

تعیین ضرایب شدت تنش در صفحات تابعی ارتوتروپیک با روش بدون المان گلرکین

محمود شریعتی^۱، محمدباقر نظری^۲، مسعود مهدی زاده رخی^۳

۱ استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

۲ استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

۳ استادیار، گروه مهندسی رباتیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، mmrokhi@shahroodut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۱۰/۱۴

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۷/۰۴

چکیده

روش‌های تولید مواد تابعی سبب می‌شود رفتار این مواد غیر ایزوتروپ باشد. در این مقاله از روش بدون المان گلرکین برای مطالعه شکست مواد تابعی ارتوتروپیک استفاده شده است. در این روش محاسبه عددی مشتق میدان‌های اصلی و کمکی کرنش به‌سادگی انجام می‌شود، حال آنکه روش المان محدود و فرم توسعه‌یافته آن با مشکلاتی همراه است. به‌علاوه در این مقاله یک انتگرال پایستار جدید برای محاسبه پارامترهای شکست در مواد غیرهمگن ارائه شده است که فرم یکسانی برای بارگذاری مکانیکی و حرارتی دارد. این شکل جدید از انتگرال برهم‌کنش دارای ترم‌هایی با تعبیر فیزیکی مشخص بوده و برای برهم‌کنش میدان‌های خطی بر میدان الاستیک دارای ترم‌های ثابت است و به‌طور سیستماتیک قابل تعمیم می‌باشد. در این مقاله، ضرایب شدت تنش در مواد تابعی ارتوتروپیک با به‌کارگیری این انتگرال برهم‌کنش محاسبه شده است. برای گسسته‌سازی معادلات حاکم از روش بدون المان گلرکین استفاده شده است. در چند مثال اثر تغییر خصوصیات مواد بر ضرایب شدت تنش بررسی شده است. مقایسه نتایج با مقادیر گزارش شده در مقالات موجود بیانگر دقت قابل قبول رابطه ارائه شده است.

واژگان کلیدی

انتگرال پایستار، ترک، ضریب شدت تنش، مواد مرکب تابعی ارتوتروپیک، روش بدون المان گلرکین

۱. مقدمه

ساختار میکروسکوپی در این مواد سبب می‌شود خصوصیات ماکروسکوپی با تغییرات پیوسته داشته باشند. کاهش تنش‌های پسماند و افزایش مقاومت اتصال از جمله خصوصیات قابل توجه مواد تابعی است. همچنین کاربرد مناسب این مواد منجر به کاهش ضریب تمرکز تنش و ضریب شدت تنش در بارگذاری‌های مکانیکی

تحولات اخیر در فرایندهای ساخت سبب گسترش کاربرد مواد مرکب تابعی در تولید قطعات صنعتی شده است. مواد تابعی ایزوتروپیک موادی هستند که خواص آنها با استفاده از یک تابع ریاضی در امتداد یک یا چند بعد هندسی ماده تغییر می‌کند و در هر نقطه از ماده خواص مستقل از جهت می‌باشند. تغییر تدریجی

و حرارتی می‌شود. طبیعت روش‌های تولید مواد تابعی سبب می‌شود خصوصیات قطعات ساخته‌شده غیر ایزوتروپیک باشد. مثلاً قطعاتی که با روش اسپری پلاسما تولید می‌شوند؛ ساختار لایه‌ای دارند که سفتی در جهت لایه‌ها بیشتر از جهت عمود بر آنهاست. از طرفی، موادی که طی فرایند رسوب بخار ساخته می‌شوند، ساختار ستونی دارند که منجر به استحکام بیشتر در جهت ضخامت می‌گردد. در نظر گرفتن خصوصیات ارتوتروپیک برای این مواد می‌تواند تقریب خوبی از غیر ایزوتروپی به‌وجود آمده در روش‌های تولید مذکور باشد. چون مواد تابعی به‌صورت پوشش‌هایی با ضخامت کم در نظر گرفته می‌شوند، استحکام آنها به تغییرات ساختاری حساس است. از اینرو مطالعه ترک در این سازه‌ها از موضوعات قابل توجه می‌باشد.

گو و آسارو [۱] خمش چهارنقطه‌ای یک نمونه از جنس مواد تابعی ارتوتروپیک را به‌صورت تحلیلی بررسی نمودند. از ترک و اردگن با استفاده از معادلات انتگرالی، ضریب شدت تنش برای ترک‌های مود I [۲] و مود مختلط [۳] در محیط نامحدود از مواد تابعی ارتوتروپیک را به‌دست آوردند. راثو و رحمان [۴] و کیم و پائولینو [۵] با کاربرد انتگرال برهم‌کنش در روش المان محدود، ضرایب شدت تنش در یک محیط محدود دوبعدی از مواد تابعی ارتوتروپیک را محاسبه نمودند. کیم و پائولینو با کاربرد روش انتگرال J_k [۶] و روش بسته‌شدن ترک [۷] ضرایب شدت تنش در این مواد را تعیین کردند.

کاربرد روش انتگرال J_k مستلزم انتگرالگیری عددی از انرژی کرنشی روی سطوح ترک است که مشکلاتی به‌همراه دارد. از طرفی، فرم متداول روش بسته‌شدن ترک برای المان‌های تکین نوک ترک ارائه شده است که کاربرد آن را به روش المان محدود منحصر می‌کند. علاوه بر این، ضرایب شدت تنش در این روش‌ها کوپل هستند؛ به‌طوری‌که محاسبه آنها به کاربرد روش‌های عددی حل معادلات غیرخطی نیاز دارد. چن با کاربرد انتگرال برهم‌کنش و روش بدون المان گلرکین ضریب شدت تنش برای یک ترک فصل مشترک بین پوشش مواد تابعی ارتوتروپیک و هسته همگن را محاسبه نمود [۸]. دگ نیز ضریب شدت تنش مود I در مواد تابعی ارتوتروپیک تحت بار حرارتی گذرا را با کاربرد انتگرال J محاسبه و اثر تغییر خصوصیات ماده روی ضریب شدت تنش را بررسی نمود [۹]. دگ و همکاران [۱۰] با استفاده از روش المان محدود و بهره‌گیری از انتگرال J ترک‌های مایل در مواد تابعی

ارتوتروپیک را مورد تحلیل و بررسی قرار دادند. علاوه بر این، روش المان محدود توسعه‌یافته نیز به‌طور گسترده برای تحلیل مسائل شکست ترموالاستیک مواد تابعی مورد استفاده قرار گرفته است [۱۱-۱۲].

روش آیزوژئومتریک توسعه‌یافته نیز توسط بایسته و همکاران [۱۳] و باردویچ و همکاران [۱۴] برای تحلیل مسائل شکست مواد تابعی در معرض بارگذاری حرارتی و مکانیکی استفاده شده است. روش بدون المان گلرکین روشی مناسب برای تحلیل مسائل مکانیک شکست است. این روش برای تحلیل مسائل ایزوتروپیک تحت بار مکانیکی [۱۵] و تنش‌های حرارتی [۱۶-۱۷] مورد استفاده قرار گرفته است. روش بدون المان گلرکین نسبت به روش‌های دیگر نرخ همگرایی بالا و سازگاری بالاتری دارد و می‌تواند اعوجاج‌های بزرگ ماده را به‌راحتی مدل کند [۱۸]. کوهکن و همکاران [۱۹] از روش بدون المان پتروف - گلرکین برای تحلیل مسائل شکست در مواد تابعی ایزوتروپیک استفاده کردند. گانگ و پنت [۲۰] نیز با استفاده از روش بدون المان گلرکین بهبود یافته برای شبیه‌سازی شکست ترموالاستیک در مواد تابعی ایزوتروپیک استفاده کردند. آنها برای محاسبه ضرایب شدت تنش از روش انتگرال برهم‌کنش استفاده نمودند.

در این مقاله، روش بدون المان گلرکین برای بررسی شکست مواد تابعی ارتوتروپیک به‌کار گرفته شده است. در روش بدون المان گلرکین محاسبه عددی مشتق میدان‌های اصلی و کمکی کرنش به‌راحتی انجام می‌شود که در روش المان محدود و فرم توسعه‌یافته آن با مشکلاتی همراه است. علاوه بر این، فرم جدیدی از انتگرال برهم‌کنش استخراج شده است که عبارت‌های آن دارای تعبیر فیزیکی واضح است و برای برهم‌کنش میدان‌های خطی بر میدان الاستیک دارای ترم‌های ثابت است و به‌طور سیستماتیک قابل تعمیم می‌باشد. بخش‌های مختلف مقاله به‌صورت زیر است:

در بخش ۲ معادلات حاکم بر ترک در مواد تابعی ارتوتروپیک آمده است. در بخش ۳ درباره فرمول‌بندی انتگرال برهم‌کنش، عبارت‌های مختلف آن و میدان کمکی بحث شده است. بخش ۴ شامل توضیحاتی در مورد روش بدون المان گلرکین و مدلسازی ترک در این روش است. بخش ۵ شامل نتایج عددی، تحلیل نتایج و جنبه‌های قابل ذکر آنها می‌شود. در بخش ۶ نیز نتیجه‌گیری ارائه شده است.

۲. مکانیک شکست مواد مرکب تابعی ارتوتروپیک

در یک ماده ارتوتروپیک رابطه تنش - کرنش الاستیک خطی به‌صورت زیر است [۲۱]:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl}, (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (۱)$$

که در آن، ε_{ij} تانسور کرنش و S_{ijkl} تانسور نرمی است. معمولاً برای بیان ساده تانسور نرمی از نمایش فشرده آن به فرم زیر استفاده می‌شود.

$$\varepsilon_i = a_{ij}\sigma_j, a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (۲)$$

در این رابطه، ضرایب نرمی a_{ij} به خصوصیات الاستیک ماده بستگی دارد. همچنین داریم:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11}, \varepsilon_2 = \varepsilon_{22}, \varepsilon_3 = \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_4 &= 2\varepsilon_{23}, \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13}, \varepsilon_6 = \varepsilon_{12} \\ \sigma_1 &= \sigma_{11}, \sigma_2 = \sigma_{22}, \sigma_3 = \sigma_{33} \\ \sigma_4 &= 2\sigma_{23}, \sigma_5 = 2\sigma_{13}, \sigma_6 = \sigma_{12} \end{aligned} \quad (۳)$$

در حالت خاصی از مسائل صفحه‌ای که یک صفحه تقارن موازی با صفحه میانی در تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای است؛ a_{ij} در رابطه ۲ به شش ثابت الاستیک کاهش می‌یابد که برای حالت تنش صفحه‌ای به‌صورت a_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) و برای حالت کرنش صفحه‌ای به‌صورت ۴ بیان می‌شود [۲۱].

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}} \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (۴)$$

رابطه تنش - کرنش را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\varepsilon_i = b_{ij}\sigma_j \quad (۵)$$

در شکل ۱ یک محیط دوبعدی از مواد تابعی ارتوتروپیک نشان داده شده است که حاوی ترکی می‌باشد. مسائل الاستیسیته دوبعدی غیرهمگن برحسب تابع تحلیلی $\Phi_k(z_k)$ بیان می‌شود که در آن $z_k = x_k + iy_k$ متغیرهای مختلط است. در این رابطه $x_k = x + \alpha_k y$ و $y_k = \beta_k y$. پارامترهای α_k و β_k بخش‌های حقیقی و موهومی $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k$ هستند که ریشه‌های معادله مشخصه زیر با بخش موهومی مثبت می‌باشند [۲۱].

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \quad (۶)$$

ثابت‌های معادله مشخصه در نوک ترک محاسبه می‌شوند. برای مود مختلط، میدان تنش در حوزه نوک ترک به‌صورت ۷ است [۲۲].

$$\sigma_{11} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} [K_I f_{11}^I(\mu_1^{\text{tip}}, \mu_2^{\text{tip}}, \theta) + K_{II} f_{11}^{II}(\mu_1^{\text{tip}}, \mu_2^{\text{tip}}, \theta)]$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} [K_I f_{22}^I(\mu_1^{\text{tip}}, \mu_2^{\text{tip}}, \theta) + K_{II} f_{22}^{II}(\mu_1^{\text{tip}}, \mu_2^{\text{tip}}, \theta)] \quad (۷)$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} [K_I f_{12}^I(\mu_1^{\text{tip}}, \mu_2^{\text{tip}}, \theta) + K_{II} f_{12}^{II}(\mu_1^{\text{tip}}, \mu_2^{\text{tip}}, \theta)]$$

در معادلات فوق، $f_{ij}(\mu_1^{\text{tip}}, \mu_2^{\text{tip}}, \theta)$ توابع زاویه‌ای استاندارد برای ترک در محیط الاستیک ارتوتروپیک همگن هستند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۲].

$$f_{11}^I(\mu_1^{\text{tip}}, \mu_2^{\text{tip}}, \theta) = \text{Re} \left[\frac{\mu_1^{\text{tip}} \mu_2^{\text{tip}}}{\mu_1^{\text{tip}} - \mu_2^{\text{tip}}} \left(\frac{\mu_2^{\text{tip}}}{\sqrt{\cos\theta + \mu_2^{\text{tip}} \sin\theta}} - \frac{\mu_1^{\text{tip}}}{\sqrt{\cos\theta + \mu_1^{\text{tip}} \sin\theta}} \right) \right] \quad (۸)$$

$$f_{11}^{II}(\mu_1^{\text{tip}}, \mu_2^{\text{tip}}, \theta) = \text{Re} \left[\frac{1}{\mu_1^{\text{tip}} - \mu_2^{\text{tip}}} \left(\frac{\mu_2^{\text{tip}^2}}{\sqrt{\cos\theta + \mu_2^{\text{tip}} \sin\theta}} - \frac{\mu_1^{\text{tip}^2}}{\sqrt{\cos\theta + \mu_1^{\text{tip}} \sin\theta}} \right) \right] \quad (۹)$$

$$f_{22}^I(\mu_1^{\text{tip}}, \mu_2^{\text{tip}}, \theta) = \text{Re} \left[\frac{\mu_1^{\text{tip}} \mu_2^{\text{tip}}}{\mu_1^{\text{tip}} - \mu_2^{\text{tip}}} \left(\frac{\mu_1^{\text{tip}}}{\sqrt{\cos\theta + \mu_1^{\text{tip}} \sin\theta}} - \frac{\mu_2^{\text{tip}}}{\sqrt{\cos\theta + \mu_2^{\text{tip}} \sin\theta}} \right) \right] \quad (۱۰)$$

$$f_{22}^{II}(\mu_1^{\text{tip}}, \mu_2^{\text{tip}}, \theta) = \text{Re} \left[\frac{1}{\mu_1^{\text{tip}} - \mu_2^{\text{tip}}} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos\theta + \mu_1^{\text{tip}} \sin\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos\theta + \mu_2^{\text{tip}} \sin\theta}} \right) \right] \quad (۱۱)$$

$$f_{12}^I(\mu_1^{\text{tip}}, \mu_2^{\text{tip}}, \theta) = \text{Re} \left[\frac{\mu_1^{\text{tip}} \mu_2^{\text{tip}}}{\mu_1^{\text{tip}} - \mu_2^{\text{tip}}} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos\theta + \mu_2^{\text{tip}} \sin\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos\theta + \mu_1^{\text{tip}} \sin\theta}} \right) \right] \quad (۱۲)$$

$$f_{12}^{II}(\mu_1^{\text{tip}}, \mu_2^{\text{tip}}, \theta) = \text{Re} \left[\frac{1}{\mu_1^{\text{tip}} - \mu_2^{\text{tip}}} \left(\frac{\mu_1^{\text{tip}}}{\sqrt{\cos\theta + \mu_1^{\text{tip}} \sin\theta}} - \frac{\mu_2^{\text{tip}}}{\sqrt{\cos\theta + \mu_2^{\text{tip}} \sin\theta}} \right) \right] \quad (۱۳)$$

پایستار الاستیسیته پدید می‌آید. در این بخش روند به‌دست آوردن انتگرال مذکور برای مواد تابعی ارتوتروپیک بررسی می‌شود. انتگرال J روشی برای محاسبه نرخ رها سازی انرژی کرنشی بر واحد مساحت سطوح ترک خورده در ماده است. فرم معمول انتگرال J برای یک ترک با بخش انتهایی مستقیم و بدون اعمال نیرو به سطوح آن به‌صورت زیر است [۵].

$$J = \lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} (W\delta_{ij} - \sigma_{ij}u_{i,1})n_j d\Gamma_s \quad (20)$$

در این رابطه، n بردار یکه و عمود رو به‌خارج منحنی و چگالی انرژی کرنشی مکانیکی به‌صورت زیر است:

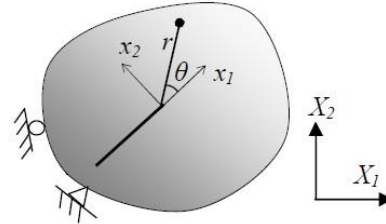
$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (21)$$

به‌دلیل محاسبه آسان‌تر و دقیق‌تر انتگرال‌های سطح به‌صورت عددی مناسب است انتگرال خطی ۲۰ به‌صورت یک انتگرال ناحیه‌ای معادل بیان شود. تنش و جابه‌جایی‌ها برای این عبارت انتگرالی، در اطراف ترک از روش بدون المان گلرکین محاسبه می‌شوند. برای تبدیل فرم کانتوری انتگرال J به یک فرم ناحیه‌ای معادل انتگرال کانتوری زیر تعریف می‌شود [۵].

$$I = \oint_{\Gamma} (W\delta_{ij} - \sigma_{ij}u_{i,1})m_j q d\Gamma \quad (22)$$

که در آن، $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma^+ + \Gamma^- - \Gamma_s$ و m_i بردار یکه و عمود رو به خارج کانتور Γ می‌باشد (یعنی $m_i = n_j$ روی Γ_0 و $m_i = -n_j$ روی Γ_s) (شکل ۲ را ببینید). در این رابطه، q تابع وزنی دلخواه و همواری است که از $q=1$ روی Γ_s تا $q=0$ روی Γ_0 تغییر می‌کند. با حدگیری $\Gamma_s \rightarrow 0$ داریم.

$$\begin{aligned} \lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} I &= \lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} \oint_{\Gamma} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij}u_{i,1})m_j q d\Gamma \\ &= \lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} \oint_{\Gamma_0 + \Gamma^+ + \Gamma^- - \Gamma_s} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij}u_{i,1})m_j q d\Gamma \\ &= \lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} \oint_{\Gamma_0 + \Gamma^+ + \Gamma^-} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij}u_{i,1})m_j q d\Gamma \\ &\quad + \oint_{-\Gamma_s} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij}u_{i,1})m_j q d\Gamma \\ &= \lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} \oint_{\Gamma_0 + \Gamma^+ + \Gamma^-} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij}u_{i,1})m_j q d\Gamma \\ &\quad - \oint_{\Gamma_s} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij}u_{i,1})n_j q d\Gamma \end{aligned} \quad (23)$$



شکل ۱. محیط دوبعدی ماده تابعی حاوی ترک و دستگاه‌های مختصات

میدان جابه‌جایی در حوزه نوک ترک بدین‌صورت است [۲۲].

$$u_1 = \sqrt{\frac{2r}{\pi}} [K_I g_1^I(\mu_1^{\text{tip}}, \mu_2^{\text{tip}}, \theta) + K_{II} g_1^{II}(\mu_1^{\text{tip}}, \mu_2^{\text{tip}}, \theta)] \quad (14)$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{2r}{\pi}} [K_I g_2^I(\mu_1^{\text{tip}}, \mu_2^{\text{tip}}, \theta) + K_{II} g_2^{II}(\mu_1^{\text{tip}}, \mu_2^{\text{tip}}, \theta)] \quad (15)$$

در عبارت‌های فوق، $g_i(\mu_1^{\text{tip}}, \mu_2^{\text{tip}}, \theta)$ توابع زاویه‌ای استاندارد برای ترک در محیط الاستیک ارتوتروپیک همگن به‌صورت زیر هستند [۲۲].

$$g_1^I(\mu_1^{\text{tip}}, \mu_2^{\text{tip}}, \theta) = \text{Re} \left[\frac{1}{\mu_1^{\text{tip}} - \mu_2^{\text{tip}}} (\mu_1^{\text{tip}} p_2 \sqrt{\cos\theta + \mu_2^{\text{tip}} \sin\theta} - \mu_1^{\text{tip}} p_1 \sqrt{\cos\theta + \mu_1^{\text{tip}} \sin\theta}) \right] \quad (16)$$

$$g_1^{II}(\mu_1^{\text{tip}}, \mu_2^{\text{tip}}, \theta) = \text{Re} \left[\frac{1}{\mu_1^{\text{tip}} - \mu_2^{\text{tip}}} (p_2 \sqrt{\cos\theta + \mu_2^{\text{tip}} \sin\theta} - p_1 \sqrt{\cos\theta + \mu_1^{\text{tip}} \sin\theta}) \right] \quad (17)$$

$$g_2^I(\mu_1^{\text{tip}}, \mu_2^{\text{tip}}, \theta) = \text{Re} \left[\frac{1}{\mu_1^{\text{tip}} - \mu_2^{\text{tip}}} (\mu_1^{\text{tip}} q_2 \sqrt{\cos\theta + \mu_2^{\text{tip}} \sin\theta} - \mu_1^{\text{tip}} q_1 \sqrt{\cos\theta + \mu_1^{\text{tip}} \sin\theta}) \right] \quad (18)$$

$$g_2^{II}(\mu_1^{\text{tip}}, \mu_2^{\text{tip}}, \theta) = \text{Re} \left[\frac{1}{\mu_1^{\text{tip}} - \mu_2^{\text{tip}}} (q_2 \sqrt{\cos\theta + \mu_2^{\text{tip}} \sin\theta} - q_1 \sqrt{\cos\theta + \mu_1^{\text{tip}} \sin\theta}) \right] \quad (19)$$

با اینکه گرادیان خصوصیات ماده روی مرتبه تکینی میدان تنش در حوزه نوک ترک اثر نمی‌گذارد، مقدار ضریب شدت تنش از آن اثر می‌پذیرد. از اینرو در مواد تابعی پارامترهای شکست علاوه بر بارگذاری خارجی و هندسه تابع گرادیان خصوصیات ماده نیز می‌باشد.

۳. فرمول‌بندی انتگرال برهم‌کنش

انتگرال برهم‌کنش در واقع برهم‌کنش دو حالت بارگذاری مستقل و قابل‌قبول برای سازه حاوی ترک است که در انتگرال‌های

$$\begin{aligned}
 & + \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} \\
 & \quad - W^{int} \delta_{1j})_j q dA \\
 & = M_1 + M_2
 \end{aligned}$$

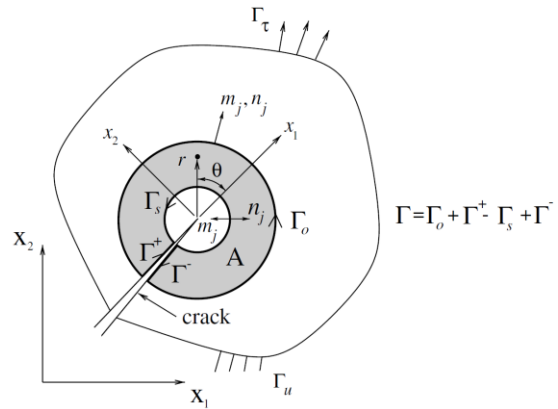
بسته به انتخاب میدان‌های کمکی، فرم عمومی انتگرال برهم‌کنش را می‌توان به صورت عبارات ساده‌تر بیان نمود.

۳-۱. میدان کمکی

برای کاربرد انتگرال برهم‌کنش باید میدان‌های کمکی جابه‌جایی u_{aux} ، کرنش ϵ_{aux} و تنش σ_{aux} در نظر گرفته شوند. در تحلیل مکانیک شکست ماده تابعی، معمولاً از میدان‌های کمکی مواد همگن استفاده می‌شود. اگر میدان‌های حوزه نوک ترک در مواد ارتوتروپیک همگن با تانسور ساختاری ثابت به‌عنوان میدان کمکی انتخاب شود، رابطه تعادل ($\sigma_{ij,j}^{aux} = 0$) با فرض عدم وجود نیروی کالبدی) و شرایط سازگاری ($\epsilon_{ij}^{aux} = \frac{1}{2}(u_{i,j}^{aux} + u_{j,i}^{aux})$) ارضا می‌شود. اما رابطه ساختاری پیوستار ماده تابعی نقض می‌شود؛ یعنی $\sigma_{ij}^{aux} \neq C_{ijkl}(x) \epsilon_{ij}^{aux}$. چون در حالت کلی برای پیوستار ماده تابعی رابطه $(C_{ijkl})_{ip} \neq C_{ijkl}(x)$ برقرار است. با توجه به این توضیح، رابطه $\sigma_{ij} \epsilon_{ij}^{aux} \neq \sigma_{ij}^{aux} \epsilon_{ij}$ برقرار می‌شود. بنابراین رابطه انتگرال برهم‌کنش با در نظر گرفتن میدان کمکی همگن (فرمول‌بندی تانسور ساختاری ثابت) بدین صورت به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
 M & = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} \\
 & \quad - W^{int} \delta_{1j})_j q dA \\
 & - \int_A (W_{,1}^{int})_{expl} q dA + \\
 & \int_A \frac{1}{2} \{ (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{tip}) \epsilon_{ij,1}^{aux} \\
 & \quad - (\sigma_{ij}^{aux}(x) \\
 & \quad - \sigma_{ij}^{aux}) \epsilon_{ij,1} \} q dA
 \end{aligned} \tag{۲۹}$$

رابطه فوق با اعمال رابطه تعادل و رابطه ساختاری میدان‌های اصلی و کمکی به‌دست آمده است. البته انتگرال برهم‌کنش فوق شامل گرادیان میدان کرنش اصلی است که به‌خاطر استفاده از میدان کمکی همگن برای پیوستار تابعی به‌وجود می‌آید و سبب کاهش دقت محاسبه انتگرال برهم‌کنش و نهایتاً پارامتر شکست می‌شود. انتگرال فوق شامل سه عبارت مجزاست. انتگرال اول معادل انتگرال برهم‌کنش برای مواد همگن است. عبارت دوم شامل مشتقات صریح W^{int} نسبت به مختصه مکانی است. این عبارت در فرم ناحیه‌ای انتگرال J برای ماده تابعی نیز به‌وجود می‌آید. عبارت سوم ناشی از کاربرد تانسور ساختاری ثابت در نوک



شکل ۲. ناحیه انتگرال‌گیری [۵]

با توجه به اینکه روی مرز Γ_0 ، $q=0$ است و با فرض بدون تنش بودن سطوح ترک، رابطه فوق به صورت زیر ساده می‌شود.

$$J = - \lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} I = - \lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} \oint_{\Gamma} (W \delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}) m_j q d\Gamma \tag{۲۴}$$

با کاربرد قضیه دیورژانس و با توجه تغییرات تابع وزنی q انتگرال ناحیه‌ای معادل به صورت زیر به‌دست می‌آید [۵].

$$\begin{aligned}
 J & = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1} - W \delta_{1j})_j q dA \\
 & + \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1} - W \delta_{1j})_j q dA
 \end{aligned} \tag{۲۵}$$

که در آن، A ناحیه محصور به منحنی است. برای یک سیستم خطی، انتگرال J برای اعمال همزمان بارگذاری‌های اصلی و کمکی به صورت زیر قابل بیان است [۵].

$$\begin{aligned}
 J^s & = \int_A [(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux})(u_{i,1} + u_{i,1}^{aux}) \\
 & \quad - 0.5(\sigma_{ik} + \sigma_{ik}^{aux})(\epsilon_{ik} + \epsilon_{ik}^{aux}) \delta_{1j}]_j q dA \\
 & + \int_A [(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux})(u_{i,1} + u_{i,1}^{aux}) \\
 & \quad - 0.5(\sigma_{ik} + \sigma_{ik}^{aux})(\epsilon_{ik} + \epsilon_{ik}^{aux}) \delta_{1j}]_j q dA
 \end{aligned} \tag{۲۶}$$

انتگرال فوق را می‌توان بدین صورت تجزیه نمود.

$$J^s = J + J^{aux} + M \tag{۲۷}$$

که در آن، انتگرال J^{aux} مربوط به میدان کمکی و انتگرال J مربوط به میدان اصلی است. انتگرال برهم‌کنش M نیز به صورت زیر به‌دست می‌آید [۵].

$$\begin{aligned}
 M & = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} \\
 & \quad - W^{int} \delta_{1j})_j q dA
 \end{aligned} \tag{۲۸}$$

حالی که رابطه ۳۲ برای بارگذاری حرارتی باید دوباره به دست آید [۸]. وجود عبارت انتگرال سوم در رابطه فوق، برای $r \rightarrow 0$ در ادامه ثابت می‌شود. برای میدان‌های کمکی ضریب شدت تنش، $u_i^{aux}(\sqrt{r}, \theta)$ و $\varepsilon_{ij}^{aux}(\sqrt{r}, \theta)$ ، ترم اول از عبارت دوم برای $r \rightarrow 0$ به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow 0} \int_A (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{tip}) \varepsilon_{ij,1}^{aux} q dA &= \\ \lim_{r \rightarrow 0} \int_r \int_\theta (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{tip}) \varepsilon_{ij,1}^{aux} q r dr d\theta &= \\ \lim_{r \rightarrow 0} \int_r \int_\theta (C_{ijkl}(x) & \\ - (C_{ijkl})_{tip}) \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij,1}^{aux} q r dr d\theta &= \quad (33) \\ \lim_{r \rightarrow 0} \int_r \int_\theta O(r) O(r^{-\frac{1}{2}}) O(r^{-\frac{3}{2}}) q r dr d\theta &= \\ \lim_{r \rightarrow 0} O(r) = 0 & \end{aligned}$$

۳-۲. استخراج ضرایب شدت تنش

رابطه بین انتگرال J و ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} به صورت زیر قابل بیان است.

$$J = c_{11} K_I^2 + c_{12} K_I K_{II} + c_{22} K_{II}^2 \quad (34)$$

$$c_{11} = -\frac{a_{22}^{tip}}{2} \text{Im} \left(\frac{\mu_1^{tip} + \mu_2^{tip}}{\mu_1^{tip} \mu_2^{tip}} \right), \quad (35)$$

$$\begin{aligned} c_{12} = -\frac{a_{22}^{tip}}{2} \text{Im} \left(\frac{1}{\mu_1^{tip} \mu_2^{tip}} \right) & \\ + \frac{a_{11}^{tip}}{2} \text{Im}(\mu_1^{tip} \mu_2^{tip}), & \quad (36) \end{aligned}$$

$$c_{22} = -\frac{a_{11}^{tip}}{2} \text{Im}(\mu_1^{tip} + \mu_2^{tip}) \quad (37)$$

با توجه به رابطه ۳۴ انتگرال بر هم کنش M بر حسب ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} به صورت زیر به دست می‌آید:

$$M = 2c_{11} K_I K_I^{aux} + c_{12} (K_I K_{II}^{aux} + K_{II} K_I^{aux}) + 2c_{22} K_{II} K_{II}^{aux} \quad (38)$$

با انتخاب صحیح میدان‌های کمکی (مودهای خالص I و II)، ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} با استفاده از انتگرال برهم کنش M به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$M^{(1)} = 2c_{11} K_I + c_{12} K_{II}, (K_I^{aux} = 1, K_{II}^{aux} = 0) \quad (39)$$

$$3M^{(2)} = c_{12} K_I + 2c_{22} K_{II}, (K_I^{aux} = 0, K_{II}^{aux} = 1) \quad (40)$$

۴. روش بدون المان گلرکین

برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی مسائل الاستیسیته دوبعدی روش بدون المان گلرکین بکار برده شده است [۲۳]. در این روش

ترک (مشابه مواد همگن) برای مواد غیرهمگن است. عبارت‌های دوم و سوم به طور طبیعی در فرمولبندی انتگرال برهم کنش ظاهر می‌شوند و برای حفظ استقلال از سطح و همگرایی انتگرال باید در نظر گرفته شوند. جملات عبارت انتگرال برهم کنش به صورت زیر قابل توضیح است. عبارت σ_{ij}^{tip} حاصل از کاربرد میدان کرنش اصلی و تانسور ساختاری همگن نوک ترک است؛ یعنی $\sigma_{ij}^{tip}(x) = (C_{ijkl})_{tip} \varepsilon_{kl}^{aux}$ عبارت $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{tip})$ بیان کننده اختلاف میدان تنش اصلی و میدان تنش همگن فوق می‌باشد. از طرف دیگر، $\sigma_{ij}^{aux}(x)$ حاصل از کاربرد میدان کرنش کمکی و تانسور ساختاری ماده تابعی است؛ یعنی $\sigma_{ij}^{aux}(x) = C_{ijkl}(x) \varepsilon_{kl}^{aux}$. عبارت $(\sigma_{ij}^{aux}(x) - \sigma_{ij}^{aux})$ بیان کننده اختلاف میدان تنش کمکی و میدان تنش کمکی ماده تابعی می‌باشد. بدیهی است عبارت‌های دوم و سوم برای مواد همگن صفر است. در رابطه ۲۹ $(W_{,1}^{int})_{expl}$ مشتق صریح W^{int} نسبت به x_1 است و به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W^{int}}{\partial x_1} \right)_{expl} &= \frac{\partial W^{int}}{\partial Q_{11}} \frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial W^{int}}{\partial Q_{12}} \frac{\partial Q_{12}}{\partial x_1} \\ &+ \frac{\partial W^{int}}{\partial Q_{22}} \frac{\partial Q_{22}}{\partial x_1} + \frac{\partial W^{int}}{\partial Q_{66}} \frac{\partial Q_{66}}{\partial x_1} \quad (30) \end{aligned}$$

تابع چگالی انرژی کرنشی مکانیکی به صورت زیر قابل بیان است.

$$\begin{aligned} W^{int} = \frac{1}{2} [& (Q_{11} + Q_{11}^{tip}) \varepsilon_{11} \varepsilon_{11}^{aux} \\ & + (Q_{22} + Q_{22}^{tip}) \varepsilon_{22} \varepsilon_{22}^{aux} \\ & + (Q_{12} + Q_{12}^{tip}) (\varepsilon_{11} \varepsilon_{22}^{aux} \\ & + \varepsilon_{22} \varepsilon_{11}^{aux}) \\ & + 2(Q_{66} + Q_{66}^{tip}) \varepsilon_{12} \varepsilon_{12}^{aux}] \quad (31) \end{aligned}$$

در این دو رابطه، ماتریس Q معکوس ماتریس a در رابطه ۲ است. با انتخاب میدان‌های کمکی همگن، انتگرال برهم کنش توسط راتو و رحمان به صورت زیر ارائه شده است [۴].

$$\begin{aligned} M = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} & \\ - W^{int} \delta_{1j}) q_{,j} dA & \quad (32) \\ + \frac{1}{2} \int_A \{ \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^{aux} - \sigma_{ij,1}^{aux} \varepsilon_{ij} + \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij,1} & \\ - \sigma_{ij,1} \varepsilon_{ij}^{aux} \} q dA & \end{aligned}$$

با توجه به رابطه ساختاری $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ برای میدان‌های اصلی و کمکی، رابطه فوق با انتگرال برهم کنش ۲۹ معادل می‌باشد. اما شکل انتگرال رابطه ۲۹ برای بارگذاری حرارتی، ثابت است در

۴-۲. گسسته سازی معادلات حاکم

روش بدون‌المان گلرکین بر مبنای فرم ضعیف رابطه تعادل فرمول‌بندی می‌شود. فرض می‌شود توابع آزمون $\eta^e, \eta^{th} \in H^1$ روی مرزهای اصلی صفر باشند. با فرضیات فوق و استفاده از قضیه دیورژانس، معادلات به صورت زیر قابل بیان است [۱۵].

$$\int_{\Omega} D\nabla u \cdot \nabla \eta^e d\Omega - \int_{\Omega} b\eta^e d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{t}\eta^e d\Gamma - \delta W_{ess} = 0 \quad (51)$$

به طوری که H^1 نشان‌دهنده فضای سوبولف مرتبه یک است. برای اعمال شرایط مرزی اساسی از تعبیر فیزیکی ضرایب لاگرانژ استفاده می‌شود [۱۵]. از اینرو

$$\int_{\Gamma_u} \lambda^T (u - \bar{u}) d\Gamma \quad (52)$$

ضرایب لاگرانژ λ را می‌توان به صورت نیروهای هوشمندی در نظر گرفت که شرط $u - \bar{u} = 0$ را ارضا می‌کنند. با جایگزینی تقریب تابع آزمون در فرم ضعیف معادلات، شکل نهایی معادلات گسسته به صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$KU = F \quad (53)$$

$$K_{ij} = \int_{\Omega} DB_i^T B_j d\Omega \quad (54)$$

$$F_i = \int_{\Omega} b\varphi_i^T d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{t}\varphi_i^T d\Gamma \quad (55)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \partial\phi_i/\partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial\phi_i/\partial x_2 \\ \partial\phi_i/\partial x_2 & \partial\phi_i/\partial x_1 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\varphi_i = \begin{bmatrix} \phi_i & 0 \\ 0 & \phi_i \end{bmatrix} \quad (57)$$

۴-۳. مدل‌سازی ترک با روش بدون‌المان گلرکین

خصوصیات پیوستگی و مشتق‌پذیری تقریب حداقل مربعات متحرک به خصوصیات متناظر توابع پایه و تابع وزنی بستگی دارد. هرچند کاربرد توابع پایه و وزنی معمول منجر به پیوستگی و مشتق‌پذیری تقریب تقریب حداقل مربعات متحرک با دقت نسبتاً بالایی در محیط‌های پیوسته شده است؛ اما توسعه این تقریب به نواحی دارای ناپیوستگی مثل ترک‌ها و یا فصل مشترک مواد، نیازمند کاربرد روش‌های ویژه‌ای برای لحاظ کردن ناپیوستگی در تقریب می‌باشد. در روش‌های مرسوم، ناحیه تکیه‌گاهی گره‌ها در نزدیکی

برای ساخت مدل گسسته فقط به مجموعه‌ای از گره‌ها نیاز است. در روش بدون‌المان گلرکین تقریب حداقل مربعات متحرک منجر به پایداری تابع تقریب شده و کاربرد فرآیند گلرکین سبب به وجود آمدن سیستم دستگاه معادلات پایدار و خوش‌رفتار می‌شود.

۴-۱. مرور روش بدون‌المان گلرکین

در روش بدون‌المان گلرکین، تابع تقریب $u^h(x)$ در هر نقطه $x \in \Omega$ به شکل آشنای زیر قابل بیان است [۱۵].

$$u^h(x) = \Phi^T(x)U \quad (41)$$

به طوری که U بردار پارامتری گرهی و $\Phi^T(x) = [\Phi_1(x) \ \Phi_2(x) \ \dots \ \Phi_n(x)]$ تابع شکل حداقل مربعات متحرک است که به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۵].

$$\Phi^T(x) = \gamma^T(x)B(x) \quad (42)$$

$$A(x)\gamma(x) = p(x) \quad (43)$$

$$A(x) = P^T W(x)P \quad (44)$$

$$B(x) = P^T W(x) \quad (45)$$

و $W(x) = \text{diag} [w(x-x_i)]$ که $w(x-x_i)$ تابع وزنی گره x_i در نقطه x است. $P(x)$ بردار توابع پایه است [۱۵].

$$P = \begin{bmatrix} P^T(x_1) \\ P^T(x_2) \\ \vdots \\ P^T(x_n) \end{bmatrix} \quad (46)$$

که در آن، n تعداد گره‌هایی است که نقطه x در ناحیه تکیه‌گاهی آنها قرار دارد. برای گرهی با موقعیت x اندازه ناحیه تکیه‌گاهی d_s به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$d_c d_s = a_s \quad (47)$$

که در آن، a_s ضریب بدون بعد شعاع ناحیه تکیه‌گاهی و d_c فاصله متوسط گرهی در اطراف نقطه x است که به صورت زیر بیان می‌شود [۱۵].

$$d_c = \frac{\sqrt{A_s}}{\sqrt{nA_s} - 1} \quad (48)$$

که در آن، A_s اندازه تخمینی ناحیه تکیه‌گاهی است. با توجه به رابطه ۴۲ می‌توان مشتق‌های تابع شکل را به دست آورد.

$$\Phi_{,i}^T(x) = \gamma_{,i}^T(x)B(x) + \gamma^T(x)B_{,i}(x) \quad (49)$$

$$A(x)\gamma_{,i}(x) = p_{,i}(x) - A_{,i}(x)\gamma(x) \quad (50)$$

با استفاده از تجزیه LU ماتریس $A(x)$ و فرآیند جایگزینی، می‌توان ضرایب $\gamma(x)$ و $\gamma_{,i}(x)$ را در معادلات ۴۹ و ۵۰ محاسبه نمود.

انتگرال J از انتگرال گیری گوس با هشت نقطه استفاده شده است. خصوصیات فیزیکی و مشتق آنها نیز در هر نقطه گوسی به طور مستقیم محاسبه شده است.

۵-۱. صفحه مواد مرکب تابعی ایزوتروپیک دارای ترک مرکزی مایل

مطابق شکل ۴ صفحه ای مربع شکل به ابعاد $L=W=20$ واحد با ترک مرکزی به طولی برابر $2a=2$ واحد و زاویه γ نسبت به محور X_1 در نظر گرفته می شود. تحلیل در حالت تنش صفحه ای و برای مقادیر مختلف γ انجام می شود. شرایط مرزی به صورت صفر بودن جابه جایی قائم در امتداد لبه پایین صفحه و نیز صفر بودن جابه جایی افقی برای گره سمت چپ از لبه پایینی در گرفته شده است. ضریب پواسون برابر مقدار ثابت $0/3$ و تغییرات مدول الاستیسیته در این صفحه به صورت نمایی است. مقادیر زیر برای زاویه تمایل ترک نسبت به خط افق در نظر گرفته شده است.

$$E(X_1) = E(0)e^{0.25X_1} \quad (58)$$

$$\frac{\gamma}{\pi} = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 \quad (59)$$

در حالت اول، تنش اعمالی بر این صفحه به صورت زیر است.

$$\sigma(X_1, L/2) = \varepsilon_0 E(0) e^{0.25X_1} \quad (60)$$

در جدول ۱ و نمودارهای شکل ۵ ضرایب شدت تنش مودهای I و II به دست آمده برای زوایای تمایل مختلف ترک در حالت بارگذاری نمایی روی لبه بالایی ورق، با مقادیر تحلیلی مقایسه شده است. مقدار ضرایب شدت تنش به صورت زیر بی بعد شده است. طبق جدول ۱، ضرایب شدت تنش محاسبه شده با مقادیر تحلیلی انطباق قابل قبولی دارد. البته با افزایش زاویه تمایل ترک و نزدیک شدن آن به یک ترک عمودی، دقت نتایج کاهش می یابد. در حالت دوم، تنش ثابت به لبه بالایی صفحه اعمال می شود. در جدول ۲ مقادیر ضرایب شدت تنش محاسبه شده برای حالت بارگذاری یکنواخت ارائه شده است. طبق نتایج، افزایش زاویه γ سبب کاهش ضریب شدت تنش مود I می شود. زیاد شدن زاویه γ دارای دو اثر است: کاهش مدول الاستیسیته در حوزه نوک ترک و کاهش زاویه بین راستاهای بارگذاری و ترک. هر دو عامل سبب کاهش مقدار ضریب شدت تنش مود I می شود.

$$K_{-n}^- = \frac{K_{-n}^-}{\varepsilon_0 E(0) \sqrt{\pi a}} \quad (61)$$

$$\sigma(X_1, L/2) = \sigma_0 \quad (62)$$

مرزهای غیرمحدب بر مبنای تئوری پرتوهای نوری تصحیح می گردد. اولین روشی که برای مدلسازی مرزهای غیرمحدب ارائه شد معیار دید می باشد [۲۳]. در این روش ساده، ناحیه تکیه گاهی گرهها محدود به حوزه دید از این گره می شود. در این روش تمام مرزهای داخلی و خارجی، از جمله ترک، مانند سطوح کدر در نظر گرفته می شوند. بنابراین حوزه دید (ناحیه تکیه گاهی) توسط این مرزها بریده و محدود می گردد. شرایط قرار گرفتن نقطه x در ناحیه تکیه گاهی یک گره مثل I یا J در شکل ۳ را می توان به صورت زیر بیان نمود.

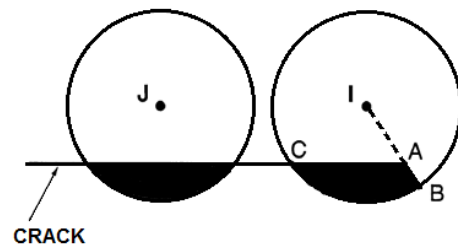
۱. نقطه x در ناحیه تکیه گاهی کامل گره (با فرض عدم وجود مرزها) قرار داشته باشد

وجود مرزها) قرار داشته باشد

۲. پاره خط واصل نقطه x و گره، هیچ مرزی را قطع

ننماید

در شکل ۳ نقاطی که در ناحیه هاشورخورده قرار دارند، از ناحیه تکیه گاهی گره های I و J حذف می شوند. در نتیجه اثر ناپیوستگی در تعریف توابع وزنی و شکل گرههایی نظیر I و J لحاظ می گردد.

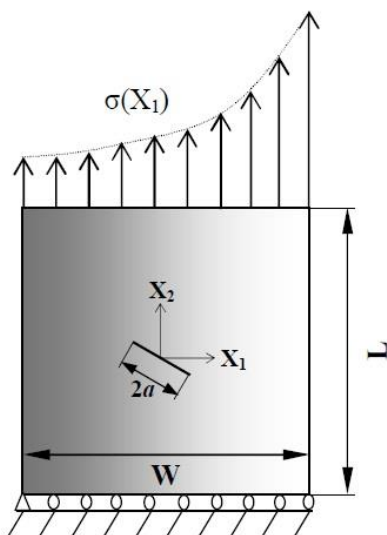


شکل ۳. محدود شدن ناحیه تکیه گاهی در اطراف ترک با کاربرد معیار دید

البته برش جزئی ناحیه تکیه گاهی، ناشی از کاربرد معیار دید، برای گرههایی که ناحیه تکیه گاهی آنها شامل نوک ترک است رخ می دهد و منجر به ناپیوستگی هایی در تقریب اطراف نوک ترک می شود که با کاهش فاصله بین گرهها، ناپیوستگی نیز محدود می شود. تحقیقات نشان می دهد که با وجود تقریب های ناپیوسته ای که در اثر کاربرد معیار دید به وجود می آید، همگرایی حل حفظ می گردد [۲۴].

۵. نتایج عددی

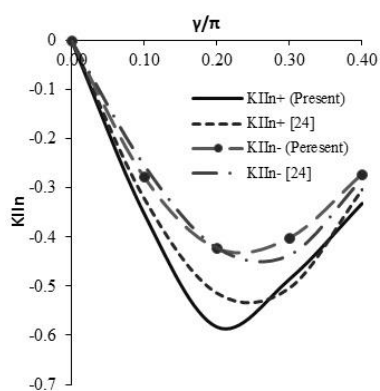
در مثال های ذکر شده، صفحه ای از مواد مرکب تابعی حاوی ترک داخلی یا لبه ای در نظر گرفته شده است. ضخامت صفحه برای تحلیل تنش صفحه ای به قدر کافی نازک فرض می شود. در ناحیه



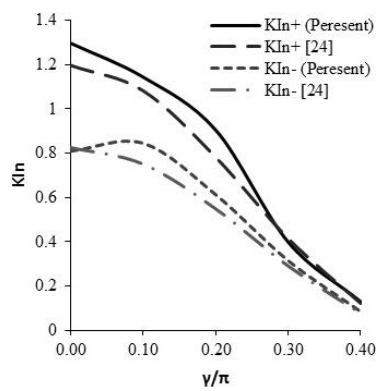
شکل ۴. هندسه و بارگذاری صفحه دوبعدی دارای ترک مورب مرکزی

جدول ۱. ضرایب شدت تنش در یک صفحه تابعی ایزوتروپیک در معرض بار نمایی حاوی ترک مرکزی با زوایای مختلف γ

مقادیر تحلیلی [۲۴]				مقادیر محاسبه‌شده				$\frac{\gamma}{\pi}$
K_{In}^+	K_{In}^-	K_{IIIn}^+	K_{IIIn}^-	K_{In}^+	K_{In}^-	K_{IIIn}^+	K_{IIIn}^-	
۱/۱۹۶	۰/۸۲۵	۰	۰	۱/۲۹۶	۰/۸۰۹	۰	۰	۰
۱/۰۸۱	۰/۷۵۰	-۰/۳۲۱	-۰/۲۵۴	۱/۱۴۳	۰/۸۴۴	-۰/۳۵۲	-۰/۲۷۸	۰/۱
۰/۷۸۱	۰/۵۴۸	۰/-۵۱۴	-۰/۴۲۲	۰/۹۰۴	۰/۶۱۲	-۰/۵۸۳	-۰/۴۲۳	۰/۲
-۰/۴۱۴	-۰/۲۹۰	-۰/۵۰۴	-۰/۴۳۷	۰/۳۹۸	۰/۳۱۴	-۰/۴۸۶	-۰/۴۰۲	۰/۳
-۰/۱۲۱	-۰/۰۷۵	-۰/۳۰۴	-۰/۲۸۲	۰/۱۲۹	۰/۰۸۴	-۰/۳۳۲	-۰/۲۷۲	۰/۴



(ب)



(ف)

شکل ۵. منحنی‌های ضرایب شدت تنش الف) مد اول؛

ب) مد دوم در یک صفحه تابعی ایزوتروپیک در معرض بار نمایی حاوی ترک مرکزی بر حسب زوایای مختلف γ

که روی صفحه بدون ترک کرنش واحد را ایجاد کند). شرایط مرزی صفحه نیز به این صورت است: در گره میانی لبه سمت چپ جابه‌جایی در جهت X_1 و X_2 صفر است و در گره میانی لبه سمت راست جابه‌جایی در جهت X_2 صفر است. خصوصیات مواد براساس میانگین آنها بیان شده است. به‌طوری‌که، E مدول

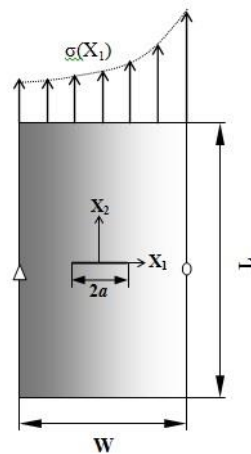
۲-۵. صفحه مواد ارتوتروپیک تابعی دارای ترک میانی

در این مثال، یک صفحه محدود ساخته‌شده از ماده تابعی ارتوتروپیک شامل یک ترک میانی به طول $2a$ مطابق شکل ۶ در نظر گرفته شده است که تحت بارگذاری کرنش ثابت در لبه بالایی قرار دارد (برای اعمال نیرو از میزان نیرویی استفاده می‌شود

الاستیسیته مؤثر، ν ضریب پواسون مؤثر و K_0 پارامتر برشی است که با استفاده از ثابت‌های E_{ij} ، G_{ij} و $\nu_{ij} = v_{ji}/E_{ij}$ برای $(i, j=1, 2)$ تعریف می‌شوند. این روابط برای حالت تنش صفحه‌ای به صورت زیر است [۲۵].

جدول ۲. ضرایب شدت تنش در یک صفحه تابعی ایزوتروپیک در معرض بار یکنواخت حاوی ترک مرکزی با زوایای مختلف γ

مقادیر محاسبه شده				$\frac{\gamma}{\pi}$
K_{In}^+	K_{In}^-	K_{IIn}^+	K_{IIn}^-	
۱/۲۵۵۶	۰/۷۸۳۸	۰	۰	۰
۱/۱۰۷۴	۰/۸۱۷۷	-۰/۳۲۹۰	-۰/۲۴۹۳	۰/۱
۰/۸۷۵۸	۰/۵۹۲۹	-۰/۵۲۴۸	-۰/۳۸۴۳	۰/۲
۰/۳۸۵۶	۰/۳۰۴۲	-۰/۴۴۰۹	-۰/۳۶۷۷	۰/۳
۰/۱۲۵۰	۰/۰۸۱۴	-۰/۳۲۱۷	-۰/۲۶۳۵	۰/۴



شکل ۶. هندسه و بارگذاری صفحه دوبعدی دارای ترک مرکزی

ارائه شده است. طبق نتایج به دست آمده، با افزایش β ضریب شدت تنش در نوک سمت راست افزایش و در نوک سمت چپ کاهش می‌یابد. با توجه به قرار گرفتن مرکز مختصات در وسط ترک و نسبت مستقیم ضریب شدت تنش و مدول الاستیسیته در نوک ترک، این مسئله دور از انتظار نیست. در قسمت دوم، اثر ضریب پواسون مؤثر بر ضریب شدت تنش بررسی شده است. ضریب غیرهمگنی β ثابت و برای ضریب پواسون مؤثر ν مقادیر مختلف فرض شده است. در جدول ۴ و شکل ۸، تغییرات ضریب شدت تنش نسبت به ν نشان داده شده است. طبق نتایج، ضریب شدت تنش با افزایش ν افزایش می‌یابد، در حالی که در مواد مرکب تابعی ایزوتروپیک در حالت تنش صفحه‌ای تغییرات ضریب پواسون روی مقدار ضریب شدت تنش اثری ندارد [۱۶].

$$E = \sqrt{E_{11}E_{22}} \quad (۶۳)$$

$$\nu = \sqrt{\nu_{12}\nu_{21}} \quad (۶۴)$$

$$\delta^4 = \frac{E_{11}}{E_{22}} = \frac{\nu_{12}}{\nu_{21}} \quad (۶۵)$$

$$\kappa_0 = \frac{E}{2G_{12}} - \nu \quad (۶۶)$$

$$\beta = \frac{1}{W} \ln \left(\frac{E_{11}(\frac{W}{2})}{E_{11}(-\frac{W}{2})} \right) = \frac{1}{W} \ln \left(\frac{E_{22}(\frac{W}{2})}{E_{22}(-\frac{W}{2})} \right) \quad (۶۷)$$

$$= \frac{1}{W} \ln \left(\frac{G_{12}(\frac{W}{2})}{G_{12}(-\frac{W}{2})} \right)$$

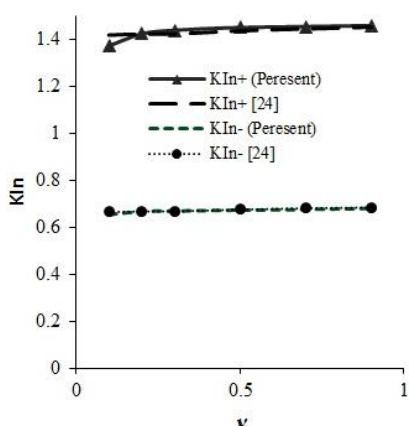
تغییرات پارامترهای E_{11} ، E_{22} و G_{12} به صورت تابع نامی از X_1 فرض شده است. همچنین ν_{12} ثابت است. با در نظر گرفتن $\nu = 0.3$ و $\kappa_0 = 0.5$ ، ضریب شدت تنش برای مقادیر مختلف ضریب غیرهمگنی β به دست آمده و نتایج در جدول ۳ و شکل ۷

جدول ۳. ضرایب شدت تنش در یک صفحه تابعی ارتوتروپیک حاوی ترک مرکزی برای مقادیر مختلف ضریب غیرهمگنی βa

βa	مقادیر محاسبه‌شده		مقادیر گزارش شده [۲۴]	
	K_{In}^+	K_{In}^-	K_{In}^+	K_{In}^-
۰	۰/۹۹۷۱	۰/۹۹۷۲	۰/۹۹۶۹	۰/۹۹۶۹
۰/۱	۱/۰۸۱	۰/۹۱۷۳	۱/۰۷۵	۰/۹۲۴۷
۰/۲۵	۱/۲۰۵۲	۰/۸۲۰۸	۱/۲۰۴۳	۰/۸۲۴۵
۰/۵	۱/۴۶۰۸	۰/۶۸۳۲	۱/۴۳۷۱	۰/۶۷۰۶
۰/۷۵	۱/۶۸۲۱	۰/۵۴۳۲	۱/۷۰۵۵	۰/۵۴۰۴
۱	۱/۹۲۳۰	۰/۴۱۵۳	۲/۰۳۱۸	۰/۴۳۳۵

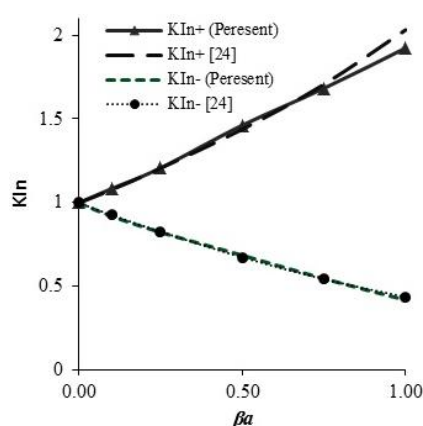
جدول ۴. ضرایب شدت تنش در یک صفحه تابعی ارتوتروپیک حاوی ترک مرکزی برای مقادیر مختلف ν

ν	مقادیر محاسبه‌شده		مقادیر گزارش شده [۲۴]	
	K_{In}^+	K_{In}^-	K_{In}^+	K_{In}^-
۰/۱	۱/۳۷۲	۰/۶۵۳۹	۱/۴۱۸۳	۰/۶۶۴۷
۰/۲	۱/۴۲۳۶	۰/۶۶۷۲	۱/۴۲۳۳	۰/۶۶۷۶
۰/۳	۱/۴۳۹۱	۰/۶۶۹۱	۱/۴۲۳۳	۰/۶۶۷۶
۰/۵	۱/۴۵۰۶	۰/۶۷۲۸	۱/۴۳۶۸	۰/۶۷۵۵
۰/۷	۱/۴۵۴۶	۰/۶۷۵۶	۱/۴۴۴۹	۰/۶۸۰۹
۰/۹	۱/۴۵۹۲	۰/۶۸۰۵	۱/۴۵۲۴	۰/۶۸۴۶



شکل ۸. منحنی های ضرایب شدت تنش در یک صفحه تابعی

ارتوتروپیک حاوی ترک مرکزی بر حسب مقادیر مختلف ν



شکل ۷. منحنی های ضرایب شدت تنش در یک صفحه تابعی ارتوتروپیک

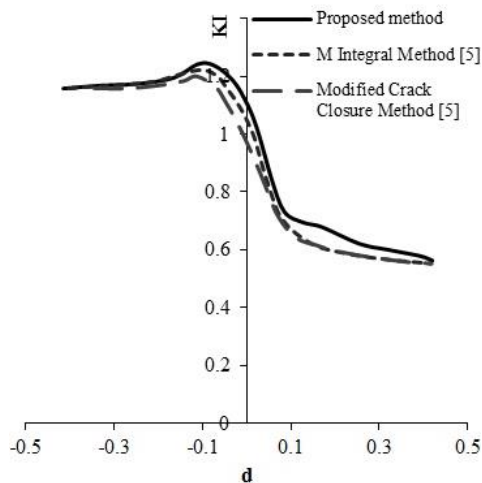
حاوی ترک مرکزی بر حسب مقادیر مختلف ضریب غیرهمگنی βa

۳-۵. صفحه مرکب لایه‌ای دارای ترک لبه‌ای

تحلیل ترک در سازه‌های مواد مرکب مستلزم لحاظ کردن طبیعت قطعه‌ای پیوسته خصوصیات مواد تشکیل‌دهنده آن است. فصل مشترک لایه‌های تشکیل‌دهنده سازه‌های مرکب موجب ناپیوستگی در خصوصیات می‌شوند و خطوط ناپیوستگی ضعیف را در ناحیه حل مدل این سازه‌ها به‌وجود می‌آورند. لحاظ کردن آنها در مدل نیازمند کاربرد روش‌های خاصی مثل روش پنالتی است. از طرف دیگر، در بسیاری از موارد یک لایه مواد مرکب تابعی بین دو لایه همگن از مواد تشکیل‌دهنده آن ساخته می‌شود و طبیعتاً

در تحلیل آن هر سه لایه در نظر گرفته می‌شود. در هر دو مورد، تابع تانژانت هیپربولیک می‌تواند تغییرات خصوصیات مواد را بیان نماید. در این مثال، یک صفحه از مواد مرکب (مطابق شکل ۹) در نظر گرفته شده است که شامل یک ترک لبه‌ای است. در صفحه فوق، تغییرات مدول الاستیسیته و مدول برشی را می‌توان با تابع تانژانت هیپربولیک نمایش داد.

$$E_{11}(X_1) = \frac{E_{11}^+ + E_{11}^-}{2} + \frac{E_{11}^+ - E_{11}^-}{2} \tanh(\alpha(X_1 + d)) \quad (۶۸)$$

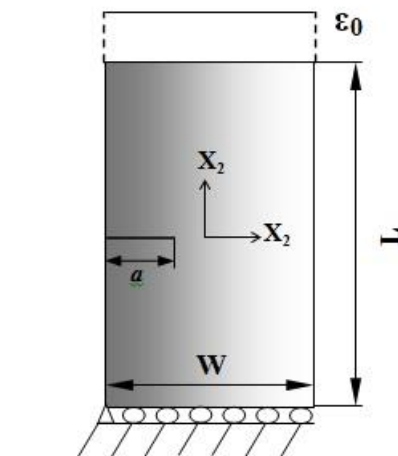


شکل ۱۰. تغییرات ضریب شدت تنش در صفحه مرکب لایه‌ای

طبق این نتایج، برای مقادیری از d که سبب دور شدن ناحیه گرادیان خصوصیات مواد از نوک ترک می‌شود، مقدار ضریب شدت تنش تقریباً یکسان است.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک انتگرال پایستار برای محاسبه پارامترهای شکست در مواد مرکب تابعی ارتوتروپیک ارائه شده است. کاربرد روش بدون المان گلرکین نیز علاوه بر سادگی مدل‌سازی ترک، محاسبه مشتق میدان‌های کرنش کمکی و اصلی به‌طور عددی را در انتگرال برهم‌کنش تسهیل می‌کند. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهند که محاسبه ضرایب شدت تنش با به‌کارگیری رابطه انتگرال برهم‌کنش ارائه‌شده دقت قابل قبولی دارد. ارتوتروپیک بودن خواص ماده بر ضرایب شدت تنش اثر قابل توجه دارد. زاویه ترک و موقعیت نوک ترک اثر چشمگیری بر مقدار ضرایب شدت تنش مد I و مد II دارد. گرادیان مدول الاستیسیته روی ضریب شدت تنش اثر قابل توجهی دارد. بیشتر بودن مدول الاستیسیته در ناحیه بدون ترک سبب جابه‌جایی کمتر نقاط ناحیه نوک ترک و در نتیجه کاهش ضریب شدت تنش مد I می‌شود. در حالت تنش صفحه‌ای، ضریب شدت تنش در مواد تابعی ارتوتروپیک به تغییرات ضریب پواسون حساسیت چندانی ندارد. اگرچه این تغییرات در مواد تابعی ایزوتروپیک وجود ندارد. با استفاده از روش ارائه‌شده در این تحقیق می‌توان برای پیش‌بینی زاویه و مسیر رشد ترک در صفحات تابعی ارتوتروپیک در تحقیقات آینده استفاده کرد.



شکل ۹. هندسه صفحه مرکب لایه‌ای دارای ترک لبه‌ای

$$E_{22}(X_1) = \frac{E_{22}^+ + E_{22}^-}{2} + \frac{E_{22}^+ - E_{22}^-}{2} \tanh(\beta(X_1 + d)) \quad (69)$$

$$G_{12}(X_1) = \frac{G_{12}^+ + G_{12}^-}{2} + \frac{G_{12}^+ - G_{12}^-}{2} \tanh(\gamma(X_1 + d)) \quad (70)$$

در این روابط، ضرایب α ، β و γ اندازه ناحیه ماده تابعی و d موقعیت وسط این ناحیه را مشخص می‌نماید. در این مثال، ضریب پواسون ثابت و برابر $1/3$ در نظر گرفته شده است. مسئله در حالت تنش صفحه‌ای و برای مقادیر زیر تحلیل شده است. خصوصیات مواد نیز به صورت متناسب تغییر می‌کند.

$$L/W=2, a/W=0.5, \nu_{12}=0.3. \alpha a = \beta a = \gamma a = 15.$$

$$(E_{11}^-, E_{11}^+) = (1, 3), (E_{22}^-, E_{22}^+) = (1, 3),$$

$$(E_{11}^-, E_{11}^+) = (1.25, 2.75), (G_{12}^-, G_{12}^+) = (1.5, 2.5)$$

با تغییر پارامتر d از -0.5 تا 0.5 موقعیت نوک ترک از لایه

همگن سمت چپ با گذر از ناحیه ماده تابعی به ناحیه سمت راست منتقل می‌گردد. البته باید توجه داشت روابط حوزه نوک ترک با فرض همگنی موضعی نوک ترک به‌دست آمده است. بنابراین گرادیان شدید خصوصیات ماده در نوک ترک در روابط مذکور لحاظ نمی‌گردد. این موضوع انتخاب ضرایب غیرهمگنی را برای نوک ترک واقع در ناحیه ماده تابعی با محدودیت مواجه می‌سازد. تغییرات ضریب شدت تنش مد I برحسب d در نمودار شکل ۱۰ آمده و با نتایج ارائه‌شده توسط کیم و پائولینو [۵] مقایسه شده است. بایسته و محمدی [۱۱] از فرم غیرسازگار انتگرال برهم‌کنش استفاده کردند. در فرم غیرسازگار از میدانهای تعادل و ساختاری مواد FG استفاده می‌شود. در نتیجه، رابطه سینماتیک بین مؤلفه‌های کرنش و گرادیان جابه‌جایی برقرار نیست [۵].

- [1] P. Gu, R. J. Asaro, Cracks in functionally graded materials, *International Journal of solids and structures*, Vol. 34, No. 1, pp. 1–17, 1997.
- [2] M. Ozturk, F. Erdogan, Mode I crack problem in an inhomogeneous orthotropic medium, *International Journal of Engineering Sciences*, Vol. 35, No. 9, pp. 869–883, 1997.
- [3] M. Ozturk, F. Erdogan, The mixed mode crack problem in an inhomogeneous orthotropic medium, *International Journal of Fracture*, Vol. 98, No. 3–4, pp. 243–261, 1999.
- [4] B. N. Rao, S. Rahman, An interaction integral method for analysis of cracks in orthotropic functionally graded materials, *Computational Mechanics*, Vol. 32, No. 40–51, 2003.
- [5] J-H. Kim, G. H. Paulino, The interaction integral for fracture of orthotropic functionally graded materials: Evaluation of stress intensity factors, *International Journal of solids and structures*, Vol. 40, No. 15, pp. 3967–4001, 2003.
- [6] J-H. Kim, G. H. Paulino, Mixed-mode J-integral formulation and implementation using graded finite elements for fracture analysis of nonhomogeneous orthotropic materials, *Mechanics of Materials*, Vol. 35, No. 1–2, pp. 107–128, 2003.
- [7] J-H. Kim, G. H. Paulino, Mixed-mode fracture of orthotropic functionally graded materials using finite elements and the modified crack closure method, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 69, No. 14–16, pp. 1557–1586, 2002.
- [8] J. Chen, Determination of thermal stress intensity factors for an interface crack in a graded orthotropic coating-substrate structure, *International Journal of Fracture*, Vol. 133, No. 4, pp. 303–328, 2005.
- [9] S. Dag, Mixed-mode fracture analysis of functionally graded materials under thermal stresses: a new approach using Jk-integral, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 30, pp. 269–296, 2007.
- [10] S. Dag, B. Yildirim, S. Topal, Computational Methods for Inclined Cracks in Orthotropic Functionally Graded Materials Under Thermal Stresses, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 36, No. 10, pp. 1001–1026, Oct. 2013.
- [11] H. Bayesteh, S. Mohammadi, XFEM Fracture Analysis of Orthotropic Functionally Graded Materials, *Compos. Part B Eng.*, Vol. 44, No. 1, pp. 8–25, 2013.
- [12] E. Goli, M. T. Kazemi, XFEM Modeling of Fracture Mechanics in Transversely Isotropic FGMs via Interaction Integral Method, *Proc. Mater. Sci.*, Vol. 3, pp. 1257–1262, 2014.
- [13] H. Bayesteh, A. Afshar, S. Mohammadi, Thermo-Mechanical Fracture Study of Inhomogeneous Cracked Solids by the Extended Isogeometric Analysis Method, *Eur. J. Mech.-A/Solids*, Vol. 51, pp. 123–139, 2015.
- [14] G. Bhardwaj, I. V. Singh, B. K. Mishra, T. Q. Bui, and Numerical Simulation of Functionally Graded Cracked Plates Using NURBS based XIGA under Different Loads and Boundary Conditions, *Compos. Struct.*, Vol. 126, pp. 347–359, 2015.
- [15] M. Shariati, M. Majidzadeh, M. B. Nazari, Determination of stress intensity factors in cracked FGM rectangular plates by element-free Galerkin method, *Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 40, No. 1, pp. 55–66, 1389. (in Persian فارسی)
- [16] M. B. Nazari, M. Shariati, M. R. Eslami, B. Hassani, Meshless Analysis of Cracked Functionally Graded Plates under Thermal Loading, *Aerospace mechanics journal*, Vol. 9, No. 4, pp. 1–16, 1392. (in Persian فارسی)
- [17] M. Pant, I. V. Singh, B. K. Mishra, Numerical Simulation of Thermo-Elastic Fracture Problems Using Element Free Galerkin Method, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 52, No. 12, pp. 1745–1755, 2010.
- [18] V. P. Nguyen, T. Rabczuk, S. Bordas, M. Duflo, Meshless Methods: A Review and Computer Implementation Aspects, *Math. Comput. Simul.*, Vol. 79, No. 3, pp. 763–813, 2008.
- [19] H. Koohkan, G. Baradaran, R. Vaghefi, A Completely Meshless Analysis of Cracks in Isotropic Functionally Graded Materials (Petrov–

- Galerki), Proc. Inst. Mech. Eng. Part C: *J. Mech. Eng. Sci.*, Vol. 224, pp. 581–590, 2009.
- [20] S. Garg, M. Pant, Numerical simulation of adiabatic and isothermal cracks in functionally graded materials using optimized element-free Galerkin method, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 40, No. 5, pp 1-20, 2017.
- [21] S. G. Lekhnitskii, Anisotropic plates, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1968.
- [22] G. C. Sih, P. C. Paris, G. R. Irwin, On cracks in rectilinearly anisotropic bodies. *International Journal of Fracture*, Vol. 1, No. 2, pp. 189–203, 1965.
- [23] T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming, P. Krysl, Meshless methods: an overview and recent developments, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 139, No. 1-4, pp. 3–47, 1996.
- [24] N. Konda, F. Erdogan, The mixed mode crack problem in a nonhomogeneous elastic medium, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 47, pp. 533–45, 1994.
- [25] S. Krenk, On the elastic constants of plane orthotropic elasticity, *Journal of Composite Materials*, Vol. 13, pp. 108–116, 1979.