توسعه تعیین وضعیت استاتیکی ماهواره براساس یک الگوریتم چند هدفه مبتنی بر حساب بازه‌ای

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۱/۲۵
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۴/۱۴

رضا اسماعیل زاده[۱]، حسین قدیری[۲]، رضا زردشتی[۳]
۱- دانشیار، مهندسی هوافضا، مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک‌اشتر، تهران، esmaelzadeh@aut.ac.ir
۲- دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک‌اشتر، تهران
۳- دانشیار، مهندسی هوافضا، مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک‌اشتر، تهران

چکیده

مسئله تعیین وضعیت ماهواره منجر به حل مسئله وهبا i می‌گردد. به منظور به کارگیری مسئله وهبا نیاز به حداقل دو بردار اندازه‌گیری مستقل از هم و دو بردار متناظر در دستگاه مرجع است. اندازه‌گیری‌های سنسور به دلیل وجود نویز و ناهمراستایی دقیق نیستند و بردارهای مرجع نیز به دلیل اینکه تقریبی از این اندازه گیری‌ها هستند دارای نامعینی و عدم قطعیتند. لیکن، این عدم قطعیت‌ها و نامعینی‌ها در مسئله وهبا به طور صریح در نظر گرفته نشده‌اند. بنابراین دقت تخمین روش‌های مبتنی بر مسئله وهبا وابسته به دقت بردارهای ورودی است. به منظور رفع این کاستی، فرض شده است تمامی نامعینی‌ها کراندار هستند. از اینرو خطاهای مدل‌سازی و نویز اندازه‌گیری‌ها به کمک حساب بازه‌ای مدل شده است. در واقع نوآوری‌های این تحقیق، در نظر گرفتن عدم قطعیت‌های موجود در بردارهای ورودی در مسئله وهبا به کمک حساب بازه‌ای، تبدیل حل مسئله تعیین وضعیت از یک مسئله تک هدفه به یک مسئله بهینه‌سازی مقاوم چندهدفه و بهینه‌سازی این مسئله چندهدفه با استفاده از حلگر NSGA است. کارآیی این روش با حل چند مثال مورد ارزیابی قرار گرفته است که نتایج، بیانگر خطای تخمین وضعیت کمتر در تعیین وضعیت ماهواره است.

***واژه‌های کلیدی:** تحلیل بازه‌ای، ماهواره، تعیین وضعیت، تخمین مقاوم، بهینه سازی چندهدفه*

Development of the satellite static attitude determination founded on an interval arithmetic-based multi-objective algorithm

Reza Esmaelzaeh[1], Hossein Ghadiri[2], Reza Zardashti[3]
1 Assistant Professor, Department of Aerospace Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, esmaelzadeh@aut.ac.ir
2 Ph.D Student, Department of Aerospace Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Tehran,
3 Assistant Professor, Department of Aerospace Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Tehran

Abstract

Solution of the static attitude determination of the satellite leads to the Wahba problem. The Wahba problem uses a set of at least two independent sensor measurements and reference vectors. These input vectors are not accurate due to sensor noises, misalignment, and low-order approximations. But these uncertainties do not view in the classic Wahba problem directly. Hence, the estimation error of the Wahba problem depends on the accuracy of the input vectors. In this paper, modeling error, measurement noise, and biases are proposed unknown but bounded. These errors are modeled using interval analysis. The innovations of this research are considering the uncertainties in the input vectors in the Wahba problem using interval arithmetic and transforming the solution of the attitude determination problem from a single-objective problem to a multi-objective robust optimization problem. Then the multi-objective problem is optimized using an NSGA solver. The results indicate a lower attitude estimation error of the proposed method in attitude determination of the satellite.

***Keywords:** Interval analysis, attitude determination, satellite, robust estimation, multi-objective optimization*.

۱. مقدمه

یکی از زیر سیستم‌های اصلی و مهم ماهواره، زیرسیستم تعیین وضعیت است. تعیین وضعیت فرآیندی برای تخمین وضعیت فضاپیما نسبت به یک دستگاه مرجع اینرسی است. فرآیند تعیین وضعیت به یک یا چند اندازه‌گیری نیاز دارد که می‌توان از سنسورهای وضعیت از قبیل سنسورهای خورشید و سنسور افق زمین یا سنسورهای دقیق‌تر مانند جایروهای فیبر نوری استفاده کرد.

مباحث مربوط به مشخص کردن نحوه قرارگیری ماهواره نسبت به یک دستگاه مرجع با عناوین تعیین وضعیت[۲] و تخمین وضعیت شناخته می‌شوند. تعیین وضعیت به رویکردهای بدون حافظه‌ای[۳] اشاره دارد که وضعیت سیستم را نقطه به نقطه در هر گام زمانی تعیین می‌کنند. اغلب این روش‌ها خصوصیات احتمالاتی اندازه‌گیری‌های وضعیت را به حساب نمی‌آورند. تخمین وضعیت به رویکردهای حافظه‌دار اشاره دارد. رویکرد حافظه‌دار به معنای استفاده از مدل دینامیکی حرکت سیستم در ساختار فیلتر است، به طوری که داده‌های اندازه‌گیری شده در طول زمان به منظور استفاده در تخمین حفظ می‌شوند [۱]. در این روش‌ها خصوصیات احتمالاتی اندازه‌گیری‌های وضعیت از جمله میانگین، واریانس و انحراف معیار به حساب می‌آیند. از جمله روش‌های تخمین وضعیت می‌توان به فیلتر کالمن اشاره نمود.

دسته‌ای از روش‌های تعیین وضعیت ماهواره، با نام روش‌های نقطه به نقطه یا تک-نقطه‌ای شناخته می‌شوند. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش‌های حداقل مربعات[۴]، روش کواترنیون[۵]، روش تخمین کواترنیون[۶] [۲, ۳]، روش تخمینگر بهینه کواترنیون[۷] [۴-۶]، تجزیه مقادیر منفرد[۸] [۷]، روش ماتریس وضعیت بهینه[۹] [۸] و روش تخمینگر ماتریس وضعیت خطی سریع[۱۰] [۹] اشاره کرد. تعیین وضعیت با این روش‌ها منجر به حل مسئله وهبا می‌گردد. این روش‌ها به حداقل دو یا چند بردار اندازه‌گیری برای محاسبه وضعیت در هر نقطه زمانی مشخص نیاز دارند. همچنین این روش‌ها همانطور که از نامشان پیداست تنها از داده‌های زمان حال برای تعیین وضعیت استفاده می‌کنند. خصوصیت دیگر روش‌های نقطه به نقطه، عدم استفاده از مدل دینامیکی سیستم برای تعیین وضعیت می‌باشد. به همین دلیل این روش‌ها، الگوریتم‌های استاتیکی نیز نامیده می‌شوند. این روش‌ها از تمامی بردارهای اندازه‌گیری در همان گام زمانی استفاده می‌کنند. بنابراین روش‌های نقطه به نقطه جزء روش‌های دسته‌ای[۱۱] قرار می‌گیرند. این روش‌ها دارای زمان اجرای کمتر نسبت به دیگر روش‌ها هستند و مستقل از دینامیک سیستم می‌باشند و ماهیتی غیرخطی دارند. دسته دیگر روش‌های تعیین وضعیت، رویکردهای بازگشتی هستند که تمامی داده‌های قبلی را بدون بکارگیری دینامیک سیستم در نظر می‌گیرند که از آن جمله می‌توان به روش بازگشتی تخمین کواترنیون[۱۲] [۱۰]، تخمین کواترنیون بازگشتی بهینه[۱۳] [۱۱]، تخمین کواترنیون تعمیم یافته[۱۴] [۱۲] و فیلتر بازگشتی وضعیت بهینه ترتیبی[۱۵] [۱۳] اشاره کرد.

اگرچه خطای تخمین وضعیت با روش‌های نقطه به نقطه وابسته به خطاهای مدل‌سازی واندازه‌گیری هستند، لیکن، نامعینی‌های مدل‌سازی و اندازه‌گیری به طور مستقیم در مسئله وهبا در نظر گرفته نمی‌شوند. روش‌های کمی در تحقیقات قبلی وجود دارد که این نامعینی‌ها را در نظر می‌گیرند. احمِد و کریگان[۱۶] [۱۴] مسئله وهبا را به صورت یک مسئله بهینه‌سازی کمینه-بیشینه[۱۷] با استفاده از نرم بینهایت نامعینی‌ها بازنویسی کردند. سپس با جایگزینی نرم بینهایت با یک کران بالا، مسئله بهینه‌سازی را به یک مسئله کمینه‌سازی نزدیک بهینه تبدیل نمودند. روش پیشنهادی دارای یک تابع هدف و قید درجه دو[۱۸] است. در مرجع [۱۵]، این مسئله کمینه‌سازی تقریب زده شده به یک مسئله برنامه‌ریزی نیمه معین[۱۹] با تابع هدف خطی و قیود ناتساوی ماتریسی خطی[۲۰]، تعمیم یافته است. در مرجع [۱۶] مسئله وهبا با استفاده از روش حداقل مربعات کوتاه شده[۲۱] بازنویسی شده است و به یک مسئله برنامه‌ریزی درجه دو مقید تبدیل گردیده است. سپس مسئله وهبا در حضور تعداد زیادی از داده‌های خارج از محدوده[۲۲] حل شده است. مرجع [۱۷] یک تخمینگر هندسی[۲۳] مبتنی بر مسئله وهبا برای مواجه با ورودی‌هایی با نرخ‌های متفاوت[۲۴] با استفاده از تحلیل پایداری لیاپانوف ارائه نموده است. مرجع [۱۸] تعمیمی از مسئله وهبا براساس فرمولبندی لاسو[۲۵] ارائه کرده است و یک حل بسته بهینه از آن معرفی نموده است.

بردارهای نامعین مرجع و اندازه‌گیری را می‌توان به کمک حساب بازه‌ای مدل کرد. مطالعه در زمینه حساب بازه‌ای در سال ۱۹۵۰ برای یافتن راهی به منظور کراندار کردن خطاهای گرد کردن در محاسبات عددی شروع شد. هر عدد حقیقی را می‌توان به وسیله چهارچوبی کراندار با کران‌های بالا و پایین مناسب نمایش داد. در سال ۱۹۶۶، مور [۱۹] حساب بازه‌ای را برای تضمین محدوده نتایج ممکن معرفی کرد. حساب بازه‌ای روشی ساده و کاربردی برای نمایش نامعینی خطاهای کراندار است.

با اینکه وابستگی خطای تخمین وضعیت با استفاده از حل مسئله وهبا به خطای بردارهای ورودی اثبات شده است [۱]، لیکن در روش‌های کلاسیک حل مسئله وهبا فرآیندی جهت کاهش این وابستگی وجود ندارد، به طوری که هر چه خطای اندازه‌گیری‌ها بیشتر باشد، متناسب با آن خطای تخمین وضعیت نیز افزایش خواهد یافت. این کاستی هنگامی بحرانی‌تر می‌گردد که از سنسورهای ارزان قیمت جهت اندازه‌گیری استفاده شود. از اینرو مزیت و ویژگی بارز روش پیشنهادی کاهش خطای تخمین در حضور عدم قطعیت‌های موجود در بردارهای ورودی است. از آنجا که در ساختار پیشنهادی، برای کاهش خطای تخمین یک تابع بهینه‌یابی چندهدفه حل می‌گردد، بنابراین زمان محاسبات آن بیشتر از روش‌های مرسوم است.

این مقاله بدینصورت سازماندهی شده است که ابتدا به کمک حساب بازه‌ای، نامعینی‌ها مدل‌سازی شده و در مسئله وهبا در نظر گرفته می‌شوند سپس مسئله وهبا به‌صورت یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه بازنویسی می‌گردد و با استفاده از یک حلگر چند هدفه حل می‌گردد.

۲. تعریف مسئله

اساس و بنیاد اکثر الگوریتم‌های تعیین وضعیت تک نقطه‌ای، مسئله وَهبا است. مسئله وَهبا یک مسئله حداقل مربعات وزن‌دار و غیرخطی برای تعیین ماتریس وضعیت بهینه به کمک مجموعه‌ای از حداقل دو بردار اندازه‌گیری مستقل است. تابع عملکردی که در این مسئله باید کمینه گردد به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۰]:

$$J = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} a_i \|b_i - Ar_i\|^2 \quad (۱)$$

a_i، ضریب وزنی و عددی مثبت و اسکالر است. A ماتریس وضعیت، و b_i و r_i به ترتیب بردار اندازه‌گیری و بردار مرجع هستند. مسئله وَهبا این قابلیت را دارد که هر تعداد از بردارهای اندازه‌گیری نویزی که به طور همزمان محاسبه می‌شوند را برای به‌دست‌آوردن وضعیت بهینه پردازش کند. توانایی این روش در ارائه پاسخ‌های بهینه سراسری بدون هیچگونه خطی‌سازی و فرض‌های محدود کننده مانند در نظر گرفتن زوایای کوچک، موجب توجه بسیاری از محققان به آن شده است.

حل‌های بسیاری برای مسئله وَهبا ارائه گردیده است. در اکثر حل‌های این مسئله، تابع عملکرد به شکلی دیگر بیان می‌شود. رویکردی کاربردی در این زمینه استفاده از کواترنیون‌ها برای نمایش تابع عملکرد است. داونپورت [۲۱] نشان داد که استفاده از کواترنیون‌ها برای بیان تابع عملکرد مسئله وَهبا منجر به تابع عملکردی درجه دو می‌گردد و پاسخ بهینه آن با حل مسئله مقادیر ویژه زیر به دست می‌آید.

$$Kq = \lambda q$$
$$K = \begin{bmatrix} B + B^T - tr(B)I_3 & Z \\ Z^T & tr(B) \end{bmatrix}$$
$$B = \sum_{i=1}^{N} a_i b_i r_i^T \quad (۲)$$
$$Z = \sum_{i=1}^{N} a_i (b_i \times r_i)$$

در رابطه (۲)، λ مقدار ویژه، q بردار ویژه متناظر با آن، و K ماتریسی متقارن و 4×4 است. حل داونپورت که با عنوان روش q شناخته می‌شود، کواترنیون‌های وضعیت را به جای ماتریس وضعیت محاسبه می‌کند. همانطور که از رابطه (۲) مشخص است، بردار کواترنیون، یک بردار ویژه برای ماتریس K می‌باشد. وضعیت بهینه مورد نظر معادل بردار ویژه ماتریس K است. ماتریس K دارای چهار مقدار ویژه و چهار بردار ویژه متناظر با آن‌ها می‌باشد که تنها یکی از آنها بردار کواترنیون مربوط به وضعیت بهینه می‌باشد. بردار ویژه متناظر با بزرگ‌ترین مقدار ویژه ماتریس K، تخمین بهینه حداقل مربعات از وضعیت می‌باشد. از جمله خصوصیات و مزایای روش q، مقاوم بودن آن است [۳]. همچنین این روش، مسئله غیرخطی وَهبا را به طور مستقیم و بدون هیچگونه خطی‌سازی با فرض‌های ساده کننده حل می‌نماید.

روش‌های نقطه به نقطه مبتنی بر معادله (۱) برای تعیین ماتریس دوران، نیازمند کمیت‌های برداری هم در دستگاه بدنی و هم در دستگاه مرجع می باشند. از اینرو تنها از سنسورهایی می‌توان بهره برد که داده‌های مربوط به کمیت اندازه‌گیری شده در دستگاه مرجع موجود باشد. از آن جمله می‌توان به مغناطیس‌سنج، سنسور خورشیدی، و سنسور ستاره‌ای اشاره کرد. بنابراین

خطای تخمین وضعیت در این روش‌ها هم وابسته به خطاهای اندازه‌گیری و هم خطای مدل مرجع است. تحلیل خطا مسئله وهبا با مدل خطاهای احتمالاتی در مراجع [۱, ۳, ۷, ۲۲, ۲۳] ارائه شده است.

۳- روش پیشنهادی

۳-۱. مدل‌سازی عدم قطعیت

هر مقدار حقیقی x متعلق به بازه x^I را می‌توان به صورت زیر بیان نمود [۲۴]:

$$x = x^m + \alpha x^r, \quad \alpha \epsilon [-1 \quad 1] \qquad (۳)$$

x^m و x^r مرکز و شعاع بازه x^I هستند. α مقداری حقیقی در بازه ۱- تا ۱ است. با توجه به اینکه مقادیر اندازه‌گیری شده و مرجع می‌توانند دارای خطا و عدم قطعیت باشند، با تعمیم رابطه (۳) برای بردارها، می‌توان آن‌ها را به کمک حساب بازه‌ای به صورت زیر درنظر گرفت:

$$\begin{aligned} b_i &= mid(b^I) + \Delta b \\ &= b^m + \sum_{j=1}^{3} \alpha_j b_j^r \\ &= b^m + [\alpha] b^r \ , \alpha_j \epsilon [-1 \quad 1] \\ r_i &= mid(r^I) + \Delta r = r^m + \sum_{j=1}^{3} \beta_j r_j^r \\ &= r^m + [\beta] r^r \ , \beta_j \epsilon [-1 \quad 1] \end{aligned} \qquad (۴)$$

b_i و r_i بردارهای حقیقی متعلق به بازه‌های b^I و r^I هستند. Δb و Δr نامعینی‌های کراندار هستند. پارامترهای b_j^r و r_j^r بیانگر بردارهایی هستند که تمامی المان‌های آن‌ها به غیر از j-امین المان، صفر است. b^r و r^r، شعاع بازه خطای b^I و r^I هستند. با توجه به اینکه اندازه‌گیری در هر راستا مستقل از دیگر راستاها در نظر گرفته شده است، ماتریس‌های $[\alpha]$ و $[\beta]$ ماتریس همانی هستند.

۳-۲. تعیین وضعیت مبتنی بر حساب بازه‌ای

با جایگذاری رابطه(۴) در رابطه اصلی(۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i [(b_i^m + \Delta b_i) - A(r_i^m + \Delta r_i)]^T [(b_i^m \\ &\qquad + \Delta b_i) - A(r_i^m + \Delta r_i)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i [(b_i^m + \Delta b_i)^T (b_i^m + \Delta b_i) \\ &\qquad - (b_i^m + \Delta b_i)^T A (r_i^m + \Delta r_i) \\ &\qquad - (r_i^m + \Delta r_i)^T A^T (b_i^m + \Delta b_i) \\ &\qquad + (r_i^m + \Delta r_i)^T A^T A (r_i^m \\ &\qquad + \Delta r_i)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i \Big[b_i^{m^T} b_i^m + b_i^{m^T} \Delta b_i + \Delta b_i^T b_i^m \\ &\qquad + \Delta b_i^T \Delta b_i \\ &\qquad - 2 \Big(b_i^{m^T} A r_i^m + b_i^{m^T} A \Delta r_i \\ &\qquad + \Delta b_i^T A r_i^m + \Delta b_i^T A \Delta r_i \Big) \\ &\qquad + r_i^{m^T} r_i^m + r_i^{m^T} \Delta r_i + \Delta r_i^T r_i^m \\ &\qquad + \Delta r_i^T \Delta r_i \Big] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J = &- \sum_{i=1}^{n} a_i \left(b_i^{m^T} A r_i^m \right) - \sum_{i=1}^{n} a_i \left(b_i^{m^T} A \Delta r_i \right) \\ &- \sum_{i=1}^{n} a_i (\Delta b_i^T A r_i^m) \\ &- \sum_{i=1}^{n} a_i (\Delta b_i^T A \Delta r_i) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i \left(b_i^{m^T} b_i^m \right. \\ &\left. + r_i^{m^T} r_i^m \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i (\Delta b_i^T \Delta b_i + \Delta r_i^T \Delta r_i) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} a_i \left(b_i^{m^T} \Delta b_i + r_i^{m^T} \Delta r_i \right) \end{aligned}$$

تابع هدف J یک تابع بازه‌ای است. بنابراین هر تابع حقیقی متعلق به آن را می‌توان براساس رابطه (۳) به صورت دو تابع هدف مجزا به صورت زیر بیان نمود:

$$J^I = J^m + \Delta J \tag{۵}$$

$$\begin{aligned} J^m = &-\sum_{i=1}^{n} a_i \left(b_i^{m^T} A r_i^m\right) \\ &+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i \left(b_i^{m^T} b_i^m + r_i^{m^T} r_i^m\right) \end{aligned} \tag{۶}$$

$$\begin{aligned} \Delta J = &-\sum_{i=1}^{n} a_i \left(b_i^{m^T} A \Delta r_i\right) \\ &-\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\Delta b_i^T A r_i^m\right) \\ &-\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\Delta b_i^T A \Delta r_i\right) \\ &+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\Delta b_i^T \Delta b_i + \Delta r_i^T \Delta r_i\right) \\ &+\sum_{i=1}^{n} a_i \left(b_i^{m^T} \Delta b_i + r_i^{m^T} \Delta r_i\right) \end{aligned} \tag{۷}$$

با جایگذاری رابطه (۴) در دو عبارت انتهایی رابطه (۷) ،خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\Delta b_i^T \Delta b_i + \Delta r_i^T \Delta r_i\right) = \\ &\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i \left(b_i^{r^T} [\alpha]^T [\alpha] b_i^r + r_i^{r^T} [\beta]^T [\beta] r_i^r\right) \\ &\sum_{i=1}^{n} a_i \left(b_i^{m^T} \Delta b_i + r_i^{m^T} \Delta r_i\right) = \\ &\sum_{i=1}^{n} a_i \left(b_i^{m^T} [\alpha] b_i^r + r_i^{m^T} [\beta] r_i^r\right) \end{aligned} \tag{۸}$$

با توجه به اینکه ماتریس $[\alpha]$ و $[\beta]$ قطری هستند، بنابراین:

$$\begin{aligned} [\alpha]^T[\alpha] = [\alpha][\alpha] = [\alpha]^2 = S_\alpha \\ [\beta]^T[\beta] = [\beta][\beta] = [\beta]^2 = S_\beta \end{aligned} \tag{۹}$$

با جایگذاری رابطه (۹) در(۸) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\Delta b_i^T \Delta b_i + \Delta r_i^T \Delta r_i\right) = \\ &\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i \left(b_i^{r^T} S_\alpha b_i^r + r_i^{r^T} S_\beta r_i^r\right) \\ &\sum_{i=1}^{n} a_i \left(b_i^{m^T} \Delta b_i + r_i^{m^T} \Delta r_i\right) = \\ &\sum_{i=1}^{n} a_i \left(b_i^{m^T} [\alpha] b_i^r + r_i^{m^T} [\beta] r_i^r\right) \end{aligned} \tag{۱۰}$$

بنابراین با بیان روابط به شکل ضرب ماتریسی و استفاده از کواترنیون‌ها برای بیان ماتریس دوران خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} J^m = &-q^T K^m q + \frac{1}{2} tr\left(W B^{m^T} B^m\right) \\ &+\frac{1}{2} tr\left(W R^{m^T} R^m\right) \\ \Delta J = &-q^T K^{\Delta r} q - q^T K^{\Delta b} q - q^T K^{\Delta r, \Delta b} q \\ &+\frac{1}{2} tr\left(W B^{r^T} S_\alpha B^r\right) \\ &+\frac{1}{2} tr\left(W R^{r^T} S_\beta R^r\right) \\ &+ tr\left(W B^{m^T} [\alpha] B^r\right) \\ &+ tr\left(W R^{m^T} [\beta] R^r\right) \end{aligned} \tag{۱۱}$$

برای محاسبه ماتریس‌های K ابتدا باید ماتریس‌های B و Z را برای هرکدام به صورت زیر تعیین نمود:

$$\begin{aligned} B^m &= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^m r_i^{m^T} = B^m W R^{m^T} \\ B^{\Delta r} &= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^m \Delta r_i^T = B^m W R^{r^T} [\beta]^T \\ B^{\Delta b} &= \sum_{i=1}^{n} a_i \Delta b_i r_i^{m^T} = [\alpha] B^r W R^{m^T} \\ B^{\Delta b, \Delta r} &= \sum_{i=1}^{n} a_i \Delta b_i \Delta r_i^T = [\alpha] B^r W R^{r^T} [\beta]^T \\ Z^m &= \sum_{i=1}^{n} a_i (b_i^m \times r_i^m) = (B^m \times R^m) W \\ Z^{\Delta r} &= \sum_{i=1}^{n} a_i (b_i^m \times \Delta r_i) \\ &= (B^m \times [\beta] R^r) W \\ Z^{\Delta b} &= \sum_{i=1}^{n} a_i (\Delta b_i \times r_i^m) \\ &= ([\alpha] B^r \times R^m) W \\ Z^{\Delta b, \Delta r} &= \sum_{i=1}^{n} a_i (\Delta b_i \times \Delta r_i) \\ &= ([\alpha] B^r \times [\beta] R^r) W \end{aligned} \tag{۱۲}$$

در این حالت حداقل‌سازی تابع هدف، معادل کمینه‌یابی نقطه میانی و کمینه‌سازی تغییرات آن در حضور ورودی‌های نامعین است. بنابراین مسئله مورد بررسی از یک مسئله بهینه‌سازی تک هدفه به یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه تبدیل می‌شود. از آنجا که یکی از اهداف، کمینه‌سازی تغییرات تابع هدف است، بنابراین مسئله مورد بررسی، یک مسئله بهینه‌سازی چندموضوعی مقاوم خواهد بود.

در یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه، دو یا چند تابع هدف به طور همزمان بهینه‌یابی می‌شوند. دلیل اصلی برای استفاده از بهینه‌سازی چندهدفه اینست که عملکرد یک سیستم چند موضوعی، علاوه بر عملکرد هریک از اهداف، از اثرات متقابل آن‌ها نیز تأثیر می‌پذیرد. با در نظر گرفتن این اثرات متقابل می‌توان عملکرد کلی سیستم را بهبود بخشید [۲۵]. حل یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه، مجموعه‌ای از پاسخ‌های بهینه است که جبهه پارتو نامیده می‌شود. هر پاسخ موجود در جبهه پارتو بهینه است اگر نتوان توسط آن‌ها یک تابع هدف را بهینه کرد بدون اینکه اثر مخربی بر کمینه‌یابی تابع هدف دیگر داشته باشد. به عبارتی یک تابع هدف تا جایی کمینه می‌گردد که اثر مخربی بر بهینه‌یابی تابع هدف دیگر نداشته باشد.

از طرفی وجود عدم قطعیت‌ها ممکن است باعث تغییرات یا نوسان در عملکرد سیستم گردد و منجر به انحراف شدید یا حتی خطای عملکردی شوند. بنابراین به حساب آوردن عدم قطعیت‌ها از همان ابتدا حائز اهمیت خواهد بود. از اینرو یکی از روش‌های بهینه‌سازی چندهدفه در حضور عدم قطعیت، بهینه‌سازی چندهدفه مقاوم [۲۶] نامیده می‌شود. در یک مسئله بهینه‌سازی چند هدفه مقاوم سعی می‌گردد نوسانات عملکرد کلی سیستم در حضور عدم قطعیت‌ها کمینه گردد. در مسئله مورد بررسی، این امر توسط بهینه‌یابی همزمان توابع هدف رابطه (۱۱) انجام می‌شود.

۴. تعیین وضعیت مبتنی بر حساب بازه‌ای

مدل مرجع و اندازه‌گیری‌های سنسور به دلیل وجود نویز و ناهمراستایی و همچنین تقریب‌های ساده کننده برای مدل‌سازی، دقیق نیستند. از اینرو، برای مدلسازی این نامعینی‌ها، یک خطای تصادفی کراندار در محدوده $\pm b^r$ و $\pm r^r$ با توزیع یکنواخت به مقادیر دقیق بردارهای مرجع و اندازه‌گیری اضافه گردیده است. بردارهای اندازه-گیری در این تحقیق، خروجی سنسورهای خورشیدی و مغناطیس‌سنج در نظر گرفته شده-اند. بردارهای مرجع نیز مدل مغناطیس زمین و بردار خورشید هستند. b^r و r^r کران‌های نامعینی در بردارهای مرجع و اندازه گیری هستند که ۲۰ درصد مقدار ورودی در نظر گرفته شده‌اند. در این بخش تأثیر نامعینی داده‌های ورودی بر روی دقت تخمین روش پیشنهادی و روش کواترنیون با استفاده از داده‌های بدست آمده در یک زمان مشخص بررسی می‌گردد. از آنجا که تابع هدفی که باید کمینه گردد به صورت چندهدفه است، از حلگر بهینه‌یابی چندهدفه *NSGA* در محیط برنامه متلب استفاده شده است. جمعیت اولیه کواترنیون‌ها براساس روش تِریاد[۲۶] تولید شده‌اند. روش تریاد ساده‌ترین روش تعیین وضعیت است. به منظور تعیین وضعیت با

روش تریاد به دو جفت بردار اندازه‌گیری و مرجع نیاز است. در این روش، ماتریس مشاهده A_{obs} با استفاده از بردارهای اندازه‌گیری، و ماتریس مرجع A_{ref} با استفاده از بردارهای مرجع ساخته می‌شوند. بردارهای پایه ماتریس‌های مذکور به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$v_1 = b_1, v_2 = \frac{b_1 \times b_2}{\|b_1 \times b_2\|}, v_3 = b_1 \times v_2$$
$$w_1 = r_1, w_2 = \frac{r_1 \times r_2}{\|r_1 \times r_2\|}, w_3 = r_1 \times w_2$$
$$A_{obs} = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]$$
$$A_{ref} = [w_1 \quad w_2 \quad w_3]$$

b_1 و b_2، بردارهای اندازه‌گیری، r_1 و r_2، بردارهای مرجع، v و w، به ترتیب بردارهای پایه ماتریس‌های A_{obs} و A_{ref} هستند. سپس ماتریس وضعیت به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$A_{Triad} = A_{obs} A_{ref}^{-1}$$

در نهایت می‌توان کواترنیون‌ها را از ماتریس وضعیت محاسبه شده، تعیین کرد. محدوده جستجو ۱۰ درصد مقدار جمعیت اولیه در نظر گرفته شده است.

پاسخ یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه یک مجموعه از پاسخ‌های بهینه تحت عنوان جبهه پارتو است. هیچ یک از پاسخ‌های بهینه موجود در جبهه پارتو نسبت به دیگری ارجحیت ندارد. به عبارت دیگر، هیچ پاسخ بهینه موجود در جبهه پارتو بر دیگری غالب نیست. لیکن، از نقطه نظر کاربردی فقط امکان به کارگیری فقط یکی از پاسخ‌های بهینه وجود دارد که پاسخ ترجیحی نامیده می‌شود و برای انتخاب آن از بین پاسخ‌های بهینه موجود معیاری تعریف می‌گردد. این معیار، کمینه خطای وضعیت نام دارد که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\vartheta\delta = arccos\left(\frac{1}{2}\left(trace(\Delta A - 1)\right)\right) \qquad (۱۳)$$

در اینجا $\vartheta\delta$ بیانگر زاویه اویلر ماتریس ΔA است که خطای وضعیت نامیده می‌شود. ماتریس ΔA به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\Delta A = A_{estimated}^{T} A_{exact} \qquad (۱۴)$$

۴-۱. مثال ۱

دو جفت بردار واحد اندازه‌گیری و مرجع به صورت زیر در نظر بگیرید [۲۷]:

$$\begin{aligned} r_1^{exact} &= [0.2673 \quad 0.5345 \quad 0.8018]^T \\ b_1^{exact} &= [0.7749 \quad 0.3448 \quad 0.5297]^T \\ r_2^{exact} &= [-0.3124 \quad 0.937 \quad 0.1562]^T \\ b_2^{exact} &= [0.6296 \quad 0.6944 \quad -0.348]^T \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

با درنظر گرفتن خطا در داده‌های اندازه‌گیری با توزیع یکنواخت و مقدار بیشینه $\pm 5^o$ ، بردارهای اندازه‌گیری خطادار به صورت زیر خواهند بود [۲۷]:

$$b_1^{perturbed} = [0.781 \quad 0.375 \quad 0.498]^T \qquad (۱۶)$$

$$b_2^{perturbed} = [0.616 \quad 0.707 \quad -0.345]^T$$

وضعیت تخمین زده شده با استفاده از روش کواترنیون و روش پیشنهادی، در جدول (۱) نمایش داده شده است. نتایج بیانگر این موضوع است که کواترنیون‌های تخیمن زده شده توسط روش کواترنیون دارای خطای بیشتری نسبت به روش پیشنهادی است و روش پیشنهادی عملکرد بهتری در حضور نامعینی داشته است.

جدول ۱: مقایسه عملکرد روش کواترنیون و روش پیشنهادی

روش	کواترنیون تخمین زده شده	خطای وضعیت
پاسخ دقیق	$\begin{bmatrix}0.2588\\0\\0.4830\\0.8365\end{bmatrix}$	–
روش کواترنیون	$\begin{bmatrix}0.2643\\-0.0051\\0.4706\\0.8418\end{bmatrix}$	$1.76\ deg$
روش پیشنهادی	$\begin{bmatrix}0.2655\\0\\0.4708\\0.8414\end{bmatrix}$	$1.68\ deg$

۴-۲. مثال ۲

مجموعه بردارهای ورودی و بردار وضعیت مربوطه را به صورت زیر در نظر بگیرید [۱۵]:

$$r_1^{exact} = [-0.54 \quad -0.326 \quad 0.775]^T$$
$$b_1^{exact} = [-0.776 \quad -0.46 \quad 0.43]^T$$
$$r_2^{exact} = [-0.673 \quad 0.000133 \quad 0.74]^T$$
$$b_2^{exact} = [-0.927 \quad 0.01 \quad 0.374]^T$$

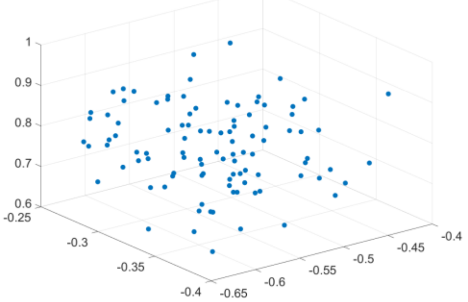
$$q^{exact} = \begin{bmatrix} -0.9746 \\ 0.0707 \\ -0.2122 \\ -0.0125 \end{bmatrix} \tag{۱۷}$$

به منظور تولید داده‌های نامعین هم در بردارهای اندازه‌گیری و هم در بردارهای مرجع، خطایی تصادفی با توزیع یکنواخت و کراندار به مقادیر دقیق بردارهای ورودی اضافه گردیده است. کران‌های پایین و بالای بردارهای اغتشاشی ۲۰ درصد مقدار ورودی در نظر گرفته شده‌اند. سپس به منظور مقایسه دقیقتر، ۱۰۰ داده اغتشاشی تولید شده است و مقدار میانگین واریانس خطای تخمین محاسبه گردیده است. توزیع داده‌های اغتشاشی در شکل‌های ۱ تا ۴ نشان داده شده است. نتایج حاصل نیز در جدول (۲) ارائه شده است. براساس این نتایج روش پیشنهادی در حضور نامعینی‌های کراندار در کلیه بردارهای ورودی، دارای میانگین خطای تخمین کمتری نسبت به روش کواترنیون است. بنابراین روش پیشنهادی، عملکرد مطمئن‌تری نسبت به روش کواترنیون دارد، زیرا کران‌های خطای تخمین آن در محدوده کوچکتری قرار می‌گیرند.

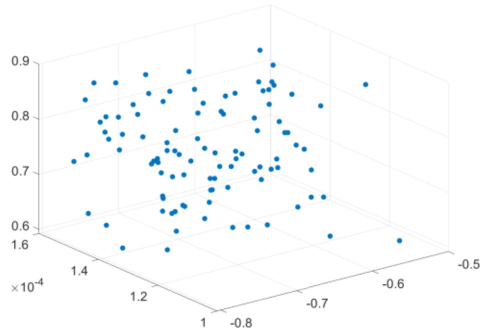
جدول ۲: مقایسه عملکرد روش کواترنیون و روش پیشنهادی

روش	میانگین خطای تخمین	واریانس خطای تخمین
روش کواترنیون	15.1352	95.1604
روش پیشنهادی	0.5699	0.1915

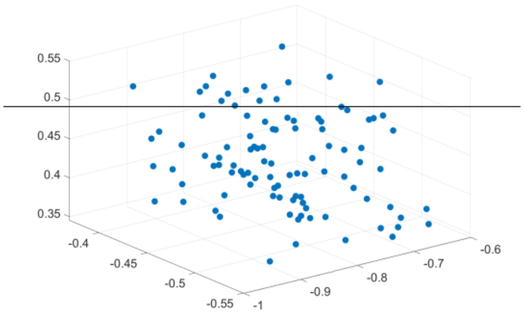
همانطور که از نتایج مشخص است، دقت تخمین وضعیت با روش کواترنیون وابسته به دقت بردارهای ورودی است. بنابراین هر چه خطای بردارهای ورودی بیشتر باشد دقت تخمین نیز به همان نسبت کاهش می‌یابد. در این مثال با تولید ۱۰۰ داده اغتشاشی تصادفی و محاسبه میانگین و واریانس خطای تخمین این موضوع نشان داده شده است. در واقع روش کواترنیون کنترلی بر خطای تخمین ندارد. لیکن در روش پیشنهادی پاسخهایی قابل قبول هستند که علاوه بر تابع هدف، خطای آن را نیز در حضور داده-های اغتشاشی کمینه کنند. در روش پیشنهادی، پاسخهایی بهینه هستند که نتوان توسط آن‌ها یک تابع هدف را بهینه کرد بدون اینکه اثر مخربی بر کمینه‌یابی تابع هدف دیگر داشته باشد. به عبارتی در مسئله مورد بررسی خطای تابع هدف تا جایی کمینه می‌گردد که اثر مخربی بر بهینه‌یابی تابع هدف دیگر نداشته باشد و بالعکس. این امر با کمینه‌یابی پارامترهای α و β برای هر یک از ۱۰۰ داده ورودی حاصل شده است. از آنجا که خطای تابع هدف تابعی از خطای بردارهای ورودی است، بنابراین کمینه کردن خطای تابع هدف باعث کاهش اثر خطای بردارهای ورودی بر دقت تخمین می‌شود. بنابراین میانگین خطای تخمین و واریانس آن نیز کاهش می‌یابد.



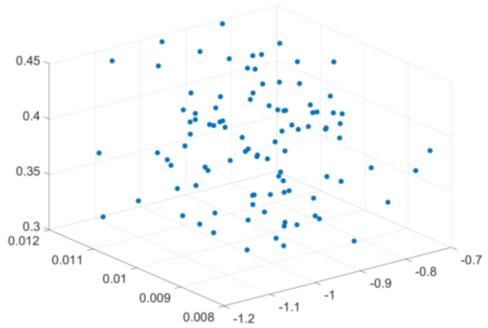
شکل ۱: توزیع بردارهای اغتشاشی r_1



شکل ۲: توزیع بردارهای اغتشاشی r_2



شکل ۳: توزیع بردارهای اغتشاشی b_1



شکل ٤: توزیع بردارهای اغتشاشی b_2

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، مسئله وهبا با استفاده از حساب بازه‌ای به یک مسئله تعیین وضعیت چندهدفه با نامعینی‌های کراندار در داده‌های ورودی تبدیل شد. مسئله چندهدفه غیرخطی حاصل به کمک یک حلگر کمینه‌یاب چندهدفه حل گردید. برای تولید حدس اولیه نیز از الگوریتم تریاد استفاده شد. سپس معیاری تحت عنوان کمینه خطای تخمین به منظور انتخاب پاسخ ترجیحی از بین پاسخ‌های بهینه موجود در جبهه پارتو معرفی گردید. نتایج نشان دادند که روش پیشنهادی عملکرد بهتری در حضور نامعینی نسبت به روش رایج کواترنیون دارد و قادر است کران‌های کوچکتری برای خطای تخمین ارائه دهد. البته، عملکرد روش پیشنهادی وابسته به حدس اولیه و کران‌های جستجو است. بنابراین، ارائه روشی برای تخمین بهتر کران‌های جستجو می‌تواند از موضوعات تحقیقات بعدی باشد.

۶. مراجع

[1]Markley, F.L. and J.L. Crassidis, Fundamentals of spacecraft attitude determination and control, Springer. 2014.

[2]Shuster, M. Approximate algorithms for fast optimal attitude computation. *in Guidance and Control Conference*. 1978.

[3]Shuster, M.D. and S.D. Oh, Three-axis attitude determination from vector observations. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 4, No. 1, pp. 70-77. 1981.

[4]Markley, F.L. and D. Mortari, Quaternion attitude estimation using vector observations. *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 48, No. 2, pp. 359-380. 2000.

[5]Mortari, D., ESOQ-2 single-point algorithm for fast optimal spacecraft attitude determination. *Advances in the Astronautical Sciences*, Vol. 95, pp. 817-826. 1997.

[6]Mortari, D., ESOQ: A closed-form solution to the Wahba problem. *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 45, No. 2, pp. 195-204. 1997.

[7]Markley, F.L., Attitude determination using vector observations and the singular value decomposition. *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 36, No. 3, pp. 245-258. 1988.

[8]Markley, F.L., Attitude determination using vector observations: A fast optimal matrix algorithm. 1993.

[9]Wu, J., et al., Fast linear quaternion attitude estimator using vector observations. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, Vol. 15, No. 1, pp. 307-319. 2018.

[10]Bar-Itzhack, I.Y., REQUEST-A recursive QUEST algorithm for sequential attitude determination. *Journal of Guidance,*

Control, and Dynamics, Vol. 19, No. 5, pp. 1034-1038. 1996.

[11]Choukroun, D., I.Y. Bar-Itzhack, and Y. Oshman, Optimal-REQUEST algorithm for attitude determination. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 27, No. 3, pp. 418-425. 2004.

[12]Psiaki, M.L., Attitude-determination filtering via extended quaternion estimation. *Journal of Guidance ,Control, and Dynamics*, Vol. 23, No. 2, pp. 206-214. 2000.

[13]Christian, J.A. and E.G. Lightsey, Sequential optimal attitude recursion filter. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 33, No. 6, pp. 1787-1800. 2010.

[14]Ahmed, S. and E.C. Kerrigan, Robust Static Attitude Determination via Robust Optimization. *IFAC Proceedings Volumes*, Vol. 44, No. 1, pp. 5807-5812. 2011.

[15]Ahmed, S., E.C. Kerrigan, and I.M. Jaimoukha, A semidefinite relaxation-based algorithm for robust attitude estimation. *IEEE transactions on signal processing*, Vol. 60. No. 8, pp. 3942-3952. 2012.

[16]Yang, H. and L. Carlone, A quaternion-based certifiably optimal solution to the Wahba problem with outliers. in *Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision*. 2019.

[17]Bhatt, M., S. Sukumar ,and A.K. Sanyal. Rigid body geometric attitude estimator using multi-rate sensors. in *2020 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. 2020.

[18]Wu, J., et al. Lasso Wahba's Problem and Its Analytical Solution for Spacecraft Attitude Determination. in *2021 IEEE 17th International Conference on Automation Science and Engineering (CASE)*. 2021. IEEE.

[19]Moore, R.E., Interval analysis. Vol. 4., Prentice-Hall Englewood Cliffs. 1966.

[20]Wahba, G., A least squares estimate of satellite attitude .*SIAM rev*iew, Vol.7, No. 3, pp. 409-409. 1965.

[21]Lerner, G.M., Three-axis attitude determination, in Spacecraft Attitude Determination and Control, J.R. Wertz, Editor, Kluwer Academic: Dordrecht. 1978.

[22]Chang, G., T. Xu, and Q. Wang, Error analysis of Davenport'sq method. *Automatica*, Vol. 75, pp. 217-2202017.

[23]Shuster, M.D., The generalized Wahba problem. *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 54, No. 2, pp. 245-259. 2006.

[24]Moore, R.E., R.B. Kearfott, and J.M. Cloud, Introduction to interval analysis, Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics. 2009.

[25]Martins, J.R. and A.B. Lambe, Multidisciplinary design optimization: a survey of architectures. *AIAA journal*, Vol. 51, No. 9, pp. 2049-2075. 2013.

[26]Gorissen, B.L., İ. Yanıkoğlu, and D. den Hertog, A practical guide to robust optimization. *Omega*, Vol. 53, pp. 124-137. 2015.

[27]Hall, C., Attitude determination. *Spacecraft Attitude Dynamics and Control*, pp. 1-23. 2003.

۷. پی‌نوشت

---

1 Wahba problem
2 Attitude determination
3 Attitude Estimation
4 Least square (LS)
5 q-method
6 Quaternion estimation method
7 Estimation optimal quaternion
8 Singular value decomposition
9 Fast optimal attitude matrix method
10 Fast linear attitude estimator method
11 Batch method
12 The recursive quaternion estimator (request)
13 Optimal request
14 Extended request
15 Sequential optimal attitude recursion filter (soar)
16 Ahmed and Kerrigan
17 Mini-max
18 Quadratic
19 Semidefinite program
20 Linear Matrix inequality constraints
21 Truncated least squares
22 Outlier
23 Geometric estimator
24 Multi-rate
25 Lasso formulation
26 Triad