزرگ در سرعت در مدت زمان طولانی و بنابراین فناوری‌های پیشرفته در سیستم‌های پیشرانش است. سیستم‌های پیشرانش تراست پایین (مانند سیستم پیشرانش الکتریکی) در مقایسه با سیستم‌های پیشرانش شیمیایی، ضربه ویژه بالایی دارند و تراست‌های پیوسته در مدت زمان طولانی فراهم می‌کنند. همچنین در این سیستم‌ها، سوخت به‌صورت مؤثرتری در طی مأموریت مصرف می‌شود و ظرفیت حمل بار ماهواره افزایش می‌یابد. ویژگی‌های مهمی از این قبیل، سبب شده است که سیستم‌های پیشرانش تراست پایین در چند سال اخیر بسیار مورد توجه قرار گیرند و تاکنون در مأموریت‌های مهمی [۱-۳] به‌کارگیری شده‌اند.

یکی از چالش‌هایی که در طراحی مأموریت‌های با سیستم پیشرانش تراست پایین وجود دارد، مسئله طراحی مسیر بهینه مأموریت می‌باشد. این نوع مسائل در حوزه مسائل با دو مقدار مرزی[۱] قرار می‌گیرند که حل این‌گونه مسائل پیچیدگی‌های مخصوص به خود را دارد. روش‌هایی که برای حل مسئله طراحی مسیر بهینه با سیستم پیشرانش تراست پایین استفاده می‌شود، در دو گروه روش‌های مستقیم[۲] و غیرمستقیم[۳] [۴-۸] قرار می‌گیرند. در این روش‌ها، به دلیل وجود متغیرهای الحاقی، تعداد متغیرهای حالت دو برابر می‌شود. همچنین مقادیر متغیرهای الحاقی در زمان اولیه $(t = 0)$، مشخص نیست و با توجه به اینکه مفهوم فیزیکی معینی ندارند، حدس اولیه این متغیرها در زمان $t = 0$ دشوار است. در مسئله مینیمم زمان، علاوه بر حدس اولیه متغیرهای الحاقی، زمان مأموریت نیز باید حدس زده شود؛ بنابراین مشابه متغیرهای الحاقی، بدون آگاهی از زمان تقریبی مأموریت، حدس اولیه این متغیر نیز دشوار خواهد بود [۹-۱۱]. بررسی مطالعات نشان می‌دهد که در حالت کلی این روش‌ها، برای کاربردهایی که طراحی اولیه مأموریت مورد نظر است و باید سناریوهای مأموریت متفاوت و نسبتاً زیاد، با شرایط ابتدایی و انتهایی مختلف بررسی شود، مناسب نیستند [۱۲ و ۱۳]. یکی از رایج‌ترین روش‌هایی که برای طراحی مسیر ماهواره در فاز اولیه مأموریت ارائه شده است، روش‌های مبتنی بر شکل هستند که در آن‌ها یک تابع شکل خاص برای مسیر ماهواره در نظر گرفته می‌شود و ضرایب مجهول این توابع با استفاده از شرایط مرزی مسئله محاسبه می‌شوند.

پتروپولوس و لانگوسکی [۱۴ و ۱۵] برای اولین بار مفهوم توابع مبتنی بر شکل را برای حل مسائل مربوط به مسیرهای تراست پایین ارائه کردند. آن‌ها یک تابع نمایی سینوسی را به‌عنوان مسیر ماهواره در نظر گرفتند. وال و کان‌وی [۱۶ و ۱۷] تابع شکل چندجمله‌ای معکوس در مختصات استوانه‌ای را ارائه کردند که می‌تواند شرایط مرزی موقعیت و سرعت را در سه بعد ارضا کند. وانگ و همکاران [۱۸] چندجمله‌ای معکوس را برای در نظر گرفتن قیود مربوط به شعاع و تراست بهبود دادند. تابع شکلی بر اساس مختصات کروی (r, θ, z) توسط نوواک و وسیل [۱۹] معرفی شد. زی و همکاران [۲۰] از این روش برای طراحی مسیر حرکت‌های بزرگ خارج از صفحه استفاده کردند. وسیل و پاسکال [۲۱] از المان‌های اصلاح‌شده اعتدال[۴] برای تعریف تابع شکل استفاده کردند. در مطالعه [۲۲]، وگلیئر

روش شبه طیفی را ارائه کرده است که در آن سه تابع شکل برای مدل کردن مسیر در دستگاه مختصات استوانه‌ای استفاده می‌شود. وگلیئر برای توابع شکل، از سری‌های توانی به دلیل سادگی آن‌ها و توانایی آن‌ها در نمایش توابع مثلثاتی، استفاده کرد. عبدالخلیک و طاهری [۲۳-۲۵] تابع شکلی بر اساس سری فوریه محدود برای تعیین مسیر ماهواره ارائه کردند. بر خلاف روش‌های مبتنی بر شکل قبلی، با این روش شکل خاصی برای مسیر در نظر گرفته نمی‌شود و با انتخاب ضرایب مختلف برای سری فوریه، شکل‌های متفاوتی به دست می‌آید. در مطالعه [۲۶]، تابع شکلی بر اساس هودوگراف سرعت ماهواره توسط گندلاچ و نومن ارائه شده است. در این روش برخلاف روش‌های دیگر، تابع شکل برای پروفایل سرعت در نظر گرفته می‌شود به گونه‌ای که مسیر ماهواره، با انتگرال‌گیری از تابع شکل سرعت به دست می‌آید. ژنگ و همکاران [۲۷] تابع شکلی بر اساس سری زمانی چندجمله‌ای را بررسی کردند. همچنین هو و همکاران [۲۸ و ۲۹] تابع شکلی بر اساس منحنی بیزر[۵] برای طراحی مسیر تراست پایین ارائه کردند.

در حالت کلی، هر یک از توابع شکل ارائه‌شده نقاط ضعف و قوت مربوط به خود را دارند، اما حداقل یکی از موارد شامل: صرف نظر کردن از تغییرات جرم ماهواره به دلیل مصرف سوخت، در نظر گرفتن قیود خاص (مانند زاویه تراست مماسی) برای تراست اعمالی، ناتوانی در حل مسائل سه‌جسمی سه‌بعدی (به‌غیراز روش سری فوریه که توانایی حل مسائل سه‌جسمی دوبعدی را دارد)، ناتوانی در بهینه‌سازی به دلیل عدم وجود پارامتر آزاد، وجود دارد. علاوه‌براین، روش مبتنی بر شکلی برای طراحی مسیر ماهواره در مسئله سه‌جسمی سه‌بعدی انتقال از مدار ژئو به مدار هالو ارائه نشده است.

در این مطالعه، برای حل چالش‌های فوق، روش جدیدی برای طراحی مسیر تقریبی و نزدیک به بهینه در مسئله انتقال از مدار ژئو به مدار هالو ارائه شده است که مبتنی بر حدس زاویه تراست می‌باشد. در این رویکرد برای اینکه زاویه تراست به تابع خاصی محدود نشود، زوایای تراست در صفحه و خارج از صفحه به‌صورت سری فوریه با ضرایب محدود و نامعین در نظر گرفته می‌شود که مقادیر آن‌ها با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی و با هدف مینیمم کردن زمان مأموریت تعیین می‌شود.

تقسیم‌بندی بخش‌های مقاله بدین صورت است که در بخش دوم، دینامیک مسئله سه‌جسمی در دستگاه مرجع سینودیک[۶] بررسی می‌شود. پس‌ازآن، در بخش سوم با استفاده از اصل ماکزیمم پونتریاگین، سطح تراست برای مسئله مینیمم زمان تعیین می‌شود. سپس در بخش چهارم، روش تقریبی و نزدیک به بهینه، بیان معادلات دینامیک در دستگاه چرخان قطبی و فرایند حل مسئله ارائه می‌شود. درنهایت در بخش پنجم، طراحی مسیر در مسئله انتقال از مدار ژئو به مدار هالو با استفاده از این رویکرد، بررسی می‌شود.

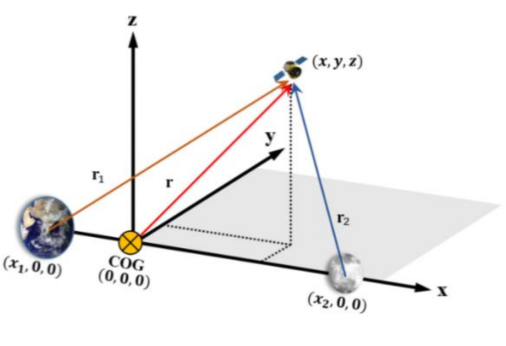
۲. فرمول‌بندی مسئله سه‌جسمی

نقاط لاگرانژ (L_1 ، L_2 یا L_3)، نقاطی خالی در فضا هستند که حاصل تعامل بین گرانش دو جسم اصلی و شتاب‌های کوریولیس و گریز از مرکز ماهواره می‌باشد. موقعیت این نقاط با مساوی صفر قرار دادن سرعت‌ها و شتاب‌های معادله حرکت مسئله سه‌جسمی، محاسبه

می‌شود. مدارهای هالو، مدارهای متناوب حول نقاط لاگرانژ هستند که ماهواره‌ها در این مدارها، مشاهده مداومی از دو جسم اصلی دارند، به‌همین دلیل از این مدارها برای اهداف علمی مانند تلسکوپ‌های فضایی استفاده می‌شود. در ادامه معادلات دینامیک ماهواره در مسئله انتقال از مدار ژئو به مدار هالو بیان می‌شود.

برای محاسبه معادلات دینامیک ماهواره در مسئله سه‌جسمی، از دستگاه مرجع سینودیک استفاده شده است. مطابق شکل ۱، مبدأ این دستگاه بر روی مرکز جرم دو جسم اصلی قرار دارد و همراه با دو جسم اصلی دوران می‌کند، درنتیجه در این دستگاه، دو جسم اصلی ثابت به نظر می‌رسند. جسم‌های اصلی بر روی محور x قرار دارند، محور y عمود بر محور x و حرکت در صفحه را توصیف می‌کند و محور z با استفاده از قاعده دست راست به دست می‌آید. معادلات دینامیک مسئله سه‌جسمی در دستگاه سینودیک به‌صورت زیر بیان می‌شود [۲۸ و ۲۹]:

$$\ddot{r} + 2\omega \times r + \omega \times (\omega \times r) = -Gm_1 \frac{r-r_1}{r_1^3} - Gm_2 \frac{r-r_2}{r_2^3} \qquad (۱)$$



شکل ۱. دستگاه مرجع سینودیک

در معادله فوق، G ثابت گرانش جهانی است. $r = [x, y, z]^T$ بیانگر موقعیت ماهواره، $r_1 = [x_1, 0,0]^T$ و $r_2 = [x_2, 0,0]^T$ به‌ترتیب بیانگر بردار موقعیت جسم‌های اصلی m_1 و m_2 نسبت به مبدأ دستگاه مختصات و $r_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2 + z^2}$ و $r_2 = \sqrt{(x-x_2)^2 + y^2 + z^2}$ به‌ترتیب بیانگر فاصله ماهواره نسبت به جسم‌های اصلی m_1 و m_2 است. همچنین $\omega = [0,0,\Omega]^T$ بیانگر سرعت زاویه‌ای جسم‌های اصلی حول مرکز جرم است.

رابطه (۱) برحسب مؤلفه‌های x، y و z به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - 2\Omega\dot{y} - \Omega^2 x = -\mu_1 \frac{x-x_1}{r_1^3} - \mu_2 \frac{x-x_2}{r_2^3} \\ &\ddot{y} + 2\Omega\dot{x} - \Omega^2 y = -\mu_1 \frac{y}{r_1^3} - \mu_2 \frac{y}{r_2^3} \\ &\ddot{z} = -\mu_1 \frac{z}{r_1^3} - \mu_2 \frac{z}{r_2^3} \end{aligned} \qquad (۲)$$

در این رابطه، μ_1 و μ_2 به‌ترتیب پارامتر گرانشی جسم‌های اصلی اول و دوم است.

در حوزه مسائل سه‌جسمی رایج است که واحدها به‌گونه‌ای نرمال‌سازی شوند که $r_{12} = x_2 - x_1 = 1$، $\Omega = 1$ و $G = 1$ باشند. این نوع بی‌بعدسازی سبب می‌شود که معادلات حرکت فقط به یک پارامتر که پارامتر جرمی[7] نامیده می‌شود، وابسته باشند. پارامتر جرمی، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{\mu} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \; m_2 < m_1 \qquad (۳)$$

در جدول ۱، مقدار پارامتر جرمی برای مسائل سه‌جسمی مختلف ارائه شده است.

جدول ۱. مقدار پارامتر جرمی برای مسائل سه‌جسمی مختلف

جسم‌های اصلی	پارامتر جرمی
زمین- ماه	۰/۰۱۲۱۵۰۵۸۲
خورشید- زمین	۳/۰۰۳۴×۱۰-۶
خورشید-مریخ	۳/۲۲۶۸×۱۰-۷

با توجه به اینکه مبدأ دستگاه مختصات چرخان بر روی مرکز جرم قرار دارد، بنابراین:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0 \tag{۴}$$

همچنین $r_{12} = x_2 - x_1$ است، درنتیجه روابط زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\bar{\mu}.\, r_{12} = -\bar{\mu}, \\ x_2 &= (1-\bar{\mu}).\, r_{12} = 1-\bar{\mu} \end{aligned} \tag{۵}$$

معادلات (۲) با استفاده از رابطه (۵) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\dot{y} + x - \frac{1-\bar{\mu}}{r_1^3}(x+\bar{\mu}) - \frac{\bar{\mu}}{r_2^3}(x+\bar{\mu}-1) \\ \ddot{y} &= -2\dot{x} + y - \frac{1-\bar{\mu}}{r_1^3}y - \frac{\bar{\mu}}{r_2^3}y \\ \ddot{z} &= -\frac{(1-\bar{\mu})}{r_1^3}z - \frac{\bar{\mu}}{r_2^3}z \end{aligned} \tag{۶}$$

در روابط فوق، r_1 و r_2 عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x+\bar{\mu})^2 + y^2 + z^2} \\ r_2 &= \sqrt{(x+\bar{\mu}-1)^2 + y^2 + z^2} \end{aligned} \tag{۷}$$

اگر علاوه بر اثر گرانش دو جسم اصلی، تراست هم به ماهواره اعمال شود، مسئله سه‌جسمی کنترل‌شده ایجاد می‌شود. در این حالت، معادلات دینامیکی به‌صورت زیر اصلاح می‌شود:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\dot{y} + x - \frac{1-\bar{\mu}}{r_1^3}(x+\bar{\mu}) - \frac{\bar{\mu}}{r_2^3}(x+\bar{\mu}-1) + \frac{uT_{max}}{m}\alpha_x \\ \ddot{y} &= -2\dot{x} + y - \frac{1-\bar{\mu}}{r_1^3}y - \frac{\bar{\mu}}{r_2^3}y + \frac{uT_{max}}{m}\alpha_y \\ \ddot{z} &= -\frac{(1-\bar{\mu})}{r_1^3}z - \frac{\bar{\mu}}{r_2^3}z + \frac{uT_{max}}{m}\alpha_z \\ \dot{m} &= -\frac{uT_{max}}{c} \end{aligned} \tag{۸}$$

که $\alpha = [\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z]^T$ بردار یکه در جهت بردار تراست، $u \in [0,1]$ پارامتر تنظیم دریچه گاز[8] و c سرعت گازهای خروجی سیستم پیشرانش[9] است که با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$c = I_{sp} g_0 \tag{۹}$$

در رابطه فوق، I_{sp} ضربه ویژه[10] و g_0 شتاب گرانش در سطح سیاره است. m جرم نرمال‌شده می‌باشد که مقدار آن در ابتدای مأموریت برابر ۱ در نظر گرفته می‌شود ($m(0) = 1$). همچنین، جرم سوخت مصرفی نرمال‌شده با m_p نشان داده می‌شود که مقدار آن با استفاده از رابطه زیر تعیین می‌گردد:

$$m_p = m(0) - m(t_f) = 1 - m(t_f) \tag{۱۰}$$

با در نظر گرفتن $r = [x, y, z]^T$، $v = [v_x, v_y, v_z]^T$ و $x = [r^T, v^T, m]^T$، معادله (۹) به‌صورت معادلات فضای حالت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{v} \\ \dot{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ g(r) + h(v) + (uT_{max}/m)\alpha \\ -uT_{max}/c \end{bmatrix} \tag{۱۱}$$

که توابع $g(r)$ و $h(v)$ عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} g(r) &= \begin{bmatrix} x - \frac{1-\bar{\mu}}{r_1^3}(x+\bar{\mu}) - \frac{\bar{\mu}}{r_2^3}(x+\bar{\mu}-1) \\ y - \frac{1-\bar{\mu}}{r_1^3}y - \frac{\bar{\mu}}{r_2^3}y \\ -\frac{(1-\bar{\mu})}{r_1^3}z - \frac{\bar{\mu}}{r_2^3}z \end{bmatrix} \\ h(v) &= \begin{bmatrix} 2v_y \\ -2v_x \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{۱۲}$$

در این مطالعه، انتقال بین دو وضعیت معین مدنظر است (مسئله با دو مقدار مرزی)، بنابراین شرایط مرزی مسئله به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} r(t_i) &= r_i \qquad v(t_i) = v_i \\ m(t_i) &= m_0 = 1 \\ r(t_f) &= r_f \qquad v(t_f) = v_f \end{aligned} \tag{۱۳}$$

در روابط فوق t_i و t_f به‌ترتیب بیانگر زمان

شروع و پایان مأموریت است.

۳. فرمول‌بندی کنترل بهینه برای مسئله مینیمم زمان

در فاز اولیه طراحی مأموریت، محاسبه کمترین زمان مأموریت برای هر شتاب تراست معین (T_{max})، ضروری است [۳۲]. به‌عبارت‌دیگر، مسئله مینیمم زمان باید قبل از هر مسئله بهینه‌سازی دیگر (بهینه‌سازی سوخت و انرژی) حل شود، زیرا اگر زمان کمتری نسبت به زمان مینیمم در نظر گرفته شود، مأموریت امکان‌پذیر نخواهد بود.

در این بخش با استفاده از قوانین کنترل بهینه، سطح تراست سیستم پیشرانش برای مسئله مینیمم زمان تعیین می‌شود.

برای مسئله مینیمم زمان، تابعی به‌صورت زیر است:

$$J_t = \int_0^{t_f} 1\, dt \qquad (۱۴)$$

همچنین، همیلتونین به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۳۳]:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = L(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t) f(x(t), u(t), t) \qquad (۱۵)$$

در رابطه فوق، L یک تابع اسکالر و $x(t)$ و $u(t)$ به ترتیب متغیرهای حالت و کنترلی مسئله هستند و λ بردار متغیرهای الحاقی[۱۱] نامیده می‌شود. با جایگذاری رابطه‌های (۱۱) و (۱۴) در معادله (۱۵) همیلتونین به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$H_t = \lambda_r . v + \lambda_v . \left[g(r) + h(v) + \left(\frac{uT_{max}}{m}\right)\alpha\right] - \lambda_m \left(\frac{uT_{max}}{c}\right) + 1 \qquad (۱۶)$$

همچنین معادلات اویلر لاگرانژ (یا به‌عبارتی معادله متغیرهای الحاقی) عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_r &= \left(-\frac{\partial H_t}{\partial r}\right)^T == -G^T \lambda_v \\ \dot{\lambda}_v &= \left(-\frac{\partial H_t}{\partial v}\right)^T = -\lambda_r - H^T \lambda_v \\ \dot{\lambda}_m &= -\frac{\partial H_t}{\partial m} = -\frac{T_{max}}{m^2} u(\lambda_v . \alpha) \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

که توابع G و H با استفاده از رابطه‌های زیر محاسبه می‌شوند:

$$G = \frac{\partial g(r)}{\partial r}, \quad H = \frac{\partial h(v)}{\partial v} \qquad (۱۸)$$

بنابراین مجموعه معادلات دیفرانسیل مسئله مینیمم زمان با استفاده از فرمول‌بندی کنترل بهینه، از ترکیب معادلات دینامیک (رابطه (۱۱)) و معادلات متغیرهای الحاقی (رابطه(۱۷)) به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{v} \\ \dot{m} \\ \dot{\lambda}_r \\ \dot{\lambda}_v \\ \dot{\lambda}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ g(r) + h(v) + (uT_{max}/m)\alpha \\ -uT_{max}/c \\ -G^T \lambda_v \\ -\lambda_r - H^T \lambda_v \\ -T_{max} u \lambda_v / m^2 \end{bmatrix} \qquad (۱۹)$$

به‌منظور تعیین متغیرهای کنترلی α^* و u^* برای مسیر بهینه، از اصل ماکزیمم پونتریاگین استفاده می‌شود. بر اساس این اصل، همیلتونین در طول مسیر بهینه باید مینیمم باشد. بنابراین، با توجه به اینکه همواره $\frac{uT_{max}}{m} \geq 0$ ، باید جهت بردار تراست به‌صورت زیر باشد:

$$\alpha^* = -\frac{\lambda_v}{\lambda_v} \qquad (۲۰)$$

با جایگذاری رابطه (۱۹) در معادله (۱۶)، معادله همیلتونین به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$H_t = \lambda_r . v + \lambda_v . [g(r) + h(v)] + S_t \left(\frac{uT_{max}}{c}\right) + 1 \qquad (۲۱)$$

که $S_t = -\frac{c}{m}\lambda_v - \lambda_m$ تابع سوییچینگ[۱۲] نامیده می‌شود.

برای اینکه رابطه (۲۱) مینیمم شود، با توجه به مقدار تابع سوییچینگ، دو مقدار برای متغیر کنترلی u^* وجود دارد:

$$\begin{cases} u^* = 0 & \text{if} \;\; S_t > 0 \\ u^* = 1 & \text{if} \;\; S_t < 0 \end{cases} \qquad (۲۲)$$

با توجه به اینکه زمان مسئله محدود نیست[۱۳] و همچنین مقدار سوخت معینی برای انتهای مأموریت در نظر گرفته نشده است، بنابراین، بر اساس شرایط تعامد[۱۴] [۳۳]، نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} H_t(t_f) &= 0 \\ \lambda_m(t_f) &= 0 \end{aligned} \qquad (۲۳)$$

بر اساس رابطه فوق، مقدار متغیر الحاقی مربوط به جرم در انتهای مأموریت برابر صفر است ($\lambda_m(t_f) = 0$)، از طرف دیگر رابطه (۱۷) نشان می‌دهد که نرخ تغییرات متغیر الحاقی جرم نسبت به زمان منفی است ($\dot{\lambda}_m = -\frac{T_{max}}{m^2} u\lambda_v < 0$)، بنابراین $\lambda_m(t) > 0$ و در نتیجه $S_t < 0$ است. با توجه به این نکته و بر اساس رابطه (۲۱)، برای اینکه همیلتونین در طی مسیر بهینه در کمترین مقدار خود باشد، می‌بایست $u^* = 1$ باشد. به‌عبارت‌دیگر می‌توان به این نتیجه مهم دست یافت که در مسئله مینیمم زمان، تراست باید همواره روشن و در حداکثر مقدار خود باشد.

۴. ارائه روش حل تقریبی و نزدیک به بهینه

در بخش سوم این نتیجه مهم حاصل شد که در مسئله مینیمم زمان تراست همواره روشن و در حداکثر مقدار خود قرار دارد. با استفاده از این نکته، در این بخش روش جدیدی برای طراحی مسیر تقریبی و نزدیک به بهینه ارائه می‌شود.

در این رویکرد، زاویه تراست در صفحه ($\delta(t)$) و خارج از صفحه ($\phi(t)$) به‌صورت یک سری فوریه با ضرایب محدود و نامعین در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N_\delta} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{t_f}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{t_f}t\right) \\ \phi(t) &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{N_\phi} c_n \cos\left(\frac{n\pi}{t_f}t\right) + d_n \sin\left(\frac{n\pi}{t_f}t\right) \end{aligned} \qquad (۲۴)$$

که a_n, b_n و c_n, d_n به‌ترتیب ضرایب سری فوریه زاویه تراست در صفحه و خارج از صفحه هستند. در نظر گرفتن زاویه تراست به‌صورت سری فوریه به این دلیل است که توابع پیوسته را می‌توان برحسب سری فوریه محاسبه کرد.

در این رویکرد، علاوه بر مینیمم شدن زمان مأموریت، ضرایب سری فوریه رابطه (۲۴) می‌بایست به‌گونه‌ای تعیین شوند که شرایط ابتدایی و انتهایی مسئله ارضا شود. به همین دلیل برای تعیین ضرایب سری فوریه از الگوریتم بهینه‌سازی استفاده می‌شود که در آن، زمان مأموریت به‌عنوان تابع هدف و ضرایب سری فوریه، متغیرهای تصمیم مسئله بهینه‌سازی هستند.

نکته مهمی که باید به آن توجه کرد این است که طبیعتاً شرایط ابتدایی مسئله ارضا می‌شود، اما با توجه به اینکه روش ارائه شده، یک روش تقریبی می‌باشد، ممکن است شرایط انتهایی که با استفاده از حل مسئله به دست می‌آید، با شرایط موردنظر مسئله یکسان نباشد و با یکدیگر اختلاف داشته باشند. به‌عبارت‌دیگر، اگر وضعیت نهایی موردنظر مسئله x^f و وضعیت نهایی که با حدس زاویه تراست و حل معادلات دینامیکی به دست می‌آید، $x(t_f)$ باشد، آنگاه:

$$\left|x^f - x(t_f)\right| = \zeta \qquad (۲۵)$$

برای اینکه اختلاف در وضعیت نهایی از مقدار معینی بیشتر نشود و مسئله واقعی نزدیک باشد، مقدار مشخصی برای ζ در نظر گرفته می‌شود. بنابراین مسئله به‌صورت یافتن ضرایب سری فوریه رابطه (۲۴) به‌گونه‌ای که زمان مأموریت مینیمم شود و اختلاف در وضعیت نهایی از مقدار ζ بیشتر نشود، بیان می‌شود. این تعریف بیانگر این است که با یک مسئله بهینه‌سازی مقید سروکار داریم که در بخش ۴-۲ بررسی می‌شود.

موضوع مهم دیگری که در استفاده از رویکرد ارائه‌شده اهمیت دارد، انتخاب دستگاه مختصات مناسب (کارتزین یا قطبی) برای بیان معادلات دینامیکی و شرایط مرزی است. در ابتدا، دستگاه مختصات چرخان کارتزین (دستگاه مرجع سینودیک) انتخاب شد و از معادلات در این دستگاه، برای بررسی رویکرد ارائه‌شده استفاده شد. نتایج نشان داد که در این حالت پاسخ‌های مناسبی به دست نمی‌آید، زیرا در این دستگاه نمی‌توان تعداد دورهای مسیر را کنترل کرد و باید از شکل قطبی معادلات حرکت برای حل مسئله استفاده شود. منظور از کنترل تعداد دورهای مسیر این است که اگر به‌عنوان‌مثال فرض شود موقعیت نهایی ماهواره در دستگاه مختصات کارتزین $(x, y) = (1,1)$ باشد، در این حالت موقعیت ماهواره در دستگاه قطبی به صورت $(r, \theta) = (\sqrt{2}, 2\pi N_{rev} + \pi/4)$ تعریف می‌شود، که N_{rev} یک عدد حسابی و بیانگر تعداد دورهای مسیر است. بنابراین به ازای یک موقعیت در دستگاه مختصات کارتزین، بی‌شمار موقعیت در دستگاه مختصات قطبی وجود دارد و این ویژگی سبب می‌شود که بتوان تعداد دورهای مسیر را در دستگاه مختصات قطبی کنترل کرد.

اگر شرایط نهایی مسئله در دستگاه مختصات قطبی ارائه شود، زاویه قطبی نهایی مشخص است و نیازی به یافتن تعداد دورهای مسیر نیست، اما مشکل زمانی ایجاد می‌شود که شرایط انتهایی در دستگاه مختصات کارتزین بیان شود. در این حالت باید شرایط انتهایی از دستگاه مختصات کارتزین به دستگاه مختصات قطبی تبدیل شوند، اما در این حالت تعداد دورهای مسیر مشخص نیست (مثالی که در بالا ارائه شد). برای حل این مشکل، فرض شده است که تعداد دورهای مسیر نیز یکی از متغیرهای تصمیم الگوریتم بهینه‌سازی باشد و مقدار آن با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی تعیین شود. به‌عبارت‌دیگر، زاویه قطبی شرایط انتهایی به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\theta(t_f) = 2\pi N_{rev} + \theta_f \qquad (۲۶)$$

که θ_f زاویه قطبی است که از طریق تبدیل شرایط انتهایی از دستگاه مختصات کارتزین به دستگاه مختصات قطبی به دست می‌آید و مقدار آن در بازه $[0, 2\pi)$ است. با توجه به اینکه متغیر تصمیم N_{rev}، یک متغیر گسسته محسوب می‌شود (برخلاف زمان مأموریت و ضرایب سری فوریه که متغیرهای پیوسته هستند)، مسئله بهینه‌سازی متشکل از متغیرهای تصمیم گسسته و پیوسته خواهد بود. به‌همین دلیل، در این مطالعه از الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات گسسته[15] [۳۴] برای حل مسئله استفاده شده است.

بنابراین، به‌کارگیری روش ارائه‌شده در این مطالعه سبب می‌شود که مسئله تعیین تعداد دورهای مسیر مربوطبه روش‌های مبتنی بر شکل برطرف شود.

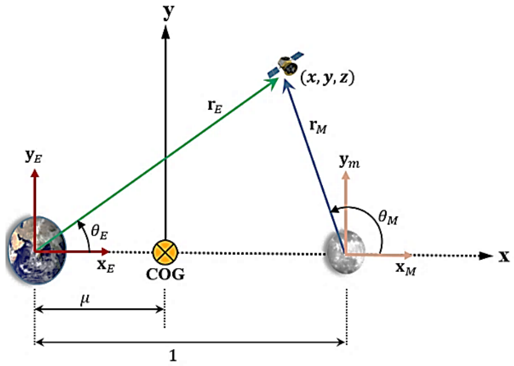
۴-۱. معادلات دینامیک در دستگاه چرخان قطبی

با توجه به دلایل مطرح‌شده در بخش قبل، برای حل مسئله طراحی مسیر انتقال از مدار ژئو به مدار هالو، به معادلات در دستگاه چرخان قطبی که مبدأ آن بر روی زمین (ECRF[16]) قرار دارد، نیاز است. با توجه به شکل ۲، رابطه بین مؤلفه-های قطبی دستگاه ECRF و دستگاه مرجع سینودیک به‌صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
& x+\bar{\mu}=r_E\cos(\theta_E) \\
& y=r_E\sin(\theta_E) \\
& r_E=\sqrt{(x+\bar{\mu})^2+y^2} \\
& \theta_E=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x+\bar{\mu}}\right) \\
& \dot{r}_E=\frac{\dot{x}(x+\bar{\mu})+\dot{y}y}{\sqrt{(x+\bar{\mu})^2+y^2}} \\
& \dot{\theta}_E=\frac{\dot{y}(x+\bar{\mu})-\dot{x}y}{y^2+(x+\bar{\mu})^2}
\end{aligned}
\qquad (۲۷)
$$

با جایگذاری رابطه (۲۷) در رابطه (۸) و ضرب معادلات حاصله در ماتریس دوران، مدل دینامیکی مسئله سه‌جسمی محدود در دستگاه قطبی ECRF به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
& \ddot{r}_E=r_E(1+\dot{\theta}_E)^2-\bar{\mu}\cos(\theta_E)-\frac{(1-\bar{\mu})r_E}{R^3_{S/E-E}}-\frac{\bar{\mu}(r_E-\cos(\theta_E))}{R^3_{S/M-E}}+\frac{uT_{max}}{m}\sin(\delta).\sin(\phi) \\
& \ddot{\theta}_E=\frac{1}{r_E}\left[-2\dot{r}_E(1+\dot{\theta}_E)+\bar{\mu}\sin(\theta_E)\left(1-\frac{1}{R^3_{S/M-E}}\right)+\frac{uT_{max}}{m}\cos(\delta).\sin(\phi)\right] \\
& \ddot{z}=\left[-\frac{(1-\bar{\mu})}{R^3_{S/E-E}}-\frac{\bar{\mu}}{R^3_{S/M-E}}\right]z+\frac{uT_{max}}{m}\cos(\phi) \\
& \dot{m}=-\frac{T_{max}}{c}
\end{aligned}
\qquad (۲۸)
$$



شکل ۲. رابطه بین مؤلفه‌های دستگاه مرجع سینودیک و دستگاه چرخان قطبی زمین و ماه

درروابط فوق،

$R_{S/M-E}=\sqrt{r_E^2-2r_E\cos(\theta_E)+z^2+1}$ و $R_{S/E-E}=\sqrt{r_E^2+z^2}$ می‌باشد. همچنین شرایط مرزی (۱۳) - که در دستگاه مرجع سینودیک بیان شده است- با استفاده از رابطه (۲۷) به شرایط مرزی در دستگاه قطبی ECRF تبدیل می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
& r_E(t_i)=r_i \qquad \dot{r}_E(t_i)=\dot{r}_i \\
& \theta_E(t_i)=\theta_i \qquad \dot{\theta}_E(t_i)=\dot{\theta}_i \\
& z_E(t_i)=z_i \qquad \dot{z}_E(t_i)=\dot{z}_i \\
& m(t_i)=m_0=1 \\
& r_E(t_f)=r_f \qquad \dot{r}_E(t_f)=\dot{r}_f \\
& \theta_E(t_f)=\theta_f \qquad \dot{\theta}_E(t_f)=\dot{\theta}_f \\
& z_E(t_f)=z_f \qquad \dot{z}_E(t_f)=\dot{z}_f
\end{aligned}
\qquad (۲۹)
$$

۴-۲. بهینه‌سازی مقید

مسئله بهینه‌سازی مقید به‌صورت مینیمم یا ماکزیمم کردن تابع هدف $f(x)$، به‌گونه‌ای که قیود مساوی و نامساوی زیر ارضا شود، تعریف می‌شود:

$$
\begin{aligned}
& g_i(x)\le g_i^0,\ i=1,\dots,m \\
& h_j(x)\ge h_j^0,\ j=1,\dots,n \\
& k_l(x)=k_l^0,\ l=1,\dots,p
\end{aligned}
\qquad (۳۰)
$$

در روابط فوق، x بیانگر متغیرهای تصمیم مسئله بهینه‌سازی و $g_i(x)$، $h_j(x)$ و $k_l(x)$ قیود مربوط به مسئله هستند که در حالت کلی تابعی

از متغیرهای تصمیم مسئله می‌باشند. g_i^0، h_j^0 و k_l^0 مقادیر مجاز مربوط به قیود هستند.

یکی از روش‌های رایج که در حل مسائل بهینه‌سازی مقید با استفاده از روش‌های هوشمند استفاده می‌شود، روش تابع جریمه[17] است [۳۵]. در این روش، تابع هدف جدیدی برای مسئله تعریف می‌شود که از تابع هدف اصلی مسئله و میزان تخطی از قیود تعریف‌شده برای مسئله تشکیل شده است. درواقع، در این روش اگر قیود مسئله ارضا نشود، به میزان تخطی از قیود، تابع هدف اصلی مسئله جریمه می‌شود. بنابراین مسئله بهینه‌سازی در روش تابع جریمه به‌صورت مینیمم کردن تابع هدف اصلاح‌شده زیر تعریف می‌شود:

$$\min\left(f(x) + \sum_{i=1}^{m+n+p} w_i v_i\right) \tag{۳۱}$$

در رابطه فوق، v_i میزان تخطی از قیود تعریف‌شده برای مسئله می‌باشد و w_i ضرایب وزنی هستند که بیانگر میزان اهمیت هر یک از قیود می‌باشد. مقدار v_i برای قیود (۳۰) با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} v_{g_i} &= \max\left(\frac{g_i(x)-g_i^0}{g_i^0}, 0\right) \\ v_{h_j} &= \max\left(\frac{h_j^0-h_j(x)}{h_j^0}, 0\right) \\ v_{k_l} &= \left|\frac{k_l^0-k_l(x)}{k_l^0}\right| \end{aligned} \tag{۳۲}$$

۴-۳. فرایند حل مسئله

دینامیک ماهواره با جایگذاری رابطه (۲۴) در معادلات (۲۸)، به دست می‌آید. همچنین قیود انتهایی مسئله به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} &|r'_f - r_f| < \zeta_r \\ &|\theta'_f - (2\pi N + \theta_f)| < \zeta_\theta \\ &|z'_f - z_f| < \zeta_z \\ &|\dot{r}'_f - \dot{r}_f| < \zeta_{\dot{r}} \\ &|\dot{\theta}'_f - \dot{\theta}_f| < \zeta_{\dot{\theta}} \\ &|\dot{z}'_f - \dot{z}_f| < \zeta_{\dot{z}} \end{aligned} \tag{۳۳}$$

که $[r_f, \theta_f, z_f, \dot{r}_f, \dot{\theta}_f, \dot{z}_f]$ شرایط نهایی موردنظر مسئله و $[r'_f, \theta'_f, z'_f, \dot{r}'_f, \dot{\theta}'_f, \dot{z}'_f]$ مقادیر انتهایی است که با استفاده از حل معادلات دینامیکی ماهواره به دست می‌آید. متغیرهای تصمیم مسئله بهینه‌سازی عبارتند از:

$$\begin{aligned} &DV = \\ &[N_{rev}, t_f, a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{N_\delta}, b_1, b_2, \cdots, \\ &b_{N_\delta}, c_0, c_1, c_2, \cdots, c_{N_\phi}, d_1, d_2, \cdots, d_{N_\phi}] \end{aligned} \tag{۳۴}$$

با توجه به اینکه از روش تابع جریمه برای حل مسئله بهینه‌سازی مقید استفاده شده است، تابع هدف مسئله بر اساس رابطه (۳۱) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J_f = t_f + \sum_{i=1}^{6} v_i \tag{۳۵}$$

که v_i با استفاده از رابطه اول (۳۲) به دست می‌آید. به دلیل اینکه کلیه قیود مسئله اهمیت یکسانی دارند، $w_i = 1$ می‌باشد.

۵. شبیه‌سازی عددی

در این بخش با استفاده از رویکرد ارائه‌شده، طراحی مسیر انتقال از مدار ژئو به مدار هالو برای سطوح تراست مختلف بررسی می‌شود. در جدول‌های ۲ تا ۴، به‌ترتیب شرایط اولیه، شرایط انتهایی و مشخصات سیستم پیشرانش ارائه شده است.

جدول ۲. شرایط اولیه مسئله انتقال از مدار ژئو به مدار هالو

شرایط اولیه	مقدار
$x_i(LU)$	-۰/۰۱۹۴۸۸۵۱۱۴۵۸۶۶۸
$y_i(LU)$	-۰/۰۱۶۰۳۳۴۷۹۸۱۲۰۵۱
$z_i(LU)$	۰
$\dot{x}_i(LU/TU)$	۸/۹۱۸۸۸۱۹۲۳۶۷۸۱۹۸
$\dot{y}_i(LU/TU)$	-۴/۰۸۱۷۹۳۶۸۸۸۱۸۷۲۵
$\dot{z}_i(LU/TU)$	۰

جدول ۳. شرایط انتهایی مسئله انتقال از مدار ژئو به مدار هالو

شرایط انتهایی	مقدار
$x_f(LU)$	۰/۸۲۳۳۸۵۱۸۲۰۶۷۴۶۷
$y_f(LU)$	۰
$z_f(LU)$	-۰/۰۲۲۲۷۷۵۵۶۲۷۳۲۳۵
$\dot{x}_f(LU/TU)$	۰
$\dot{y}_f(LU/TU)$	۰/۱۳۴۱۸۴۱۷۰۲۶۲۴۳۷
$\dot{z}_f(LU/TU)$	۰

جدول ٤. مشخصات سیستم پیشرانش

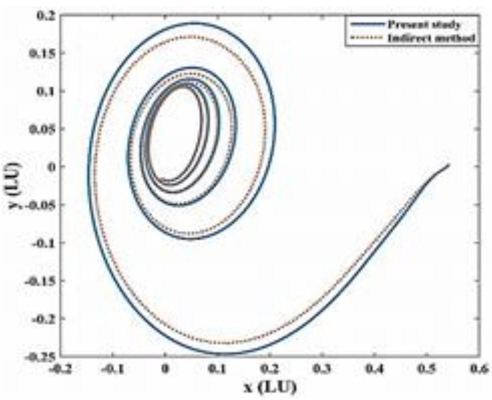
پارامتر	مقدار
$M_0(kg)$	۱۵۰۰
$I_{sp}(s)$	۳۰۰۰
$T_{N\_max}(N)$	۱۰ و ۵ و ۲

در جدول‌های بالا، LU واحد طولی و TU واحد زمانی هستند که مقادیر این دو پارامتر به‌ترتیب برابر فاصله زمین - ماه (3.84405000×10^5 km) و مدت زمانی است که دو جرم اصلی (زمین– ماه) حول مرکز جرم یک دوران کامل انجام می‌دهند (3.75676967×10^5 s). در جدول ۴، T_{N_max} ماکزیمم نیروی تراست و M_0 جرم اولیه ماهواره در زمان شروع مأموریت می‌باشد. مطابق جدول ٤، طراحی مسیر برای سه سطح نیروی تراست مختلف انجام می‌شود، که در ادامه نتایج هر یک از موارد ارائه می‌شود.

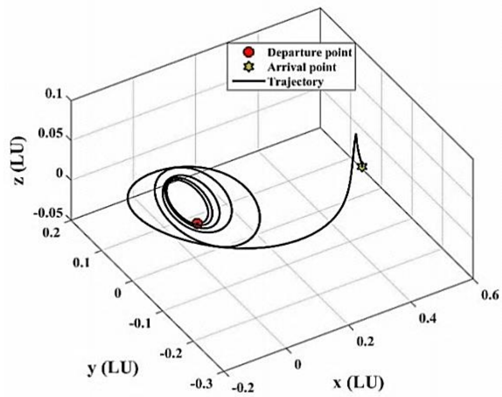
۵-۱. سطح تراست $T_{N\_max} = 10N$

در این حالت، زاویه تراست در صفحه به‌صورت سری فوریه مرتبه پنج و زاویه تراست خارج از صفحه به‌صورت سری فوریه مرتبه هشت در نظر گرفته شده است. در شکل‌های۳ و ۴، به‌ترتیب مسیر دوبعدی و سه‌بعدی ماهواره در دستگاه ECRF نشان داده شده است. همچنین در شکل ۵، پروفایل شتاب تراست (T_a) در جهت‌های r، θ و z و جرم سوخت نرمال‌شده ترسیم شده است.

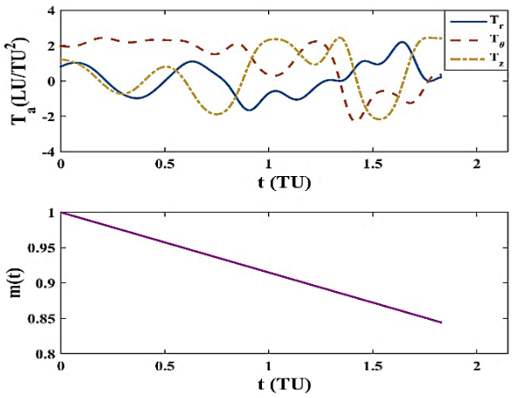
برای صحت‌سنجی روش ارائه‌شده، جرم سوخت مصرفی نرمال‌شده و زمان مأموریت حاصل از این رویکرد همراه با نتایج حاصل از مرجع [۳۶] که به حل مسئله با استفاده از روش غیرمستقیم (که روش دقیق و بهینه طراحی مسیر می‌باشد) پرداخته است، در جدول ۵ ارائه شده است. همچنین مسیر ماهواره با استفاده از روش غیرمستقیم در شکل ۳ ترسیم شده است. تحلیل نتایج جدول ۵ و شکل ۴ نشان می‌دهد که روش ارائه‌شده با دقت بسیار خوبی تعداد دورهای مسیر، جرم سوخت مصرفی، زمان و مسیر نزدیک به بهینه را ارائه می‌دهد.



شکل ۳. مسیر دوبعدی ماهواره در دستگاه **ECRF** برای $\mathbf{T_{N\_max} = 10N}$ با استفاده از رویکرد ارائه‌شده و روش غیرمستقیم



شکل ٤. مسیر سه‌بعدی ماهواره در دستگاه **ECRF**
برای $\mathbf{T_{N\_max} = 10N}$



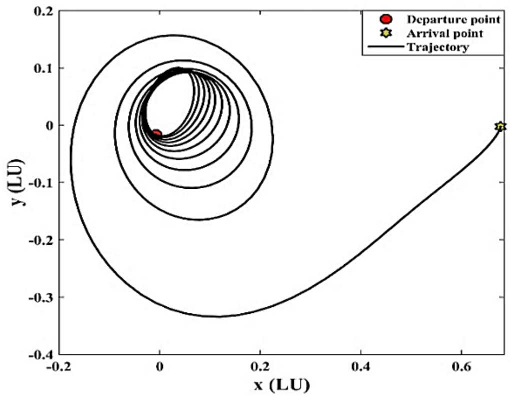
شکل ۵. پروفایل شتاب تراست ($\mathbf{T_a}$) در جهت‌های **r**، **θ** و **z** و جرم سوخت نرمال‌شده ($\mathbf{m(t)}$) برای
$\mathbf{T_{N\_max} = 10N}$

جدول ۵. نتایج حاصل از حل مسئله با روش ارائه‌شده و نتایج حاصل از مرجع [۳۶] برای $\mathbf{T_{N\_max} = 10N}$

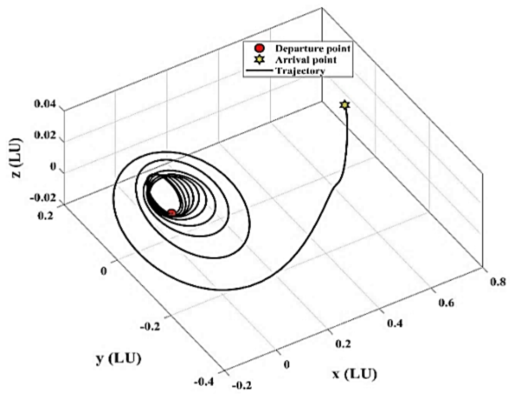
پارامتر	روش حاضر	مرجع [۳۶]	خطا
m_p	۰/۱۵۵۴	۱/۵۳۸	٪ ۱/۱۰۱۶
$t_f(TU)$	۱/۸۲۶۵	۱/۸۰۶۵	٪ ۱/۱۰۹۷
N_{rev}	۵	۵	۰

۵-۲. سطح تراست $T_{N\_max} = 5N$

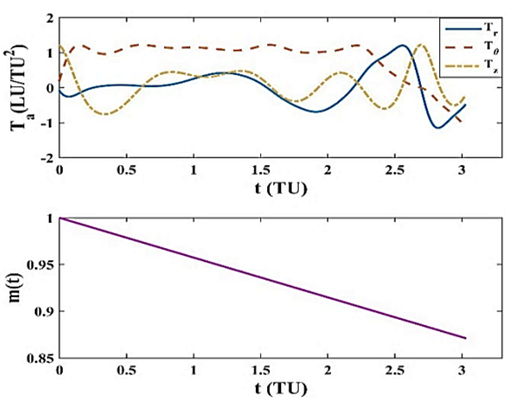
در این مسئله، زاویه تراست در صفحه و زاویه تراست خارج از صفحه به‌ترتیب به‌صورت سری فوریه مرتبه پنجم و نهم در نظر گرفته شده است. در جدول ۶ نتایج حاصل از حل مسئله ارائه شده است. همچنین، مسیر دوبعدی و سه‌بعدی ماهواره در دستگاه ECRF به‌ترتیب در شکل ۶ و شکل ۷ و پروفایل شتاب تراست در جهت‌های مختلف و جرم سوخت نرمال‌شده در شکل ۸ نشان داده شده است.



شکل ۶. مسیر دوبعدی ماهواره در دستگاه **ECRF** برای
$\mathbf{T_{N\_max} = 5N}$



شکل ۷. مسیر سه‌بعدی ماهواره در دستگاه **ECRF**
برای $\mathbf{T_{N\_max} = 5N}$



شکل ۸. پروفایل شتاب تراست ($\mathbf{T_a}$) در جهت‌های **r**، **θ** و **z** و جرم سوخت نرمال‌شده($\mathbf{m(t)}$) برای
$\mathbf{T_{N\_max} = 5N}$

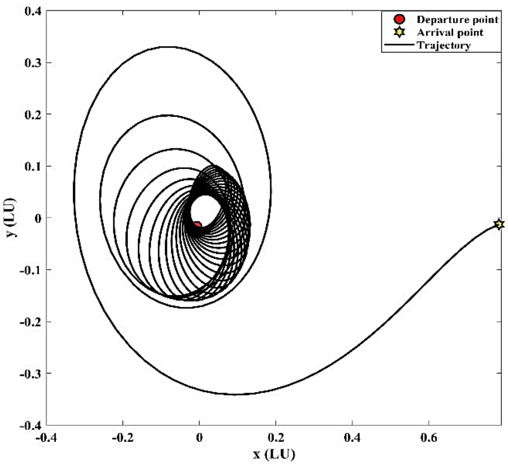
۵-۳. سطح تراست $T_{N\_max} = 2N$

برای سطح تراست $T_{N\_max} = 2N$، زاویه تراست در صفحه به‌صورت سری فوریه مرتبه پنجم و زاویه تراست خارج از صفحه به‌صورت سری فوریه مرتبه نهم در نظر گرفته شده است. در جدول ۶ نتایج حاصل از این تحلیل ارائه شده است.

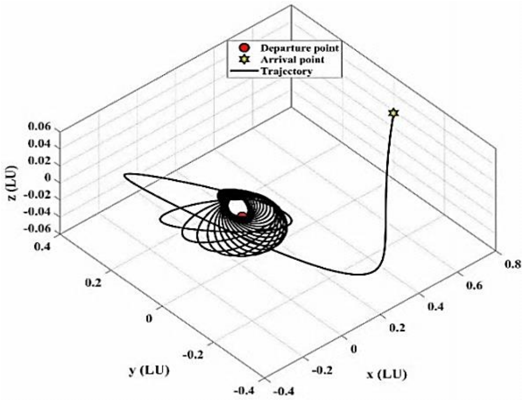
جدول ۶. نتایج حاصل از حل مسئله برای $\mathbf{T_{N\_max} = 5N}$ و $\mathbf{T_{N\_max} = 2N}$

پارامتر	$T_{N\_max} = 5N$	$T_{N\_max} = 2N$
$t_f(TU)$	۳/۰۲۳۹۶	۶/۸۷۳۰
N_{rev}	۱۰	۲۵

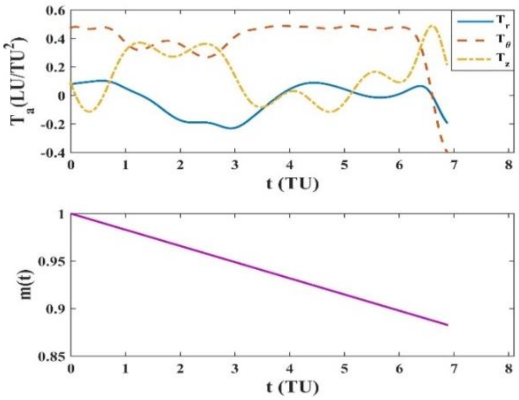
در شکل ۹ مسیر دوبعدی و در شکل ۱۰ مسیر سه‌بعدی ماهواره در دستگاه ECRF ترسیم شده است. همچنین درشکل ۱۱، پروفایل شتاب تراست در جهت‌های مختلف و جرم سوخت نرمال‌شده نشان داده شده است.



شکل ۹. مسیر دوبعدی ماهواره در دستگاه **ECRF** برای $\mathbf{T_{N\_max} = 2N}$



شکل ۱۰. مسیر سه‌بعدی ماهواره در دستگاه **ECRF** برای $\mathbf{T_{N\_max} = 2N}$



شکل ۱۱. پروفایل شتاب تراست ($\mathbf{T_a}$) در جهت‌های $\mathbf{r}$، $\boldsymbol{\theta}$ و $\mathbf{z}$ و جرم سوخت نرمال‌شده($\mathbf{m(t)}$) برای $\mathbf{T_{N\_max} = 2N}$

۶. نتیجه‌گیری

مدارهای هالو مدارهای سه‌بعدی متناوب حول نقاط لاگرانژ در مسئله سه جسمی هستند که تاکنون روش‌های مبتنی بر شکلی برای طراحی مسیر ماهواره به این مدارها ارائه نشده است. در این مطالعه، رویکرد جدیدی که مبتنی بر حدس زاویه تراست می‌باشد، برای طراحی مسیر تقریبی و نزدیک به بهینه چنین مأموریت‌هایی ارائه شده است. در این رویکرد زوایای تراست در صفحه و خارج از صفحه به‌صورت سری فوریه با ضرایب محدود و نامعین در نظر گرفته می‌شود که مقادیر آن‌ها با استفاده از الگویتم بهینه‌سازی و با هدف مینیمم کردن زمان مأموریت تعیین می‌شود. برای

ارزیابی این روش، مسئله طراحی مسیر انتقال از مدار ژئو به مدار هالو برای سطوح تراست مختلف بررسی شد. نتایج نشان دادند که این روش با دقت بسیار خوبی تعداد دورهای مسیر، جرم سوخت مصرفی، زمان و مسیر نزدیک بهینه را ارائه می‌دهد. از ویژگی‌های مهم این روش این است که برخلاف روش‌های مبتنی بر شکل، جرم ماهواره را در معادلات دینامیکی لحاظ می‌کند، قید خاصی را برای جهت تراست (نظیر تراست مماسی) در نظر نمی‌گیرد و قابلیت تعیین تعداد دورهای مسیر، زمان و مسیر نزدیک به بهینه در مسئله سه‌جسمی سه‌بعدی را دارد. همچنین، به دلیل سادگی و حجم کم عملیات محاسباتی، فرایند حل مسئله نسبت به روش‌های مستقیم و غیرمستقیم بسیار ساده‌تر است و روشی کاربردی برای ارزیابی سناریوهای مختلف، در فاز اولیه طراحی مأموریت می‌باشد. علاوه‌براین، با توجه به اینکه این رویکرد به پاسخ تقریبی و نزدیک به بهینه منجر می‌شود، می‌توان از نتایج این روش، به‌عنوان حدس‌های اولیه با دقت بالا، برای روش‌های مستقیم و غیرمستقیم استفاده کرد.

۷. مآخذ

[1] M. D. Rayman, P. Varghese, D. H. Lehman, and L. L. Livesay, Results from the Deep Space 1 technology validation mission, Acta Astronautica, Vol. 47, No. 2, pp. 475–487, 2000.

[2] K. Komurasaki, An overview of electric propulsion activities, In 39th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, 2003.

[3] B. H. Foing et al., ESA’s SMART-1 mission launched to the MOON: Technology and science goals, Science and Technology Series, Vol. 108, No. 11, pp. 3–14, 2004.

[4] C. R. Hargraves and S. W. Paris, Direct trajectory optimization using nonlinear programming and collocation, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 10, No. 4, pp. 338–342, 1987.

[5] P. J. Enright and B. A. Conway, Discrete approximations to optimal trajectories using direct transcription and nonlinear programming, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 15, No. 4, pp. 994–1002, 1992.

[6] J. A. Kechichian, Optimal low-earth-orbit-geostationary-earth-orbit intermediate acceleration orbit transfer, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 20, No. 4, pp. 803–811, 1997.

[7] J. T. Betts, Survey of numerical methods for trajectory optimization, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 21, No. 2, pp. 193–207, 1998.

[8] C. L. Ranieri and C. A. Ocampo, Indirect optimization of three-dimensional finite-burning interplanetary transfers including spiral dynamics, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 32, No. 2, pp. 445–455, 2009.

[9] J. T. Betts, Very low-thrust trajectory optimization using a direct SQP method, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 120, No. 1, pp. 27–40, 2000.

[10] R. Falck and J. Dankanich, Optimization of low-thrust spiral trajectories by collocation, in AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, p. 4423, 2012.

[11] L. Mazzini, Finite thrust orbital transfers, Acta Astronautica, Vol. 100, pp. 107–128, 2014.

[12] S. Li, Y. Zhu, and Y. Wang, Rapid design and optimization of low-thrust rendezvous/ interception trajectory for asteroid deflection missions, Advances in Space Research, Vol. 53, No. 4, pp. 696–707, 2014.

[13] C. Sun, J. Yuan, and Q. Fang, Continuous low thrust trajectory optimization for preliminary design, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering, Vol. 230, No. 5, pp. 921–933, 2016.

[14] A. E. Petropoulos and J. M. Longuski, Automated design of low-thrust gravity-assist trajectories, In AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, Vol. 4033, pp. 157–166, 2000.

[15] A. E. Petropoulos and J. M. Longuski, A shape-based algorithm for the automated design of low-thrust, gravity-assist trajectories, dvances in the Astronautical Sciences, Vol. 109, No. 5, pp. 2321–2336, 2002.

[16] B. J. Wall and B. A. Conway, Shape-based approach to low-thrust rendezvous trajectory design, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 32, No. 1, pp. 95–102, 2009.

[17]B. J. Wall, Shape-based approximation method for low-thrust trajectory optimization, In AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, pp. 18–21, 2008.

[18] D. Wang, G. Zhang, and X. Cao, Modified inverse-polynomial shaping approach with thrust and radius constraints, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering, Vol. 229, No. 13, pp. 2506–2518, 2015.

[19] D. M. Novak and M. Vasile, Improved shaping approach to the preliminary design of low-thrust trajectories, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 34, No. 1, pp. 128–147, 2011.

[20] C. Xie, G. Zhang, and Y. Zhang, Shaping approximation for low-thrust trajectories with large out-of-plane motion, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 39, No. 12, pp. 2776–2785, 2016.

[21] M. Vasile, P. De Pascale, and S. Casotto, On the optimality of a shape-based approach based on pseudo-equinoctial elements, Acta Astronautica, Vol. 61, No. 1–6, pp. 286–297, 2007.

[22] B. D. E. Vogeleer, Automatic and Fast Generation of Sub-optimal and Feasible Low-Thrust Trajectories Using a Method, TU Delft, Delft University of Technology, 2008.

[23] E. Taheri and O. Abdelkhalik, Shape based approximation of constrained low-thrust space trajectories using Fourier series, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 49, No. 3, pp. 535–546, 2012.

[24] E. Taheri and O. Abdelkhalik, Fast initial trajectory design for low-thrust restricted-three-body problems, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 38, No. 11, pp. 2146–2160, 2015.

[25] E. Taheri and O. Abdelkhalik, Initial three-dimensional low-thrust trajectory design, Advances in Space Research, Vol. 57, No. 3, pp. 889–903, 2016.

[26] D. J. Gondelach and R. Noomen, “Hodographic-shaping method for low-thrust interplanetary trajectory design, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 52, No. 3, pp. 728–738, 2015.

[27] K. Zeng, Y. Geng, B. Wu, and C. Xie, A novel shape-based approximation method for constrained low-thrust trajectory design, In AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, p. 5637, 2016.

[28] Z. Fan, M. Huo, N. Qi, C. Zhao, Z. Yu, and T. Lin, Initial design of low-thrust trajectories based on the Bezier curve-based shaping approach, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering, Vol. 234, No. 11, pp. 1825–1835, 2020.

[29] Z. Fan, M. Huo, J. Qi, and N. Qi, Fast initial design of low-thrust multiple gravity-assist three-dimensional trajectories based on the Bezier shape-based method, Acta Astronautica, Vol. 178, pp. 233–240, 2021.

[30] H. D. Curtis, Orbital Mechanics for Engineering Students. Butterworth-Heinemann, 2013.

[31] V. A. Chobotov, Orbital mechanics. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2002.

[32] J.-B. Caillau, B. Daoud, and J. Gergaud, Minimum fuel control of the planar circular restricted three-body problem, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, Vol. 114, No. 1–2, pp. 137–150, 2012.

[33] D. E. Kirk, Optimal control theory: an introduction. Courier Corporation, 2004.

[34] Y.-X. Jin, H.-Z. Cheng, J. Yan, and L. Zhang, New discrete method for particle swarm optimization and its application in transmission network expansion planning, Electric Power Systems Research, Vol. 77, No. 3–4, pp. 227–233, 2007.

[35] T. Bäck, D. B. Fogel, and Z. Michalewicz, Handbook of evolutionary computation, Release, Vol. 97, No. 1, p. B1, 1997.

[36] C. Zhang, F. Topputo, F. Bernelli-Zazzera, and Y. S. Zhao, Low-thrust minimum-fuel optimization in the circular restricted three-body problem, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 38, No. 8, pp. 1501–1509, 2015.

۸. علائم

اندازه بردار سرعت	v
اندازه بردار موقعیت	r
بردار سرعت	$\boldsymbol{v}$
بردار سرعت زاویه‌ای دستگاه چرخان	$\boldsymbol{\omega}$
بردار متغیرهای الحاقی مربوط به جرم	λ_m
بردار متغیرهای الحاقی مربوط به سرعت	$\boldsymbol{\lambda}_v$
بردار متغیرهای الحاقی مربوط به موقعیت	$\boldsymbol{\lambda}_r$
بردار موقعیت	$\boldsymbol{r}$
بردار یکه در جهت اعمال تراست	$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z]^T$
پارامتر تنظیم دریچه گاز	u
پارامتر جرمی	$\bar{\mu}$
پارامتر گرانشی	μ
پارامتر گرانشی جسم اول	μ_1
پارامتر گرانشی جسم دوم	μ_2
پروفایل شتاب تراست در جهت‌های (r, θ, z)	$T_a = [T_r, T_\theta, T_z]$
تابع اسکالر	$L(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)$
تابع سوییچینگ	S_t
تابع هدف	J_f
تعداد دورهای مسیر ماهواره	N_{rev}
ثابت گرانش جهانی	G
جرم اولیه ماهواره	M_0
جرم جسم‌های اصلی	m_1, m_2
جرم نرمال‌شده در ابتدای مأموریت	m_0
جرم نرمال‌شده سوخت مصرفی مأموریت	m_p
جرم نرمال‌شده ماهواره	m
حد مجاز تخطی از قیود	$\boldsymbol{\zeta}$
زاویه تراست خارج از صفحه	ϕ
زاویه تراست در صفحه	δ
زمان پایان مأموریت	t_f
زمان شروع مأموریت	t_i
سرعت گازهای خروجی سیستم پیشرانش	c
شتاب گرانش در سطح سیاره	g_0
ضرایب سری فوریه زاویه تراست خارج از صفحه	c_n, d_n
ضرایب سری فوریه زاویه تراست در صفحه	a_n, b_n
ضربه ویژه	I_{sp}
ماکزیمم شتاب تراست	T_{max}
ماکزیمم نیروی تراست	T_{N_max}
موقعیت زاویه‌ای	θ
واحد زمانی	TU
واحد طولی	LU
همیلتونین	$H(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t)$

۹. پی‌نوشت

1. Two Point boundary value problem (TPBVP)
2. Direct method
3. Indirect method
4. Equinoctial elements
5. Bezier curve
6. Synodic reference frame
7. Mass parameter
8. Throttle factor
9. Exhaust velocity
10. Specific impulse
11. Costate vector
12. Switching function
13. Free time
14. Transversality conditions
15. Discrete particle swarm optimization (DPSO)
16. Earth-centered rotating frame (ECRF)
17. Penalize function