

# تحلیل غیرخطی فلاتر جسم آزاد در هواپیما با بال منعطف

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۲/۱۹

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۶/۰۹

سلیمان شفققت<sup>۱</sup>، محمدعلی نوریان<sup>۲\*</sup>، سعید ایرانی<sup>۳</sup>

۱- دانشجوی دکتری مهندسی هوافضا، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

۲- استادیار، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

۳- دانشیار، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

## چکیده

در هواپیماهای دارای بال منعطف با نسبت منظری بالا، امکان جفت شدن مدهای دینامیک پرواز و آیرولاستیسیته وجود دارد. این جفت شدن می‌تواند به پدیده فلاتر جسم آزاد منجر شود که موضوع موردبحث در این مقاله است. در مطالعه حاضر از فرض دینامیک پرواز صفحه‌ای و مدل هواپیمای کامل با بال انعطاف‌پذیر استفاده شده است. در بال منعطف و دارای نسبت منظری بالا، اثر عبارات‌های غیرخطی در پاسخ دینامیکی هواپیما قابل صرف‌نظر نیست، از این‌رو برای مدل‌سازی در بخش سازه از مدل تیر اویلر برنولی غیرخطی عمومی با درجات آزادی خمش-خمش-پیچش و در بخش آیرودینامیک از مدل آیرودینامیک ناپایا بر پایه تابع وگنر به همراه مدل واماندگی استاتیکی استفاده شده است. سپس مدل ارائه‌شده از جنبه‌های مختلف از قبیل رفتار دامنه نوسان سیکل حد، تحلیل حساسیت و رفتار زیر بحرانی بررسی شده است.

واژه‌های کلیدی: مدل هواپیمای کامل، فلاتر جسم آزاد، مدل تیر اویلر برنولی غیرخطی عمومی، آیرودینامیک وگنر، مدل واماندگی

استاتیکی

## Nonlinear body-freedom flutter analysis in aircraft with flexible high aspect ratio wing

Salman shafaghat<sup>1</sup>, Mohammadali Noorian<sup>2\*</sup>, Saeid Irani<sup>3</sup>

1 PhD Candidate, K N Toosi University of Technology, Tehran, IRAN

2\* Assistant Professor, K N Toosi University of Technology, Tehran, IRAN

3 Associate Professor, K N Toosi University of Technology, Tehran, IRAN

### Abstract

In aircraft with flexible high aspect ratio wings, it is possible to couple flight dynamics modes and aeroelasticity. This coupling can lead to the body-freedom flutter (BFF) phenomenon, which is the subject of this article. In this study, the planar flight dynamics assumption and the model of a complete aircraft with flexible wings have been used. In this type of aircraft, due to the high aspect ratio of the wings, the effects of nonlinear terms on the dynamic response of the aircraft cannot be ignored. Therefore, for modeling the structure, the generalized nonlinear flexible Euler-Bernoulli beam model with bending-bending-torsion degrees of freedom and for modeling the aerodynamics, the Wagner function with the static stall model has been used. Using the developed model, the nonlinear behavior of the wing and the aircraft due to the occurrence of the BFF and wing flutter (WF) is studied. Also, a sensitivity analysis for the BFF is done and post-instability limit cycle oscillations and subcritical behaviors are investigated.

**Keywords:** full aircraft model, body-freedom flutter, Generalized nonlinear Euler-Bernoulli beam model, Wagner aerodynamics, static stall model

۱۹۱

سال ۱۱- شماره ۱

بهار و تابستان ۱۴۰۱

نشریه علمی دانش و

فناوری هوافضا



## ۱. مقدمه

در هواپیمای کامل مودهای دینامیک پرواز و مودهای آیرولاستیک بال می‌توانند با یکدیگر وارد برهمکنش متقابل شوند. این برهمکنش از دو منظر اهمیت دارد، از طرفی دینامیک پرواز می‌تواند سرعت فلاتر بال هواپیما را متفاوت از فلاتر مدل بال یکسرگردار کند و همچنین در رفتار غیرخطی آن به‌خصوص نوسانات سیکل حد<sup>۱</sup> نیز اثرگذار باشد و از طرفی دیگر در نتیجه جفت‌شدگی مود خمشی بال در معادلات با مود تناوب کوتاه<sup>۲</sup> در دینامیک پرواز امکان رخ دادن پدیده فلاتر جسم آزاد<sup>۳</sup> خواهد بود که همین پدیده نیز به‌نوبه خود سیستم غیرخطی را وارد نوسانات سیکل حد می‌کند. مطالعه این مسائل در مباحث پایداری آیرولاستیک، طراحی بر مبنای آیروسرووالاستیسته و خستگی سازه اهمیت دارد. مرور کارهای پیشین شامل دو بخش است، در بخش اول مطالعات انجام‌شده در حوزه پدیده فلاتر جسم آزاد بررسی می‌شود و در بخش دوم مدل‌های غیرخطی سازه‌ای و آیرودینامیکی مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

دو دسته از هواپیماها مستعد رخ دادن پدیده فلاتر جسم آزاد هستند. دسته اول هواپیماهای با بال دارای نسبت منظری بالا مانند HALE<sup>۴</sup> می‌باشند، در این نوع هواپیماها مود خمشی بال فرکانس پایینی دارد که در نتیجه به فرکانس مود تناوب کوتاه دینامیک پرواز نزدیک می‌شود و رخداد فلاتر جسم آزاد را محتمل می‌کند. دسته دوم هواپیماهایی با پیکره‌بندی خاص مانند

هواپیمای با بدنه و بال ترکیبی (BWB<sup>۵</sup>) می‌باشند که نتیجه این نوع پیکره‌بندی افزایش فرکانس مود تناوب کوتاه است که به‌نوبه خود باعث کاهش سرعت وقوع فلاتر جسم آزاد می‌شود. با وجود اینکه پدیده فلاتر جسم آزاد سال‌های زیادی است که شناسایی شده است، اما از آنجاکه هواپیماهایی که در معرض این پدیده قرار دارند هواپیماهای نوین می‌باشند، در دو دهه گذشته بیشتر به این پدیده پرداخته شده است. نیبلیت [۱] اساس پدیده فلاتر جسم آزاد را مورد مطالعه قرار داده است. او در فرمولاسیون خود مود پیچ<sup>۶</sup> حول مرکز ثقل هواپیما و مود خمشی بال را در نظر گرفته است. شای و همکاران [۲] یک مدل را در تونل باد برای مطالعه فلاتر جسم آزاد مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از یک سیستم تعلیق استفاده کردند که به‌طور مؤثری دامنه نوسانات را در درجات آزادی پیچ، یاو<sup>۷</sup> و پلانج<sup>۸</sup> کاهش می‌داد و همچنین با افزودن یک جرم در نوک هواپیما موجب افزایش ممان اینرسی مود پیچ شدند که منجر به افزایش قابل توجه سرعت رخداد پدیده فلاتر جسم آزاد شد. ریچاردز و همکاران [۳] دریافتند که دینامیک مود پیچ هواپیما نقش مهمی در پدیده فلاتر جسم آزاد ایفا می‌کند. نتایج کار آن‌ها نشان داد که حرکت دادن مرکز ثقل هواپیما به سمت جلوی بدنه نسبت به حرکت آن به سمت عقب هواپیما (حتی در صورتی که هر دو حالت تأثیر مشابهی بر ممان اینرسی داشته باشند) تأثیر قابل توجهی در افزایش سرعت پدیده فلاتر جسم آزاد خواهد داشت. در آخر آن‌ها از دیدگاه طراحی



5- Blended wing body  
6- Pitch mode  
7- Yaw  
8- Plung

1- Limit Cycle Oscillation  
2- Short period mode  
3- Body freedom flutter  
4- High altitude, long endurance

توصیه کردند در مواقعی که حتی وزن هواپیما سبک است، ممان اینرسی پرنده تا حد امکان بالا نگه داشته شود. مردانپور و همکاران [۴] به بررسی موقعیت موتور بر روی بال در پدیده فلاتر جسم آزاد پرداختند. در مدل‌سازی هواپیما آن‌ها در بخش سازه از مدل تیر کامپوزیت غیرخطی و در مدل‌سازی آیرودینامیک از تئوری پیترز بهره بردند. آن‌ها دریافتند که این پدیده زمانی در بالاترین سرعت رخ می‌دهد که موتور در موقعیت ۶۰ درصد طول دهانه و در جلوی محور الاستیک قرار داشته باشد. آن‌ها در ادامه کارشان [۵] تحقیقات را برای هواپیمای ۴ موتوره تکرار کردند و به این نتیجه رسیدند هنگامی که موتورها در جلو محور الاستیک قرار می‌گیرند مشابه حالت قبل ماکزیمم سرعت برای این پدیده به دست می‌آید و هنگامی که موتورها در پشت محور الاستیک قرار می‌گیرند برای ماکزیمم شدن سرعت فلاتر جسم آزاد، موتورها در طول دهانه باید در نزدیک‌ترین فاصله به ریشه بال قرار داد. لائو و همکاران [۶] پدیده فلاتر جسم آزاد را بر روی هواپیمایی با بال‌های با نسبت منطری بالا و سوئیپ رو به عقب مورد مطالعه قرار دادند. نتایج تحقیقات آن‌ها نشان داد که تغییر حاشیه استاتیکی<sup>۹</sup> در حالت حلقه باز اثر قابل توجهی در فلاتر جسم آزاد ندارد و در هواپیمای حلقه بسته نیز موجب کاهش یا رفع مشکل ناشی از این پدیده نمی‌شود. لی و همکاران [۷] اثر ۸ پارامتر سفتی خمشی خارج صفحه بال، وزن، موقعیت محموله<sup>۱۰</sup>، بالانس جرمی نوک بال، طول دهانه بال، زاویه سوئیپ بال و موقعیت خط ترکیب بال و بدنه را روی پدیده فلاتر جسم آزاد مورد مطالعه

قرار دادند. چاو و همکاران [۸] پدیده فلاتر جسم آزاد را در یک بال با دهانه متغیر با وجود حرکات دینامیک صلب مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها یک مدل فضای حالت آیروالاستیک را با تیر اوپلر برنولی سطح مقطع متغیر و تئوری آیرودینامیک نواری ناپایا توسعه دادند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که حرکات جسم صلب، به خصوص حرکت پیچ، در تحلیل فلاتر باید در نظر گرفته شود. آن‌ها اثر پارامترهای بدنه مانند شعاع ژیراسیون را در فلاتر جسم آزاد هواپیما و فلاتر بال مورد مطالعه قرار دادند و دریافتند که این پارامتر اثر قابل توجهی بر روی فلاتر جسم آزاد دارد ولی اثر مهمی بر فلاتر بال ندارد. ایانلی و همکاران [۹] از یک چارچوب تحلیل قدرتمند بر مبنای مدل‌سازی تبدیل کسری خطی و تحلیل مقدار تکین سازه‌ای  $\mu$  در تحلیل فلاتر جسم آزاد بهره بردند. آن‌ها در کار خود توانستند اثر عدم قطعیت‌ها را بر انواع ناپایداری مانند فلاتر بال و فلاتر جسم آزاد نشان دهند.

در هواپیماهایی که دارای بال منعطف با نسبت منطری بالا هستند، بال می‌تواند دچار تغییرشکل‌های بزرگ شود. این تغییرشکل‌ها باعث اهمیت یافتن عبارات غیرخطی در رفتار دینامیک پرواز و آیروالاستیسیته هواپیما می‌شود. تحقیقات زیادی دربارهٔ مدل‌سازی رفتار آیروالاستیک با مدل‌های سازه غیرخطی و آیرودینامیک غیرخطی انجام شده است. نجاتی و همکاران [۱۰] از یک مدل غیرخطی سازه‌ای درجه سه تعمیم یافته برای تحلیل آیروالاستیک بال با نسبت منطری بالا استفاده کردند. آن‌ها روش جدیدی را بر مبنای توابع شاخص برای محاسبه آیرودینامیک ناپایا ارائه دادند. پتیل و همکاران [۱۱] نتایج مربوط به نوسانات سیکل

9- Static margin  
10- Payload





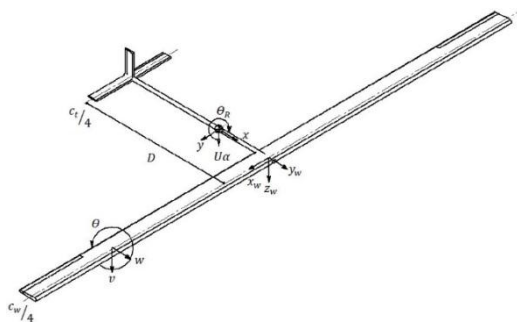
حد را برای بال با نسبت منظری بالا ارائه دادند. آن‌ها در مدل‌سازی خود غیرخطی‌های سازه‌ای را به همراه غیرخطی آیرودینامیکی (واماندگی استاتیکی) لحاظ کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که در نظر گرفتن آیرودینامیک واماندگی، دامنه نوسانات سیکل حد را در ناحیه بعد از فلاتر محدود می‌کند. کیم و همکاران [۱۲] نوسانات سیکل حد یک بال یکسرگردار را با یک مخزن خارجی<sup>۱۱</sup> مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در کار خود سه دسته غیرخطی را در نظر گرفتند که عبارت‌اند از غیرخطی سازه‌ای که با استفاده از تیر غیرخطی مدل‌سازی شده، است غیرخطی آیرودینامیکی که توسط مدل واماندگی استاتیکی ارائه شده و غیرخطی ناشی از وجود مخزن خارجی، آن‌ها نشان دادند که برای اینکه در زیر سرعت فلاتر نیز نوسانات سیکل حد داشته باشیم باید غیرخطی‌ها از مرتبه سه باشند. بدیعی و همکاران [۱۳] در پژوهش خود برای ارائه غیرخطی‌های آیرودینامیکی از تابع وگنر و مدل واماندگی استاتیکی استفاده کردند. آن‌ها نشان دادند که مدل واماندگی استاتیکی در مقایسه با مدلی که تنها دارای غیرخطی سازه‌ای است و آیرودینامیک آن خطی است، در رفتاری زیر بحرانی<sup>۱۲</sup> سرعت شروع نوسانات سیکل حد را افزایش و دامنه آن را کاهش می‌دهد.

در کار حاضر پدیده فلاتر جسم آزاد غیرخطی و فلاتر بال غیرخطی در هواپیما کامل بررسی می‌شود و رفتار نوسانات سیکل حد بعد از این ناپایداری‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ادامه تحلیل حساسیت روی پدیده فلاتر جسم آزاد غیرخطی با در نظر گرفتن پارامترهای مؤثر در

این پدیده انجام می‌گیرد و در آخر رفتار زیر بحرانی پدیده فلاتر جسم آزاد بررسی می‌شود. برای مدل‌سازی دینامیک پرواز، حرکت صفحه‌ای فرض شده است. به طوری که درجات آزادی پیچ و پلانچ (درجات آزادی مؤثر در فلاتر جسم آزاد) در معادلات لحاظ شده‌اند. در مدل‌سازی هواپیما، الاستیک، بال، انعطاف‌پذیر و بدنه و دم هواپیما، به صورت صلب فرض شده‌اند. سازه بال با تیر اوپلر برنولی غیرخطی با درجات آزادی خمش-خمش-پیچش مدل شده است. در مدل‌سازی آیرودینامیک ناپایا روی بال از فرمولاسیون وگنر استفاده شده است. معادلات غیرخطی در کار حاضر به سه دسته تقسیم می‌شوند، دسته اول ضریب برای غیرخطی در معادلات دینامیک پرواز، دسته دوم مدل واماندگی استاتیکی در آیرودینامیک بال و دسته سوم معادلات غیرخطی تعمیم‌یافته برای تیر اوپلر برنولی در معادلات سازه.

## ۲. معادلات حاکم

پدیده فلاتر جسم آزاد از برهم‌کنش متقابل دینامیک پرواز هواپیما و آیروالاستیسیته بال به وجود می‌آید. از این رو در این بخش معادلات حاکم شامل سه دسته معادلات دینامیک پرواز هواپیما، آیروالاستیسیته بال و برهم‌کنش بین این دو به صورت جداگانه ارائه می‌شود.



شکل ۱- دستگاه مختصات هواپیما، بال و تغییر

شکل‌ها

11- Store

12- Subcritical

## ۱-۲. معادلات دینامیک پرواز

برای به دست آوردن معادلات دینامیک پرواز فرض حرکت صفحه‌ای برای هواپیما در نظر گرفته شده است. شکل (۱) دستگاه مختصات هواپیما، بال و تغییر شکل‌ها را نشان می‌دهد. در نتیجه فرض حرکت صفحه‌ای، درجات آزادی موده‌ای جسم صلب هواپیما شامل حرکت پلانچ و پیچ می‌شود و در نتیجه ترکیب این دو درجه آزادی، مود تناوب کوتاه حاصل می‌شود. معادلات تعادل برای سیستم دو درجه آزادی به ترتیب زیر است:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\theta}_R \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (mU - Z_{\dot{\alpha}}) & -(Z_q + U) \\ -M_{\dot{\alpha}} & -M_q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\theta}_R \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -Z_{\alpha} & 0 \\ -M_{\alpha} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \theta_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

در رابطه (۱)،  $\alpha$  و  $\theta_R$  زاویه حمله و زاویه پیچ هواپیما می‌باشند،  $U$ ،  $m$  و  $I_{yy}$  سرعت، جرم و ممان اینرسی هواپیما حول محور  $y$  بوده و  $Z_{\alpha}$ ،  $M_{\alpha}$ ،  $Z_{\dot{\alpha}}$ ،  $M_{\dot{\alpha}}$ ،  $Z_q$  و  $M_q$  مشتقات پایداری آیرودینامیکی هستند که در مرجع [۱۳] معرفی شده‌اند.

همان‌طور که در دیاگرام‌های ضریب برآ برحسب زاویه حمله برای هواپیما مشخص است، در زوایای حمله بزرگ، ضریب برآ رفتار غیرخطی دارد و در نقطه واماندگی، شیب منحنی صفر می‌شود. بنابراین به جای رابطه خطی در روابط آیرودینامیک خطی باید از یک چندجمله‌ای استفاده شود، که ضرایب این چندجمله‌ای با برازش منحنی بر اطلاعات به دست آمده از تست تونل باد به دست می‌آید. با فرض ایرفویل NACA 0012 برای بال پرنده ضریب برآ طبق

رابطه (۲) تخمین زده می‌شود [۱۴]:

$$C_L = C_{L_{\alpha}} (\alpha - c_3 \alpha^3) \quad (2)$$

$$= 7.074\alpha - 64.3064\alpha^3$$

که ضریب  $c_3$  در آن به ترتیب زیر به دست می‌آید:

$$c_3 = 0.00034189 \left( \frac{180}{\pi} \right)^3 / C_{L_{\alpha}} \quad (3)$$

با جایگذاری معادله (۲) در ترم‌های غیرخطی معادلات دینامیک پرواز، نیروی غیرخطی ناشی از آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$FD_{NO} = \begin{Bmatrix} -c_3 Z_{\alpha} \alpha^3 \\ -c_3 M_{\alpha} \alpha^3 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

## ۲-۲. معادلات آیروالاستیسیته بال

### ۱-۲-۲. معادلات دینامیک سازه

بال سازه‌ای است که تحت بارهای آیرودینامیکی قرار دارد. برای بال با نسبت منظری بالا می‌توان با دقت قابل قبولی از فرض تیر اویلر برنولی استفاده کرد که دارای درجات آزادی خمش خارج صفحه، خمش داخل صفحه و پیچش است. بنابراین معادلات دینامیک سازه غیرخطی بال را (با صرف نظر کردن از عبارات‌های مربوط به غیرخطی اینرسی) می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} m_w \ddot{w} + EI_{\eta} w^{iv} &= G_w + L_w \\ m_w \ddot{v} - m_w e_y \ddot{\theta} + EI_{\zeta} v^{iv} &= G_v + L_v \\ j_{\xi} \ddot{\theta} - m_w e_y \ddot{w} - GJ_{\xi} \theta'' &= G_{\theta} + M_{ea} \end{aligned} \quad (5)$$

در رابطه (۵)،  $m_w$  و  $e_z$  جرم بر واحد طول بال و فاصله محور الاستیک از مرکز جرم بال و  $EI_{\eta}$ ،  $EI_{\zeta}$ ،  $j_{\xi}$  و  $GJ_{\xi}$  به ترتیب ممان اینرسی بر واحد طول، صلبیت خمشی داخل صفحه، صلبیت خمشی خارج صفحه و صلبیت



پیچشی هستند. همان طور که در شکل (۱) دیده می شود،  $x_w$ ،  $y_w$  و  $z_w$  راستاهای دستگاه مختصات بال هستند، که به ترتیب در راستای دهانه، وتر و ضخامت بال می باشند. و  $\xi$ ،  $\eta$  و  $\zeta$  راستاهای دستگاه مختصات بال تغییر شکل یافته هستند که به ترتیب متناظر با راستاهای  $x_w$ ،  $y_w$  و  $z_w$  در بال تغییر شکل نیافته می باشند. همچنین،  $L_a$  و  $M_{ea}$  نیرو و ممان آیرودینامیکی بال و  $G_w$ ،  $G_v$  و  $G_\theta$  ترم های غیرخطی سازه ای می باشند که به تفصیل در مرجع [۱۰] ارائه شده اند.

## ۲-۲-۲. معادلات آیرودینامیکی بال

برای مدل سازی نیروی آیرودینامیک بر روی بال از تئوری آیرودینامیک ناپایا بر اساس تابع وگنر استفاده شده است. بر این مبنا، نیرو و ممان منتج شده از آیرودینامیک ناپایا را می توان به شکل زیر بیان کرد [۱۷]:

$$L = \pi \rho b^2 [\ddot{v} - ab\ddot{\theta}] + 2\pi \rho U b \times \left( \varphi(0)\dot{w} + b \left( \frac{1}{2} - a \right) \left[ \varphi(0) + \frac{1}{1-2a} \right] \dot{\theta} + \dot{\varphi}(0)w + \left[ U\varphi(0) + b \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\varphi}(0) \right] \theta \right) - 2\pi \rho U b \left[ w(0) + b \left( \frac{1}{2} - a \right) \theta(0) \right] \dot{\varphi}(t) \quad (6)$$

$$- 2\pi \rho U b \times \left( \lambda_{w1} e^{-\varepsilon_1 t} \int_0^t w(\sigma) e^{\varepsilon_1 \sigma} d\sigma + \lambda_{w2} e^{-\varepsilon_2 t} \int_0^t w(\sigma) e^{\varepsilon_2 \sigma} d\sigma \right) + 2\pi \rho U b \times \left( \lambda_{\theta 1} e^{-\varepsilon_1 t} \int_0^t \theta(\sigma) e^{-\varepsilon_1 \sigma} d\sigma + \lambda_{\theta 2} e^{-\varepsilon_2 t} \int_0^t \theta(\sigma) e^{-\varepsilon_2 \sigma} d\sigma \right) M_{e.a.} = \pi \rho b^3 \left[ a\ddot{v} - b \left( \frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\theta} \right] + 2\pi \rho U b^2 \left( \frac{1}{2} + a \right) \times \left( \varphi(0)\dot{w} + b \left( \frac{1}{2} - a \right) \left[ \varphi(0) - \frac{1}{1+2a} \right] \dot{\theta} + \dot{\varphi}(0)w + \left[ U\varphi(0) + b \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\varphi}(0) \right] \theta \right) - \quad (7)$$

$$2\pi \rho U b^2 \left( \frac{1}{2} + a \right) \times \left[ w(0) + b \left( \frac{1}{2} - a \right) \theta(0) \right] \dot{\varphi}(t) - 2\pi \rho U b^2 \left( \frac{1}{2} + a \right) \times \left( \lambda_{w1} e^{-\varepsilon_1 t} \int_0^t w(\sigma) e^{\varepsilon_1 \sigma} d\sigma + \lambda_{w2} e^{-\varepsilon_2 t} \int_0^t w(\sigma) e^{\varepsilon_2 \sigma} d\sigma \right) + 2\pi \rho U b^2 \times \left( \lambda_{\theta 1} e^{-\varepsilon_1 t} \int_0^t \theta(\sigma) e^{\varepsilon_1 \sigma} d\sigma + \lambda_{\theta 2} e^{-\varepsilon_2 t} \int_0^t \theta(\sigma) e^{\varepsilon_2 \sigma} d\sigma \right)$$

جایی که:

$$\lambda_{wi} = c_i \varepsilon_i^2 \quad (8)$$

$$\lambda_{\theta i} = c_i \varepsilon_i \left[ U - \varepsilon_i b \left( \frac{1}{2} - a \right) \right]$$

و تابع وگنر به صورت زیر تقریب زده می شود: ثوابت  $c_1$  و  $c_2$  که از تقریب جونز<sup>۱۳</sup> به دست می آیند عبارت اند از:

$$c_1 = 0.165, c_2 = 0.335, \quad \varepsilon_1 = 0.0455(U/b), \quad \varepsilon_2 = 0.3(U/b)$$

با توجه به رابطه کلی برآ می توان نوشت:

$$L = qsC_{L\alpha} \alpha_E \quad (10)$$

در نتیجه رابطه زاویه حمله به شکل زیر به دست می آید:

$$\alpha_E = \frac{L}{qsC_{L\alpha}} \quad (11)$$

که در آن  $q$  و  $s$  فشار دینامیکی و سطح بال می باشند. با توجه به رابطه (۶) و (۱۱)، زاویه حمله برای تابع وگنر به دست می آید [۱۳]. با توجه به روند به دست آمدن عبارتهای غیرخطی در بخش دینامیک پرواز برحسب مدل واماندگی استاتیکی، عبارتهای غیرخطی نیرو و گشتاور آیرودینامیک وگنر روی بال نیز به ترتیب زیر

حاصل می‌گردد:

(۱۶)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{RR} & \mathbf{M}_{RE} \\ \mathbf{M}_{ER} & \mathbf{M}_{EE} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_R \\ \ddot{\mathbf{x}}_E \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{RR} & \mathbf{C}_{RE} \\ \mathbf{C}_{ER} & \mathbf{C}_{EE} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_R \\ \dot{\mathbf{x}}_E \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{RR} & \mathbf{K}_{RE} \\ \mathbf{K}_{ER} & \mathbf{K}_{EE} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_R \\ \mathbf{x}_E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_{NO}^{RR} + \mathbf{E}_{NO}^{RE} \\ \mathbf{E}_{NO}^{ER} + \mathbf{E}_{NO}^{EE} \end{Bmatrix}$$

$$L_{NO} = -C_{L\alpha} c_3 \alpha_E^3 = -C_{L\alpha} c_3 \left( \frac{L}{qsC_{L\alpha}} \right)^3$$

$$M_{NO} = -\left( b \left( \frac{1}{2} + a \right) \right) C_{L\alpha} c_3 \alpha_E^3$$

$$= -\left( b \left( \frac{1}{2} + a \right) \right) C_{L\alpha} c_3 \left( \frac{L}{qsC_{L\alpha}} \right)^3$$

در رابطه (۱۲)، اندیس‌های  $R$  و  $E$  اشاره به بخش صلب و الاستیک دارند. هم‌چنین حالت‌های سیستم  $\mathbf{x}_R = \{\alpha \ \theta_R\}^T$  و  $\mathbf{x}_E = \{w \ \theta\}^T$  و عبارات  $E_{NO}$  غیرخطی شامل غیرخطی‌های سازه‌ای و آیرودینامیکی می‌باشند.

### ۳. نتایج

#### ۳-۱. اعتبارسنجی

اعتبارسنجی در این کار شامل دو بخش می‌شود. در بخش اول به اعتبارسنجی فلاتر بال و فلاتر جسم آزاد پرداخته می‌شود. برای این کار نمودار موقعیت قطب‌ها به‌عنوان تابعی از سرعت جریان برای سه مود تناوب کوتاه هواپیما و مودهای خمشی و پیچشی بال در مقایسه با مرجع [۹] در شکل (۲) رسم شده است.

#### ۳-۲. معادلات برهم‌کنش دینامیک پرواز و آیروالاستیسیته

زاویه حمله کل در هواپیما از جمع زاویه حمله دینامیک پرواز و الاستیک بال به وجود می‌آید و این به عبارات جفت شده بین معادلات دینامیک پرواز هواپیما و آیروالاستیسیته بال منجر می‌شود. زاویه حمله بال در این بخش با فرض آیرودینامیک شبه پایا به دست می‌آید و زاویه حمله هواپیما از حرکت پلانچ و پیچ به ترتیب زیر حاصل می‌شود:

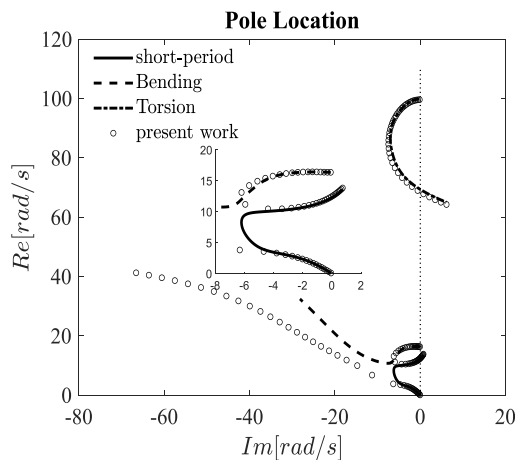
$$\alpha_t = \alpha_R + \alpha_E \quad (۱۳)$$

که در آن  $\alpha_R$  و  $\alpha_E$  به ترتیب زاویه حمله صلب و زاویه حمله الاستیک می‌باشند که به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\alpha_R = \alpha + \frac{d\theta_R}{U} \quad (۱۴)$$

$$\alpha_E = \theta + \frac{\dot{v}}{U} \quad (۱۵)$$

که در آن  $d$  فاصله بین مرکز آیرودینامیک بال با مرکز ثقل هواپیما می‌باشد. زاویه حمله کل،  $\alpha_t$ ، در آیروالاستیسیته بال جایگزین زاویه حمله الاستیک می‌گردد و در معادلات دینامیک پرواز جایگزین زاویه حمله صلب می‌گردد. به‌این ترتیب معادلات جفت شده شکل می‌گیرند که به شکل ماتریسی زیر قابل بیان می‌باشند:



شکل ۲. مقایسه نمودار قطبی مود تناوب کوتاه، خمشی و پیچش بال کار حاضر با مرجع [۹]

۱۹۷

سال ۱۱- شماره ۱  
بهار و تابستان ۱۴۰۱  
نشریه علمی دانش و  
فناوری هوا فضا



بعد از ناپایداری‌های متناظر در مقایسه با مرجع [۹] در جدول (۱) ارائه شده است. همان‌طور که در شکل (۲) و جدول (۱) دیده می‌شود نتایج حاصل از دو پژوهش با وجود تفاوت در مدل آیرودینامیک استفاده شده تطابق خوبی با یکدیگر دارند.

## جدول ۲. مشخصات هواپیما

پارامتر	نماد	مقدار
وتر بال	$c$	1.829 m
وتر دم	$c_t$	0.3 m
دهانه بال	$l$	6.096 m
دهانه دم	$l_t$	2.2 m
موقعیت مرکز الاستیک بال	$x_{e.a.}$	0.6096 chord
موقعیت مرکز جرم بال	$x_{c.g.}$	0.7925 chord
جرم واحد طول بال	$m_w$	35.7187 kg / m
جرم کل هواپیما	$m$	$1.351 \times 10^3$ kg
ممان اینرسی بال (حول مرکز الاستیک)	$j_\xi$	35.695 kg.m
ممان اینرسی هواپیما (حول مرکز جرم)	$I_{yy}$	$1.4 \times 10^3$ kg.m <sup>2</sup>
صلبیت پیچشی بال	$GJ_\xi$	$0.989 \times 10^6$ N.m <sup>2</sup>
صلبیت خمشی بال	$EI_\eta$	$9.765 \times 10^6$ N.m <sup>2</sup>
فاصله مراکز آیرودینامیکی بال و دم	$D$	5 m

جدول ۱. مقایسه نتایج کار حاضر با مرجع [۹] برای فلاتر بال و فلاتر جسم آزاد

مراجع	مرجع [۹]	کار حاضر
سرعت فلاتر بال	162.8 m / s	163.7 m / s
فرکانس فلاتر بال	69.3 m / s	68.45 rad / s
سرعت فلاتر جسم آزاد	150.3 m / s	149.8 m / s
فرکانس فلاتر جسم آزاد	12.3 rad / s	12.49 rad / s

در بخش دوم نتایج غیرخطی ارزیابی می‌شود. به این منظور، پاسخ زمانی خیز نوک بال برای هواپیما با مشخصات مندرج در جدول (۲) در سرعت جریان  $28 \text{ m/s}$  و جابه‌جایی اولیه  $4 \text{ m}$  با پژوهش بدیعی و همکاران [۱۳] و پتیل و همکاران [۱۱] مقایسه می‌شود. نتایج این مقایسه در شکل (۳) آمده است که رفتار تقریباً مشابهی را نشان می‌دهد و مقادیر دامنه نوسان سیکل حد نیز به یکدیگر نزدیک هستند.

## ۲-۳. مطالعه درباره نوسان سیکل حد

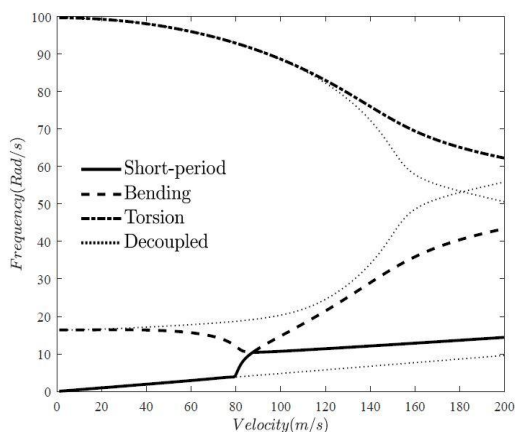
در این بخش به بررسی پاسخ زمانی سیستم





مشخص شده‌اند، میسر می‌شود. این نمودارها برای نمایش تأثیر جفت‌شدگی در مودهای درگیر رسم شده‌اند و در بخش‌های بعد نیز برای توصیف رفتار سیستم استفاده می‌شوند. همچنین لازم به توضیح است که در شکل (۴) مود تناوب کوتاه با مقدار فرکانس صفر در سرعت جریان صفر، قابل‌شناسایی است، در صورتی که مود خمشی بال، با مقدار کمتر و مود پیچشی با مقدار بزرگ‌تر، در سرعت جریان صفر دارای فرکانسی برابر با فرکانس طبیعی خود است.

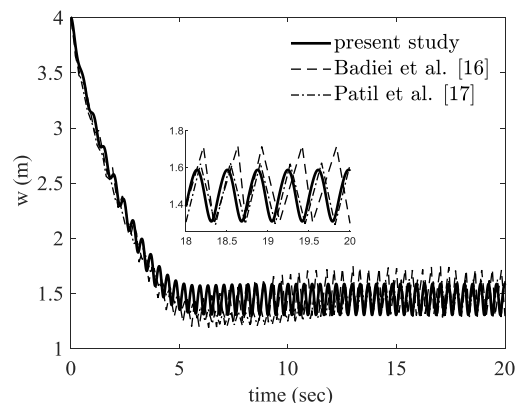
با توجه به شکل (۵) در سرعتی که علامت میرایی مود خمشی از منفی به مثبت تغییر پیدا می‌کند، فلاتر جسم آزاد رخ می‌دهد. نتایج به‌دست آمده به این ترتیب است که سرعت فلاتر بال جسم آزاد  $149.9 \text{ m/s}$  و سرعت فلاتر بال  $163.7 \text{ m/s}$  است.



شکل ۴. نمودار فرکانس-سرعت در حالت وجود و عدم وجود برهم‌کنش بین آیرولاستیسیته و

$$\frac{EI}{EI_{Goland}} = 0.12$$

در ادامه رفتار سیستم غیرخطی بررسی می‌شود. به این منظور دامنه سیکل حد برای سه متغیر حالت زاویه حمله هواپیما،  $\alpha$ ، خیز نوک بال،  $w$ ، و پیچش نوک بال،  $\theta$ ، برای بازه‌ای از



شکل ۳. مقایسه دامنه نوسان سیکل حد خیز نوک بال کار حاضر با مراجع [۱۱] و [۱۲]

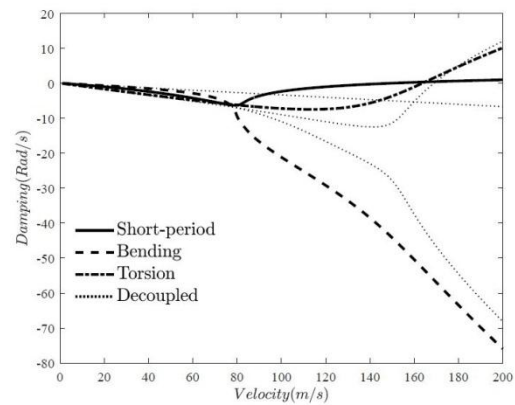
برای به وجود آوردن این شرایط، سفتی خمشی بال که در هر دو ناپایداری نقش اساسی دارد، تغییر می‌کند. از آنجایی که پدیده فلاتر جسم آزاد از برهم‌کنش مود خمشی بال با مود تناوب کوتاه هواپیما پدید می‌آید با کاهش سفتی خمشی بال می‌توان فرکانس خمشی را به فرکانس مود تناوب کوتاه نزدیک کرد و در نتیجه سرعت فلاتر جسم آزاد را به زیر سرعت فلاتر بال رساند.

### ۳-۲-۱. وقوع فلاتر جسم آزاد قبل از فلاتر بال

برای ایجاد این شرایط پارامتر  $\frac{EI}{EI_{Goland}} = 0.12$  در نظر گرفته شده است که این پارامتر نسبت صلبیت خمشی فرضی بال به صلبیت خمشی بال گولند<sup>۱۴</sup> می‌باشد. نمودارهای فلاتر برای این شرایط در شکل‌های (۴) و (۵) نشان داده شده است. در شکل‌های (۴) و (۵) نمودارهایی که با نقطه‌چین نمایش داده شده‌اند مربوط به حالتی هستند که برهم‌کنش بین معادلات آیرولاستیسیته و دینامیک پرواز حذف شده و این کار با صرف‌نظر کردن از عبارتهای جفت شده در معادله (۱۶) که با زیرنویس RE

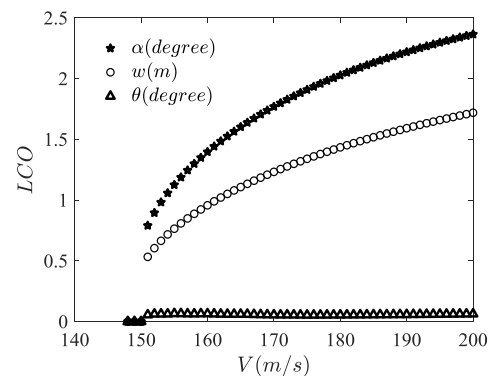
14- Goland

سرعت که هر دو پدیده ناپایداری را در بر بگیرد رسم شده است.



شکل ۵. نمودار میرایی-سرعت در حالت وجود و عدم وجود برهمکنش بین آیروالاستیسیتیه و

$$\frac{EI}{EI_{Goland}} = 0.12$$



شکل ۶. نمودار دامنه نوسانات سیکل حد برحسب

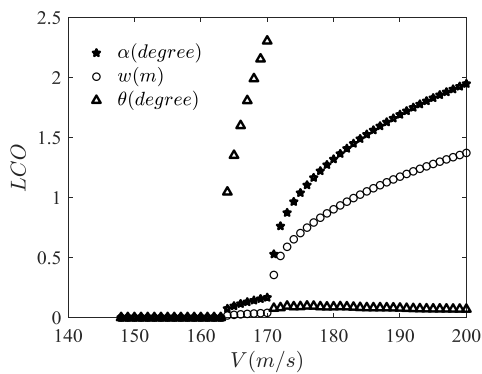
$$\frac{EI}{EI_{Goland}} = 0.12$$

سرعت برای  $\alpha$ ،  $w$  و  $\theta$  به ازای  $\frac{EI}{EI_{Goland}} = 0.12$  با مشاهده شکل (۶) می توان دید که افزایش سرعت، طبق انتظار، افزایش دامنه نوسان سیکل حد را به همراه دارد و نکته حائز اهمیت این است که در محدوده بین سرعت فلاتر جسم آزاد و فلاتر بال، شیب نمودار بیشتر از شیب در محدوده بعد فلاتر بال است که به نوعی می تواند نشان دهنده این واقعیت باشد که فلاتر جسم آزاد می تواند به دامنه های بزرگتر نوسان سیکل حد منجر گردد.

۳-۲-۲. وقوع فلاتر بال قبل از فلاتر جسم آزاد برای رخداد مورد مطالعاتی دوم، پارامتر

$$\frac{EI}{EI_{Goland}} = 0.155$$

فرض، فلاتر بال زودتر از فلاتر جسم آزاد اتفاق می افتد. به این ترتیب که سرعت فلاتر بال  $162.5 \text{ m/s}$  و سرعت فلاتر جسم آزاد  $172.4 \text{ m/s}$  است. شکل (۷) تغییرات دامنه های نوسانات سیکل حد با سرعت را نشان می دهد با توجه به این شکل مانند مورد قبلی در این شرایط افزایش دامنه های نوسان سیکل حد با افزایش سرعت جریان همراه است. اما نکته قابل توجه در دامنه نوسانات سیکل حد پیش از فلاتر بال جلب نظر می کند و آن افت شدید این دامنه در نقطه فلاتر جسم آزاد است. برای توضیح این پدیده شکل (۸) با شرایط مشابه با نتایج نشان داده شده در شکل (۷) ولی با حذف برهم کنش معادلات آیروالاستیسیتیه و دینامیک پرواز، که معادل شرایط بال یکسرگردار و دینامیک پرواز به تنهایی است، رسم شده است.



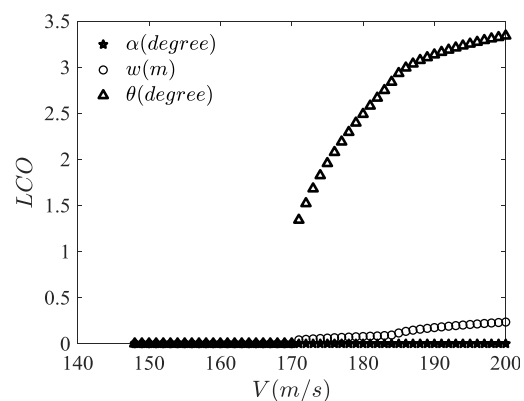
شکل ۷. نمودار دامنه نوسانات سیکل حد برحسب

$$\frac{EI}{EI_{Goland}} = 0.155$$

مقایسه این دو شکل اثر قابل توجه فلاتر جسم آزاد را در دامنه سیکل حد پیش از فلاتر بال نشان می دهد این اتفاق را می توان بدین صورت توجیه



کرد که فلاتر جسم آزاد مود خمشی بال که یکی از مودهای درگیر در فلاتر بال است را درگیر می-کند و به این شکل فلاتر بال را تحت تأثیر قرار می‌دهد و به دنبال آن دامنه سیکل حد پیش می‌گیرد. با مشاهده شکل (۵) نیز می‌توان دریافت که میزان میرایی در حالت وجود برهمکنش بعد از فلاتر جسم آزاد برای پیش‌بال نسبت به شرایط نبود برهمکنش کاهش می‌یابد.



شکل ۸- دامنه نوسانات سیکل حد برحسب سرعت برای  $\alpha$ ،  $w$  و  $\theta$  به ازای  $\frac{EI}{EI_{Goland}} = 0.155$  با فرض جفت نشدن معادلات آیروالاستیسیته و دینامیک پرواز

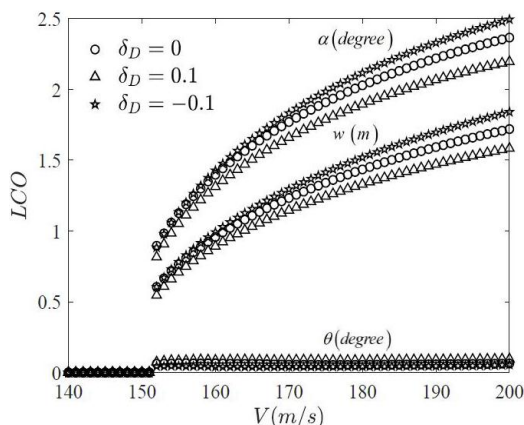
### ۳-۳. تحلیل حساسیت

تحلیل حساسیت پدیده‌ها نسبت به پارامترهایی که در آن پدیده نقش دارند می‌تواند دیدگاه طراحی مناسبی را در اختیار طراحان قرار دهد. در این بخش به تحلیل حساسیت رفتار سیستم بعد از وقوع پدیده فلاتر جسم آزاد پرداخته می‌شود. برای این کار پارامترهایی از قبیل فاصله مرکز آیرودینامیکی بال و دم،  $D$ ، صلیبیت خمشی بال،  $EI$ ، و جرم واحد طول بال،  $m_w$  که مؤثرترین پارامترها در پدیده فلاتر جسم آزاد هستند انتخاب می‌شوند [۹].  $D$  به صورت

مستقیم بر دینامیک پرواز هواپیما اثر می‌گذارد.  $EI$  در فرکانس خمشی بال که یکی از مودهای جفت شونده در این پدیده است مؤثر است و  $m_w$  از طرفی بر مود خمشی بال اثرگذار است و از طرفی روی ممان اینرسی کل هواپیما که پارامتری اساسی در مود تناوب کوتاه هواپیما است، مؤثر است. برای تحلیل حساسیت سه پارامتر موردبررسی به اندازه ۱۰٪ حول مقادیر اسمی خود به ترتیب زیر تغییر می‌کنند:

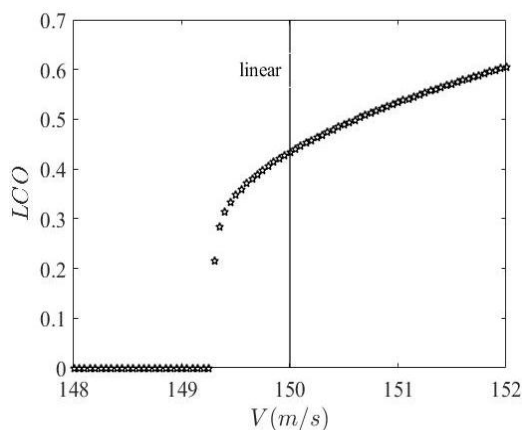
$$\begin{aligned} EI &= \delta_S EI_{\text{nominal}} \\ D &= \delta_D D_{\text{nominal}} \\ m_w &= \delta_m m_w_{\text{nominal}} \end{aligned} \quad (13)$$

شکل‌های ۹، ۱۰ و ۱۱ به ترتیب اثر پارامترهای  $D$ ،  $EI$  و  $m_w$  را در دامنه‌های سیکل حد  $\alpha$ ،  $w$  و  $\theta$  نشان می‌دهند. با دقت در این شکل‌ها می‌توان فهمید که  $EI$  بیشترین تأثیر را در سرعت فلاتر جسم آزاد دارد و  $D$  اثر ناچیزی بر شروع فلاتر جسم آزاد دارد اما با افزایش سرعت جریان اثر آن در دامنه سیکل حد افزایش می‌یابد، در صورتی که دو پارامتر دیگر با افزایش سرعت جریان اثر کمتری بر دامنه سیکل حد دارند.



شکل ۹. نمودار دامنه نوسانات سیکل حد برحسب سرعت برای  $\alpha$ ،  $w$  و  $\theta$  به ازای  $\delta D = 0$ ،  $\delta D = 0.1$  و  $\delta D = -0.1$

دید که به ازای خیز اولیه نوک بال  $1\text{ m}$  دامنه نوسان سیکل حد در سرعتی کمتر از سرعت فلاتر جسم آزاد خطی یعنی  $149.3\text{ m/s}$  مقدار پیدا می‌کند، در صورتی که فلاتر جسم آزاد در  $150\text{ m/s}$  رخ می‌دهد، این همان رفتار زیر بحرانی در سیستم‌های غیرخطی است. نکته جالب توجه دیگر در رفتار زیر بحرانی این است که با افزایش بیشتر جابه‌جایی اولیه از  $1\text{ m}$  شروع نوسانات سیکل در سرعت پایین‌تری رخ نمی‌دهد و بازهم نوسانات از سرعت  $149.3\text{ m/s}$  شروع می‌شود، در نتیجه این سرعت به‌عنوان یک سرعت زیر بحرانی معرفی می‌شود. باید یادآور شد که این رفتار متفاوت با رفتار زیر بحرانی در فلاتر بال است و تنها مربوط به پدیده فلاتر جسم آزاد است.

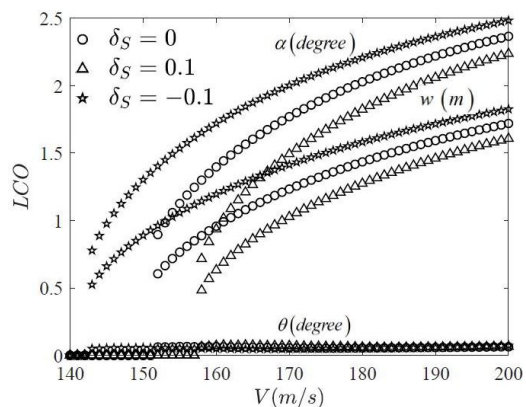


شکل ۱۲. نمودار دامنه نوسانات سیکل حد برحسب سرعت برای  $w$  به ازای  $w_0 = 1$  متر

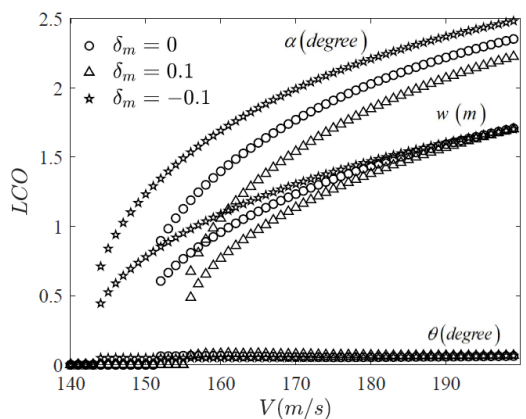
در شکل (۱۳) پاسخ زمانی برای سه خیز اولیه  $0.006\text{ m}$ ،  $0.06\text{ m}$  و  $0.6\text{ m}$  در سرعت  $149.5\text{ m/s}$  رسم شده است و می‌توان دید که در این سرعت فقط به ازای  $w_0 = 0.6\text{ m}$  نوسانات سیکل حد به وجود می‌آید.

#### ۴. نتیجه‌گیری

در کار حاضر پدیده فلاتر جسم آزاد در



شکل ۱۰. نمودار دامنه نوسانات سیکل حد برحسب سرعت برای  $\alpha$ ،  $w$  و  $\theta$  به ازای  $\delta_S = 0$ ،  $\delta_S = -0.1$  و  $\delta_S = 0.1$



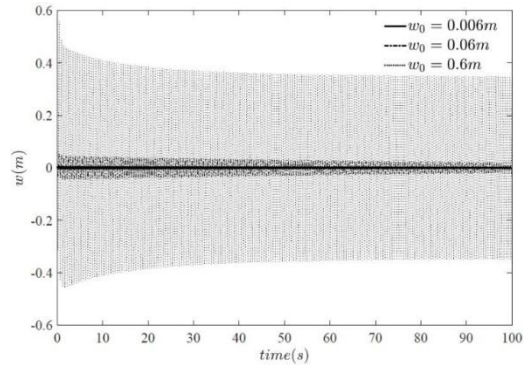
شکل ۱۱. نمودار دامنه نوسانات سیکل حد برحسب سرعت برای  $\alpha$ ،  $w$  و  $\theta$  به ازای  $\delta_m = 0$ ،  $\delta_m = -0.1$  و  $\delta_m = 0.1$

#### ۳-۴. رفتار زیر بحرانی در پدیده فلاتر جسم آزاد

در این بخش به بررسی رفتار زیر بحرانی در پدیده فلاتر جسم آزاد غیرخطی پرداخته می‌شود. ترم‌های غیرخطی در برخی از شرایط می‌توانند موجب شوند که سیستم در محدوده پایین‌تر از سرعت ناپایداری خطی نیز دچار نوسان سیکل حد شود که به این نوع رفتار، رفتار زیر بحرانی گفته می‌شود. در بررسی‌های انجام‌شده در کار حاضر، در پدیده فلاتر جسم آزاد این موضوع مشاهده شده است. با توجه به شکل (۱۲) می‌توان



هواپیمای کامل با بال منعطف و دارای نسبت منظری بالا و رفتارهای غیرخطی بعد از وقوع فلاتر جسم آزاد بررسی شد.



شکل ۱۳. پاسخ زمانی  $w$  به ازای شرایط اولیه  $w_0 = 0.006$  متر،  $w_0 = 0.06$  متر،  $w_0 = 0.6$  متر

ابتدا نتایج فلاتر جسم آزاد خطی برای مدل هواپیما و سپس پاسخ زمانی غیرخطی سیستم آیرولاستیک مورد اعتبارسنجی قرار گرفت. در ادامه دو مورد مطالعاتی برای بررسی رفتار دینامیکی هواپیما در فرا ناپایداری در نظر گرفته شد و اثرات جفت‌شدگی بین دینامیک پرواز و آیرولاستیسیت بال و چگونگی رفتار مودهای جفت شونده در فلاتر جسم آزاد ارزیابی شد. در ادامه به تحلیل حساسیت دامنه نوسان سیکل حد و همچنین وقوع پدیده فلاتر جسم آزاد نسبت به پارامترهای مؤثر در این پدیده پرداخته شد. این نتیجه حاصل شد که پارامتر  $D$  در مقایسه با دو پارامتر  $m_w$  و  $EI$  در شروع فلاتر جسم آزاد خطی تأثیر چندانی ندارد و به مرور با افزایش سرعت تأثیر خود را در دامنه سیکل حد نشان می‌دهد در صورتی که دو پارامتر  $EI$  و  $m_w$  در شروع فلاتر جسم آزاد اثر قابل توجهی دارند ولی در ادامه و با افزایش سرعت اثر آن‌ها بر دامنه سیکل حد کمتر می‌شود. در پایان رفتار زیربحرانی پدیده فلاتر جسم آزاد مورد مطالعه قرار گرفت و نشان داده

شد که در فلاتر جسم آزاد غیرخطی در سرعت‌های زیر ناپایداری خطی نیز نوسانات سیکل حد مشاهده می‌شود و همچنین یک سرعت بحرانی وجود دارد که با افزایش هر چه بیشتر مقدار شرایط اولیه در زیر این سرعت هیچ نوسانات سیکل حدی مشاهده نمی‌شود.

## ۵. مراجع

- [1] Niblett, LL T. "The fundamentals of body-freedom flutter." The Aeronautical Journal 90, no. 899 (1986): 373-377.
- [2] Shi, Pengtao, Jihai Liu, Yingsong Gu, Zhichun Yang, and Pier Marzocca. "Full-Span Flying Wing Wind Tunnel Test: A Body Freedom Flutter Study." Fluids 5, no. 1 (2020): 34.
- [3] Richards, Phillip W., Yuan Yao, Robert A. Herd, Dewey H. Hodges, and Pezhman Mardanpour. "Effect of inertial and constitutive properties on body-freedom flutter for flying wings." Journal of Aircraft 53, no. 3 (2016): 756-767.
- [4] Mardanpour, Pezhman, Dewey H. Hodges, Ryan Neuhart, and Nathan Graybeal. "Engine placement effect on nonlinear trim and stability of flying wing aircraft." Journal of Aircraft 50, no. 6 (2013): 1716-1725.
- [5] Mardanpour, Pezhman, Phillip W. Richards, Omid Nabipour, and Dewey H. Hodges. "Effect of multiple engine placement on aeroelastic trim and stability of flying wing aircraft." Journal of Fluids and Structures 44 (2014): 67-86.
- [6] Love, Michael, P. Zink, Paul Wieselmann, and Harold Youngren. "Body freedom flutter of high aspect ratio flying wings." In 46<sup>th</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, p. 1947. 2005.
- [7] Li, Yuan Dong, Xin Ping Zhang, Ying Song Gu, and Zhi Chun Yang. "Body

- inextensional beams. II. Forced motions." *Journal of Structural Mechanics* 6, no. 4 (1978): 449-461.
- [17] Shams, Sh, MH Sadr Lahidjani, and H. Haddadpour. "Nonlinear aeroelastic response of slender wings based on Wagner function freedom flutter study and passive flutter suppression for a high aspect ratio flying wing model." In *Applied Mechanics and Materials*, vol. 608, pp. 708-712. Trans Tech Publications Ltd, 2014.
- [8] Huang Chao, Y. A. N. G. Chao, W. U. Zhigang, and T. A. N. G. Changhong. "Variations of flutter mechanism of a span-morphing wing involving rigid-body motions." *Chinese Journal of Aeronautics* 31, no.3 (2018): 490-497.
- [9] Iannelli, Andrea, Andr\_es Marcos, and Mark Lowenberg. "Study of flexible aircraft body freedom flutter with robustness tools." *Journal of Guidance,Control, and Dynamics* 41.5 (2018): 1083-1094.
- [10] Nejati, Mahdi, Saeed Shokrollahi, Sh Shams, and Ramin Torkaman. "A modi\_ed indicial functions approximation for nonlinear aeroelastic analysis." *Scientia Iranica* 27, no. 3 (2020): 1230-1254. [11] M. J. Patil, D. H. Hodges, C. E. S. Cesnik, Limit-Cycle Oscillations in High Aspect Ratio Wings, *J. Fluids and Structures*, Vol. 15 (2001), 107-132.
- [12] Kim, Kiun. Nonlinear aeroelastic analysis of aircraft wing-with-store configurations. Texas AM University, 2004.
- [13] Badiei, D., M. H. Sadr, and Sh Shams. "Static stall model in aeroelastic analysis of a exible wing with geometrical nonlinearity." *Journal of Aerospace Engineering* 27.2 (2014): 378-389.
- [14] Schmidt, David. *Modern ight dynamics*. McGraw-Hill Higher Education, 2011.
- [15] Crespo da Silva, M. R. M., and C. C. Glynn. "Nonlinear exural-exuraltorsional dynamics of inextensional beams. I. Equations of motion." *Journal of Structural Mechanics* 6, no. 4 (1978): 437-448.
- [16] Crespo da Silva, M. R. M., and C. C. Glynn. "Nonlinear exural-exuraltorsional dynamics of

