روابط تقریبی فاصلهٔ خطای هدایت تناسبی ناشی از تأخیر زمانی خالص مبتنی بر تحلیل بدترین شرایط

علی عربیان آرانی[1]، سید حمید جلالی نائینی[2]

۱ دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

۲ استادیار، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، shjalalinaini@modares.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۸/۲۶

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۲/۲۰

چکیده

در این مقاله، تأثیر تأخیر زمانی خالص سیستم بر فاصلهٔ خطای قانون هدایت تناسبی برای سیستم هدایت و کنترل با تابع تبدیل دوجمله‌ای مرتبه بالا بررسی شده است. برای این منظور از مدل خطی یک‌بعدی استفاده شده است. فاصلهٔ خطای بی‌بعد ناشی از خطای سمت اولیه، مانورهای ثابت، خطی و سهمی هدف و نویز جستجوگر با استفاده از روش الحاقی محاسبه شده است. برای جستجوگر نویزهای تابش، مستقل از فاصله، وابسته به فاصلهٔ سیستم فعال و نیمه‌فعال در نظر گرفته شده و نتایج با روش مستقیم اعتبارسنجی شده است. همچنین، اثر تأخیر زمانی خالص سیستم، ثابت زمانی سیستم، ضریب ناوبری مؤثر و افزایش مرتبهٔ سیستم تا ۳۰، بر فاصلهٔ خطای ناوبری تناسبی بررسی شده است. در ادامه، ضریب ناوبری اکسترمم برای حداقل‌کردن فاصلهٔ خطای بدترین حالت با توجه به زمان نهایی استخراج شده است. سپس، روابط تقریبی فاصلهٔ خطا براساس تحلیل بدترین حالت در زمان نهایی با توجه به منابع خطای ذکر شده و با استفاده از برازش منحنی ارائه شده است. در نهایت، روابط تقریبی ضرایب بی‌بعد پایای فاصلهٔ خطا ناشی از نویز برحسب ضریب ناوبری مؤثر، به‌طور نمونه به ازای سیستم هدایت و کنترل مرتبهٔ پنجم و دهم ارائه شده است.

واژگان کلیدی

ناوبری تناسبی، تأخیر زمانی خالص، ضریب ناوبری اکسترمم، فاصلهٔ خطای بی‌بعد

۱. مقدمه

طی نیم قرن گذشته، مطالعات گسترده‌ای در زمینهٔ هدایت موشک‌های رهگیر انجام شده است. مسئلهٔ اساسی در قانون هدایت تناسبی، رهگیری یک هدف با دقت بالا و در محیطی با حضور نویز و عدم قطعیت است. قانون هدایت تناسبی و استراتژی‌های آن، کاربردی‌ترین روش به‌کار رفته برای هدایت موشک‌های آشیانه‌یاب است [۱–۵]. از جمله مهمترین تحلیل‌های سیستمی قوانین هدایت، تحلیل فاصلهٔ خطاست که معمولاً در منابع مختلف با شبیه‌سازی عددی، روش الحاقی، روش تحلیل کوواریانس و شبیه‌سازی مونت کارلو انجام شده است [۶–۸]. روش الحاقی تکنیک رایجی است که برای تحلیل عملکرد هدایت

سیستم‌های خطی متغیر با زمان در مراحل طراحی مفهومی و اولیه موشک‌های رهگیر استفاده می‌شود [۹–۱۱]. از طرفی بی‌بعدسازی معادلات الحاقی و نتایج حل عددی آنها بسیار کاربردی خواهد بود [۱۲–۱۳]. معمولاً برای ارزیابی اولیهٔ قانون هدایت، دینامیک سیستم هدایت وکنترل را با یک تابع تبدیل مرتبه یک یا توابع تبدیل دوجمله‌ای بالاتر مدل می‌کنند [۱۴–۱۶]. با توجه به نوع موشک، تأخیرهای متعددی ناشی از دینامیک اجزای سیستم هدایت و کنترل و همچنین الگوریتم‌های دیجیتال در هدایت و کنترل وجود دارد. وجود تأخیر زمانی خالص[۱] (ناخواسته) در سیستم هدایت و کنترل به کاهش عملکرد نهایی منجر می‌شود. در مدلسازی، تأخیر زمانی خالص ممکن است با تقریب‌های مرتبه اول یا بالاتر جایگزین شود. البته اعمال مدل دقیق، ارجح و در بعضی مواقع اجتناب ناپذیر است.

در این راستا دسته‌ای از منابع به مدلسازی و تحلیل سیستم هدایت با اعمال تأخیر زمانی خالص پرداخته‌اند [۱۷–۲۱]. به‌طور نمونه، بار محاسباتی پردازش تصویر سبب تأخیر زمانی خالص در محاسبه نرخ چرخش خط دید می‌شود [۲۲]. مرجع [۱۹] در یک سیستم هدایت و کنترل ایده‌ال، تأخیر زمانی خالص را در اندازه‌گیری نرخ چرخش خط دید اعمال کرده است و تحلیل عملکردی برای قانون هدایت تناسبی انجام داده است. همچنین در این مرجع دو الگوریتم برای تخمین خطای نرخ چرخش خط دید ارائه شده است. مرجع [۲۲] به تحلیل فاصلهٔ خطا و پایداری برای سیستم هدایت و کنترل ایده‌ال با اعمال تأخیر زمانی خالص در حالت اهداف با مانور پرداخته است. در مرجع [۲۳] مدل سادهٔ دوجمله‌ای سیستم هدایت و کنترل تا مرتبهٔ ۳۰ بررسی شده است و با استفاده از معادلات الحاقی و صحه‌گذاری آنها نشان داده شده که در حالت اعمال خطای سمت اولیه یا هدف با مانور ثابت، خطی و سهموی با افزایش ضریب ناوبری مؤثر به ازای سیستم هدایت و کنترل دوجمله‌ای، خطای نهایی همیشه کاهش نمی‌یابد؛ بلکه نمودار خطای نهایی برحسب ضریب ناوبری مؤثر، نقطهٔ کمینه‌ای دارد که این ضریب ناوبری اکسترمم با N'_s نمایش داده شده است. همچنین رفتار این نقطه کمینه برحسب مرتبهٔ سیستم استخراج و نشان داده است؛ با افزایش ضریب ناوبری مؤثر، ضرایب بی‌بعد خطای ناشی از نویز افزایش می‌یابد. اگرچه در مرجع مذکور نشان داده شده است که در حالت حدی وقتی مرتبهٔ سیستم مفروض به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند، عملاً تابع تبدیل سیستم هدایت و کنترل به‌صورت تأخیر زمانی خالص قابل جایگزینی است؛ اما در این مرجع، اثر تأخیر زمانی خالص در سیستم هدایت و کنترل بررسی نشده است.

در مرجع [۱۳] مقادیر فاصلهٔ خطای هدایت تناسبی ناشی از نویزهای تابش، مستقل از فاصله، وابسته به فاصله در سیستم فعال و نیمه‌فعال برای سیستم هدایت و کنترل مرتبه اول، تنها به ازای مقادیر صحیح ضرایب ناوبری به‌صورت تحلیلی استخراج شده است. گفتنی است در مرجع [۱۳] به ازای هر کدام از ضرایب ناوبری صحیح مذکور، یک رابطه استخراج شده است. در مرجع [۲۴] رابطهٔ واحدی برای فاصلهٔ خطا برای سیستم مذکور به ازای ضرایب ناوبری صحیح با استفاده از حل تحلیلی ارائه شده‌است. به‌عبارت دیگر، رابطهٔ مستخرج در این مرجع، به ازای کلیهٔ ضرایب ناوبری صحیح معتبر است. حل تحلیلی فاصلهٔ خطای هدایت تناسبی به ازای سیستم هدایت و کنترل با مرتبهٔ بزرگتر از یک در مراجع موجود نیست و مقادیر عددی ضرایب پایای فاصلهٔ خطای بی‌بعد با استفاده از حل عددی روش الحاقی محاسبه شده و به‌طور نمونه برای سیستم هدایت و کنترل دوجمله‌ای مرتبهٔ پنجم به ازای چند ضریب ناوبری در مرجع [۱۳] آمده است. در مرجع [۲۵] روابط تقریبی فاصلهٔ خطای استراتژی بهبودیافته ناوبری تناسبی با بازخورد شتاب جانبی برای سیستم هدایت و کنترل مرتبهٔ دوم در حضور نویز جستجوگر و اثر رادوم ارائه شده است. البته نتایج با فرض مدل سیستم مرتبه اول و دوم برای تخمین فاصلهٔ خطا، خطای زیادی دارد و درعمل قابل استفاده نیست. در اکثر منابع برای تحلیل اولیه از سیستم هدایت و کنترل مرتبهٔ پنجم استفاده می‌کنند. نمودار ضرایب بی‌بعد فاصلهٔ خطا برحسب ضریب ناوبری مؤثر برای سیستم هدایت و کنترل مرتبه پنجم با استفاده از کد الحاقی مرجع [۱۳] قابل ترسیم است. استخراج روابط تقریبی برای فاصلهٔ خطا بسیار حائز اهمیت است. همان‌گونه که اشاره شد، نتایج مرجع [۱۳] به‌صورت مقادیر نمونه برای چند ضریب ناوبری و تنها به ازای سیستم هدایت و کنترل مرتبه پنجم (و مرتبهٔ اول) آمده است و لذا ارائه روابط تقریبی فاصلهٔ خطا برحسب ضریب ناوبری مؤثر با لحاظ نمودن آثار دیگر (از جمله تأخیر زمانی خالص)، بسیار حائز اهمیت خواهد بود.

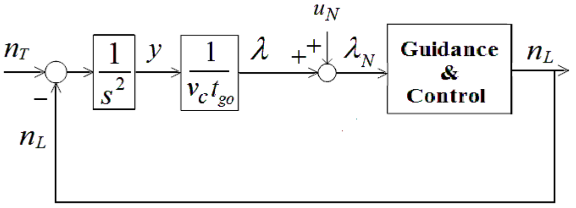
در این پژوهش، روابط تقریبی فاصلهٔ خطا ناشی از تأخیر زمانی خالص در سیستم هدایت وکنترل دوجمله‌ای تا مرتبه ۳۰ در بدترین شرایط در حضور خطای سمت اولیه، مانور هدف و نویز

جستجوگر استخراج شده است. این کار با استفاده از روش الحاقی بی‌بعد، رسم نتایج بی‌بعد و انتخاب توابع تقریبی با برازش منحنی صورت پذیرفته است. به‌علاوه، حداکثر ضریب ناوبری مؤثر برای شرایط اکسترمم استخراج شده است. در نهایت، روابط تقریبی ضرایب بی‌بعد پایای فاصلهٔ خطا ناشی از نویز نیز برحسب تأخیر زمانی خالص و ضریب ناوبری مؤثر، به‌طور نمونه برای سیستم هدایت و کنترل مرتبهٔ پنجم و دهم، ارائه شده‌است.

۲. مدل الحاقی هدایت تناسبی با تأخیر زمانی خالص

در شکل ۱ نمودار بلوکی متداول برای مسئلهٔ خطی‌شدهٔ هدایت تناسبی نمایش داده شده است. در این شکل، s متغیر حوزهٔ لاپلاس است. در خطی‌سازی شتاب موشک (n_L) و شتاب هدف (n_T) تنها در راستای عمود بر خط دید اولیه و همچنین زاویهٔ خط دید (λ) کوچک فرض می‌شود. در این شکل y تصویر فاصلهٔ هدف از موشک در راستای عمود بر خط دید اولیه، v_c سرعت نزدیک‌شدن (که ثابت فرض شده) و $t_{go} = t_f - t$ زمان باقیمانده تا اصابت (یا کمترین فاصله) است. همچنین، نویز اندازه‌گیری زاویهٔ خط دید با u_N نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۳]:

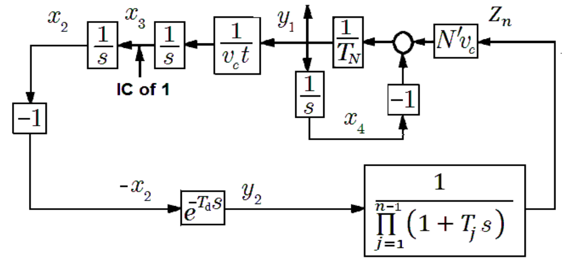
$$u_N = \frac{u_{\mathrm{GL}}}{v_c t_{go}} + u_{\mathrm{FN}} + \frac{v_c t_{go}}{R_A} u_{\mathrm{RN}} + \left(\frac{v_c t_{go}}{R_A}\right)^2 u_{\mathrm{RNA}} \qquad (۱)$$



شکل ۱. نمودار بلوکی مسئلهٔ خطی‌شده هدایت

در رابطه (۱) ورودی مدل نویز تابش با u_{GL}، ورودی نویز مستقل از فاصله با u_{FN}، ورودی مدل نویز وابسته به فاصله برای سیستم نیمه‌فعال با u_{RN} و ورودی نویز وابسته به فاصله برای سیستم فعال با u_{RNA} مشخص شده است. این ورودی‌ها به‌صورت نویز سفید فرض و چگالی طیفی توان آنها با Φ و همان اندیس ورودی متناظر نمایش داده می‌شود. چگالی طیفی نویزهای وابسته به فاصله به ازای یک فاصله مرجع R_{A} داده می‌شود [۱۳]. در این مطالعه، تابع تبدیل سیستم هدایت و کنترل که متشکل از جستجوگر، فیلتر نویز، بهرهٔ هدایت، سیستم کنترل و دینامیک موشک است، مجموعاً با تابع تبدیل زیر مدل شده است:

$$\frac{n_L}{\lambda_N} = \frac{s}{(1+T_N s)} \frac{\acute{N} v_c}{\prod_{j=1}^{n-1}(1+T_j s)} e^{-T_d s} \qquad (۲)$$



شکل ۲. مدل الحاقی هدایت تناسبی با المان تأخیر زمانی خالص

که در آن، N' ضریب ناوبری مؤثر، T_N ثابت زمانی فیلتر نویز، T_d تأخیر زمانی خالص، T_j نمایانگر ثابت‌های زمانی مابقی اجزاء سیستم و n مرتبهٔ تابع تبدیل سیستم هدایت و کنترل است. البته در ادامه، ثابت زمانی‌های اجزای سیستم هدایت و کنترل برابر با $T_a = T/\mathrm{n}$ فرض شده است. از طرفی، تابع تبدیل تأخیر زمانی خالص به‌صورت حدی قابل تعریف است [۲۶]:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{T}{\mathrm{n}}s\right)^{\mathrm{n}}}\right] = e^{-T_d s} \qquad (۳)$$

بنابراین، تابع تبدیل سیستم هدایت و کنترل از نرخ چرخش خط دید به شتاب جانبی، تشکیل یک تابع تبدیل دوجمله‌ای از مرتبهٔ n می‌دهد که در منابع برای بررسی مطالعهٔ پارامتری اثر ثابت زمانی و مرتبه سیستم به‌کار می‌رود [۱۳]. به‌منظور اعمال روش الحاقی (شکل ۳۶ پیوست) عملاً کافی است جهت پیکان‌های ورودی و خروجی المان تأخیر زمانی خالص برعکس شود. این موضوع در پیوست الف مرجع [۲۳] نشان داده و صحه‌گذاری شده است. در ادامه، با اعمال روش الحاقی به نمودار بلوکی شکل ۳۶ پیوست، نمودار بلوکی شکل ۲ حاصل می‌شود. سپس روابط حاکم از نمودار استخراج و بی‌بعد شده و نتایج حل عددی ترسیم و با برازش منحنی روابط تقریبی فاصلهٔ خطا ارائه شده‌است.

۳. اثر تأخیر زمانی خالص در فاصلهٔ خطای هدایت تناسبی

همان‌گونه که اشاره شد، در مرجع [۲۳] مدل سادهٔ دوجمله‌ای سیستم هدایت و کنترل تا مرتبهٔ ۳۰ بررسی و نمایش داده شده است که در حالت حدی، تابع تبدیل سیستم کنترل با مرتبهٔ

بی‌نهایت، عملاً به تأخیر زمانی خالص تبدیل می‌شود؛ اما تأثیر توأمان تأخیر زمانی خالص و تابع تبدیل دوجمله‌ای بررسی نشده است. همچنین در مرجع مذکور، ضریب ناوبری اکسترممی (N_S') معرفی شده که به ازای آن حداکثر فاصلهٔ خطا برای سیستم هدایت و کنترل دوجمله‌ای حداقل می‌شود. در ادامه، مطالعهٔ تأثیر تأخیر زمانی خالص، به‌ویژه در بدترین شرایط در سیستم هدایت و کنترل دوجمله‌ای (تا مرتبهٔ ۳۰)، با حل عددی معادلات الحاقی بی‌بعد انجام می‌شود. اعمال تأخیر زمانی خالص سبب افزایش (مقدار حداکثر) فاصلهٔ خطا می‌شود.

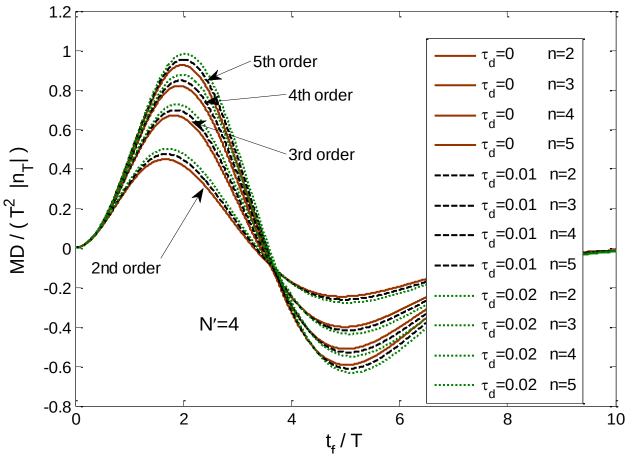
همان‌گونه که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، با افزایش تأخیر زمانی خالص، حداکثر فاصلهٔ خطای بی‌بعد ناشی از مانور ثابت هدف افزایش می‌یابد که در آن $\tau_d = T_d/T$ پارامتر بی‌بعد تأخیر زمانی خالص است. این افزایش فاصلهٔ خطا به ازای هدف با مانورهای خطی و سهموی نیز وجود دارد. برای مطالعهٔ دقیق‌تر، مقدار حداکثر فاصلهٔ خطای بی‌بعد در شکل ۴ برحسب مرتبهٔ سیستم به ازای تأخیر زمانی‌های مختلف ترسیم شده است. با توجه به این شکل به‌نظر می‌رسد مقدار فاصلهٔ خطا با افزایش مرتبهٔ سیستم به حد مجانبی نزدیک می‌شود و حداکثر فاصلهٔ خطا به ازای تأخیر زمانی‌های مختلف رفتار مشابهی دارند.

در شکل ۵ حداکثر فاصلهٔ خطای بی‌بعد برحسب زمان بی‌بعد ناشی از مانور ثابت هدف به ازای $N' = 4$ و تا مرتبهٔ ۳۰ نمایش داده شده است. نمودارهای این شکل به ازای تأخیر زمانی‌های صفر تا یک ترسیم شده است. همان‌گونه که در این شکل مشاهده می‌شود، نقطهٔ صفر ابتدای نمودارها در گوشهٔ پایین و سمت چپ آنها و همچنین گوشهٔ بالا و سمت راست شکل به ازای تأخیر زمانی بی‌بعد یک است. نکتهٔ حائز اهمیت که در این شکل به‌وضوح ملاحظه می‌شود این است که زمان رخداد حداکثر فاصلهٔ خطا با افزایش τ_d به تأخیر می‌افتد. تحلیل فوق به ازای هدف با مانور خطی و سهمی به ازای $N' = 4$ و تا مرتبهٔ ۳۰ در شکل‌های ۶ و ۷ آمده است.

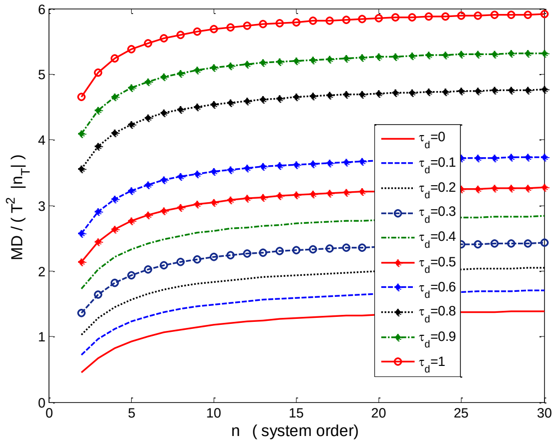
همان‌گونه که از مقایسهٔ شکل‌های ۵ تا ۷ ملاحظه می‌شود، با تغییر مرتبهٔ پروفیل مانور هدف از مقدار ثابت به پروفیل خطی و از خطی به پروفیل سهمی، درجهٔ نمودار حداکثر فاصله خطا (انحنای نمودارها) افزایش می‌یابد. این موضوع سبب افزایش در تأخیر وقوع زمان حداکثر فاصلهٔ خطا می‌شود. چنانچه تحلیل مذکور تنها به ازای خطای سمت اولیه صورت پذیرد، نتایج به‌صورت شکل ۸ و ۹ حاصل می‌شود $(N' = 4, 5)$. گفتنی است در حالت اعمال خطای سمت اولیه یا هدف با مانور ثابت و خطی به ازای ضرایب ناوبری مؤثر ۳، ۳/۵، ۴، ۴/۵، ۵، ۵/۵ و ۶ و برای هدف با مانور سهموی به ازای $4 \leq N' \leq 6$ نتایج مذکور، بررسی و رفتار تقریباً مشابهی مشاهده شده است. همان‌گونه که اشاره شد، ضریب ناوبری اکسترممی (N_S') وجود دارد که حداکثر فاصلهٔ خطا به ازای آن حداقل می‌شود [۲۳].

به‌طور نمونه در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود که مقادیر حداکثر فاصلهٔ خطا در یک ضریب ناوبری مشخص کمینه می‌شود. به‌عبارت دیگر در یک ضریب ناوبری معین (N_S') فاصلهٔ خطا در بدترین شرایط هندسهٔ درگیری کاهش می‌یابد. اهمیت این موضوع آنجاست که به ازای ضریب ناوبری بزرگتر از این مقدار، حداکثر فاصلهٔ خطا نه‌تنها کاهش، که افزایش می‌یابد. البته در شکل ۱۰ نتایج به ازای سیستم با مرتبهٔ پنج نمایش داده شده است.

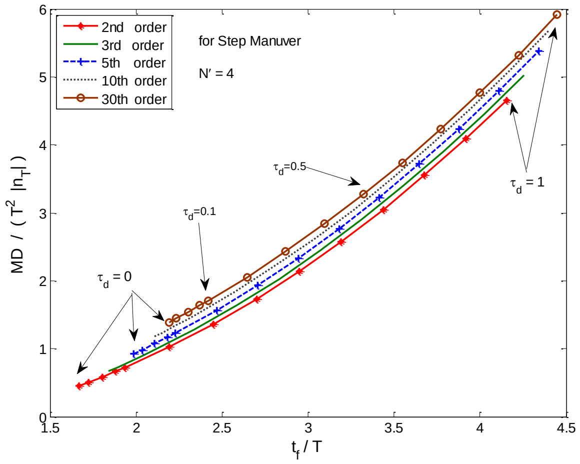
در ادامه، مقادیر اکسترمم به ازای سیستم با مراتب مختلف در شکل‌های ۱۱ تا ۱۴ برای هدف با مانور ثابت، خطای سمت اولیه، هدف با مانور خطی و هدف با مانور سهمی نمایش داده شده است. همان‌گونه که در این شکل‌ها مشاهده می‌شود، با افزایش مرتبهٔ سیستم و افزایش مقدار تأخیر زمانی خالص بی‌بعد، مقدار N_S' کاهش می‌یابد و به مقدار حدی نزدیک می‌شود. به‌طور نمونه با توجه به شکل ۱۱ برای سیستم با مرتبهٔ بزرگتر از ۵ در حالت هدف با مانور ثابت، مقدار ضریب ناوبری اکسترمم به مقدار ۴/۴۵ نزدیک می‌شود و مقدار آن برای سیستم با مرتبهٔ بزرگتر از ۲۰ به حالت حدی می‌رسد. به‌همین ترتیب با توجه به شکل‌های ۱۲ تا ۱۴ مقدار N_S' به ازای خطای سمت اولیه به مقدار ۳/۵ و برای مانور خطی به ۵/۳۵ و برای مانور سهمی به ۶/۳ نزدیک می‌شود. با توجه به شکل‌های مذکور، به ازای مراتب بزرگتر از ۱۰ تا ۲۰، در حالت خطای سمت اولیه، هدف با مانور ثابت، خطی و سهمی، (حداقل) در محدودهٔ مفروض، N_S' عملاً به مقدار حدی می‌رسد. البته N_S' به ازای سیستم با مرتبهٔ بزرگتر از ۵، با تقریب قابل قبول، مستقل از مرتبهٔ سیستم و مقدار تأخیر زمانی خالص سیستم می‌شود. همچنین مقادیر حداکثر فاصلهٔ خطا، متناظر با ضریب ناوبری مؤثر اکسترمم به ازای مرتبه‌های مختلف سیستم و مقادیر مختلف تأخیر زمانی خالص در شکل‌های ۱۱ تا ۱۴ ترسیم شده است.



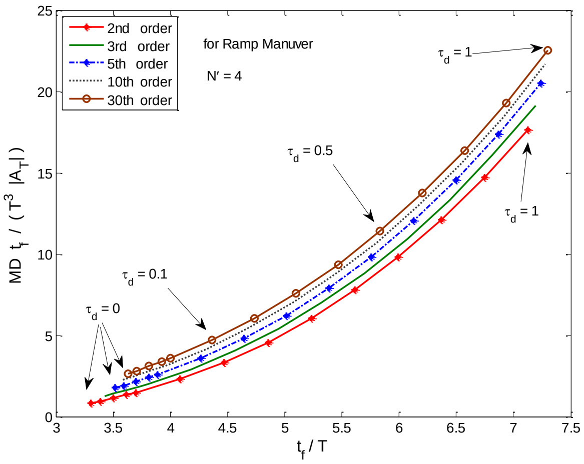
شکل ۳. فاصلهٔ خطای بی‌بعد ناشی از مانور ثابت هدف
در حضور تأخیر زمانی خالص $(N' = 4)$



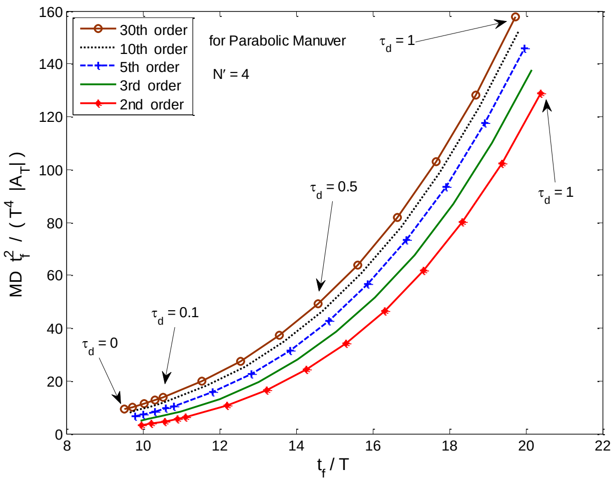
شکل ۴. مقادیر حداکثر فاصله خطای بی‌بعد برحسب مرتبهٔ سیستم
ناشی از مانور ثابت هدف در حضور تأخیر زمانی خالص $(N' = 4)$



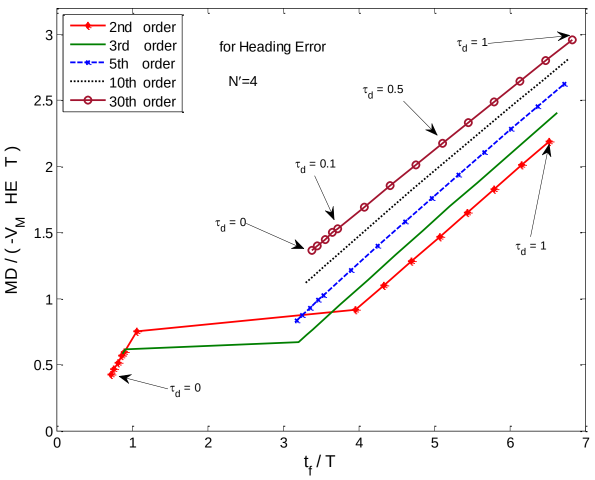
شکل ۵. مقادیر حداکثر فاصلهٔ خطای بی‌بعد برحسب زمان بی‌بعد
ناشی از مانور ثابت هدف در حضور تأخیر زمانی خالص $(N' = 4)$



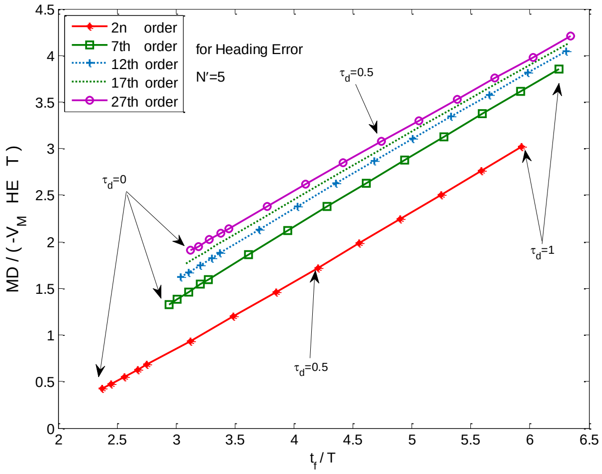
شکل ۶. مقادیر حداکثر فاصلهٔ خطای بی‌بعد برحسب زمان بی‌بعد
ناشی از مانور خطی هدف $(N' = 4)$



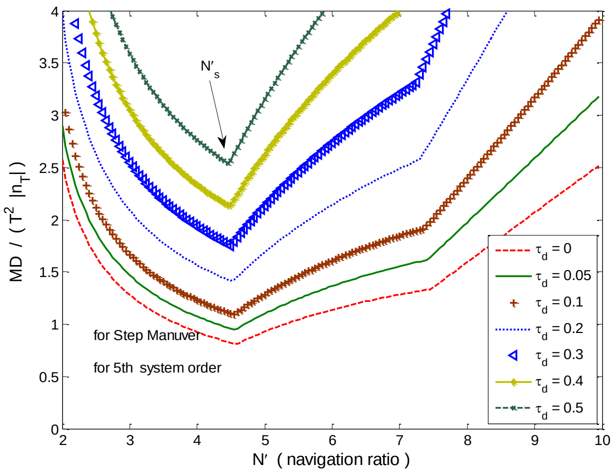
شکل ۷. مقادیر حداکثر فاصهٔ خطای بی‌بعد برحسب زمان بی‌بعد
ناشی از مانور سهمی هدف $(N' = 4)$



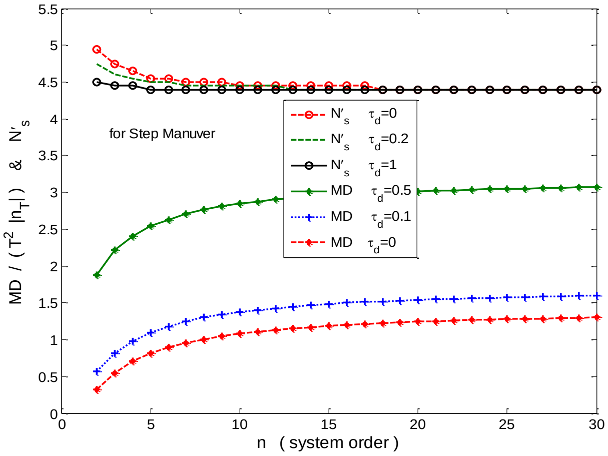
شکل ۸ مقادیر حداکثر فاصلهٔ خطای بی‌بعد برحسب زمان بی‌بعد
ناشی از خطای سمت اولیه $(N' = 4)$



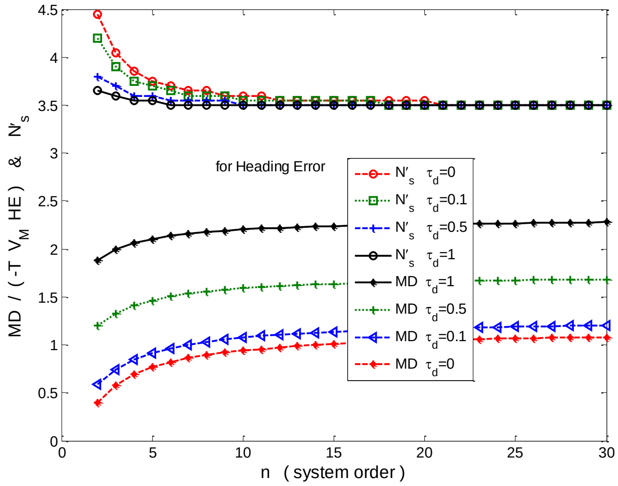
شکل ۹. مقادیر حداکثر فاصلهٔ خطای بی‌بعد برحسب زمان بی‌بعد ناشی از خطای سمت اولیه $(N' = 5)$



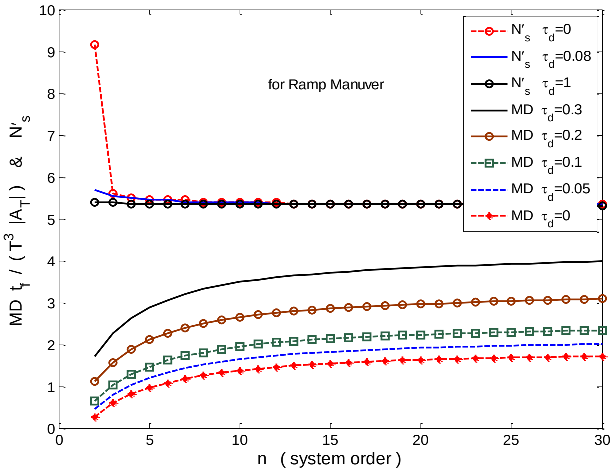
شکل ۱۰. مقادیر حداکثر فاصلهٔ خطای بی‌بعد برحسب ضریب ناوبری مؤثر ناشی از مانور ثابت هدف در حضور تأخیر زمانی خالص (n= 5)



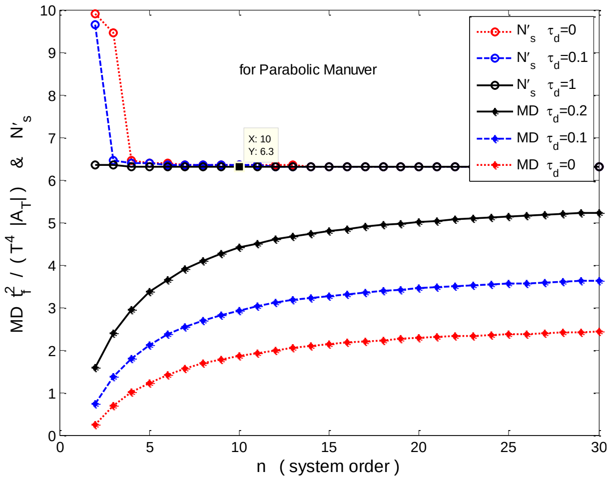
شکل ۱۱. مقادیر ضریب ناوبری اکسترمم و حداکثر فاصله خطای بی‌بعد متناظر برحسب مرتبهٔ سیستم ناشی از مانور ثابت هدف



شکل ۱۲. مقادیر ضریب ناوبری اکسترمم و حداکثر فاصله خطای بی‌بعد متناظر برحسب مرتبهٔ سیستم ناشی از خطای سمت اولیه



شکل ۱۳. مقادیر ضریب ناوبری اکسترمم و حداکثر فاصله خطای بی‌بعد متناظر برحسب مرتبهٔ سیستم ناشی از مانور خطی هدف



شکل ۱۴. مقادیر ضریب ناوبری اکسترمم و حداکثر فاصله خطای بی‌بعد متناظر برحسب مرتبه سیستم ناشی از مانور سهمی هدف

٤. روابط تقریبی فاصلهٔ خطا در نقاط اکسترمم

همان‌گونه که اشاره شد، N_s' ضریب ناوبری مؤثر اکسترممی است که به ازای آن حداکثر فاصلهٔ خطا (در بدترین زمان نهایی) حداقل مقدار را خواهد داشت. این موضوع به‌طور نمونه در شکل ۱۰ به‌وضوح مشاهده می‌شود. همچنین در مطالعهٔ حاضر نشان داده شد که مقدار N_s' با افزایش مرتبهٔ سیستم در حضور تأخیر زمانی خالص، به مقدار حدی نزدیک می‌شود (شکل‌های ۱۱ تا ۱۴) و برای مرتبه‌های ۵ تا ۳۰، شیب رفتار N_s' نسبت به مرتبهٔ سیستم به ازای تأخیر زمانی خالص در بازهٔ $0 \le \tau_d \le 1$ بسیار کم می‌باشد. بنابراین می‌توان آن را تقریباً مستقل از مرتبه و مقدار تأخیر زمانی خالص در نظر گرفت. به‌عبارت دیگر، مقدار فاصلهٔ خطای محاسبه‌شده به ازای N_s'، حداقل فاصلهٔ خطا در بدترین زمان نهایی می‌باشد (شکل ۱۰) که تخمین آن برای طراح سیستم هدایت حائز اهمیت است. لذا در ادامه، روابط تقریبی محاسبه فاصلهٔ خطا برحسب تأخیر زمانی خالص و مرتبهٔ سیستم به ازای مقدار معین برای N_s' استخراج می‌شود. برای این منظور، نمودارهای فاصلهٔ خطا برحسب تأخیر زمانی بی‌بعد و مرتبهٔ سیستم در شکل‌های ۱۵ تا ۲۲ ترسیم و با برازش منحنی روابط تقریبی حاصل شده‌است. در شکل ۱۵، حداکثر فاصلهٔ خطای بی‌بعد ناشی از خطای سمت اولیه برحسب تأخیر زمانی خالص بی‌بعد به ازای ضریب ناوبری مؤثر اکسترمم ۳٫۵ نشان داده شده است. همان‌گونه که قبلاً توضیح داده شد، به ازای $n \ge 5$ مقدار ضریب ناوبری مؤثر اکسترمم تقریباً مستقل از تأخیر زمانی بی‌بعد و مرتبهٔ سیستم است که در این حالت $N_s' = 3.5$ می‌شود. روابط تقریبی ۴ با برازش منحنی به ازای مرتبهٔ سیستم بین ۵ تا ۱۵ و رابطهٔ ۵ برای مرتبهٔ سیستم بین ۱۵ تا ۳۰ حاصل شده‌است.

$$\left.\widehat{\mathrm{MD}}^{\mathrm{Worst\,C.}}_{\mathrm{Min.}\ \acute{N}_s=3.5}\right|_{\mathrm{HE}} = (-0.008\mathrm{n}+1.34)\tau_\mathrm{d} + 0.02\mathrm{n} + 0.74 \tag{۴}$$

$$\left.\widehat{\mathrm{MD}}^{\mathrm{Worst\,C.}}_{\mathrm{Min.}\ \acute{N}_s=3.5}\right|_{\mathrm{HE}} = 1.208\tau_\mathrm{d} + 1.063 \tag{۵}$$

در روابط فوق $\widehat{\mathrm{MD}} = \mathrm{MD}/(-\mathrm{TV_m HE})$ است و دقت روابط تقریبی حاصل در شکل ۱۶ مشاهده می‌شود. در ادامه با استفاده از روش مذکور و مطابق شکل ۱۷، روابط تقریبی فاصلهٔ خطای ناشی از مانور ثابت هدف (در بدترین زمان نهایی) استخراج می‌شود. ضریب ناوبری مؤثر اکسترمم در حالت هدف با مانور ثابت و به ازای n> 5 برابر با $N_s' = 4.45$ می‌باشد. لذا با برازش منحنی، تقریب فاصلهٔ خطای مذکور به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\left.\widehat{\mathrm{MD}}^{\mathrm{Worst\,C.}}_{\mathrm{Min.}\ \acute{N}_s=4.45}\right|_{\mathrm{step\ \ M.}} = \mathrm{a(n)}\tau_\mathrm{d}^2 + \mathrm{b(n)}\tau_\mathrm{d} + \mathrm{c(n)} \tag{۶}$$

$$\mathrm{a(n)} = -17\times10^{-4}\mathrm{n} + 1.5 \tag{۷}$$

$$\mathrm{b(n)} = 69\times10^{-4}\mathrm{n} + 2.7 \tag{۸}$$

$$\mathrm{c(n)} = 85\times10^{-7}\mathrm{n}^4 + 66\times10^{-5}\mathrm{n}^3 - 0.019\mathrm{n}^2 + 0.247\mathrm{n} - 0.054 \tag{۹}$$

رابطهٔ حاصل با کمی اغماض در دقت (به ازای $\mathrm{n} < 6$) به‌صورت زیر ساده می‌شود.

$$\left.\widehat{\mathrm{MD}}^{\mathrm{Worst\,C.}}_{\mathrm{Min.}\ \acute{N}_s=4.45}\right|_{\mathrm{step\ \ M.}} = 1.5\tau_\mathrm{d}^2 + 2.7\tau_\mathrm{d} + \mathrm{c} \tag{۱۰}$$

$$\mathrm{c} = \begin{cases} 0.029\mathrm{n} + 0.77 & 5 \le \mathrm{n} \le 15 \\ 0.007\mathrm{n} + 1.2 & 15 < \mathrm{n} \le 30 \end{cases} \tag{۱۱}$$

دقت رابطهٔ ۶ در شکل ۱۸ و رابطهٔ ۱۰ در شکل ۱۹ نشان داده شده است. به روش مذکور و با توجه به شکل ۲۰ روابط تقریبی حداکثر فاصله خطای بی‌بعد ناشی از مانور خطی هدف (بدترین شرایط زمان نهایی) به ازای ضریب ناوبری مؤثر متناظر ۵٫۳۵ و تا مرتبه ۳۰ مستقل از مرتبهٔ سیستم استخراج شده است.

$$\left.\widehat{\mathrm{MD}}^{\mathrm{Worst\,C.}}_{\mathrm{Min.}\ \acute{N}_s=5.35}\right|_{\mathrm{ramp\ \ M.}} = 8.65\tau_\mathrm{d}^2 + 4.33\tau_\mathrm{d} + 1.66 \tag{۱۲}$$

که در آن $\widehat{\mathrm{MD}} = \mathrm{MD}\ t_f/(T^3|A_T|)$ و دقت انطباق آن با حل عددی در شکل ۲۱ نمایش داده شده است. به‌منظور افزایش دقت می‌توان ضرایب رابطهٔ درجه دوم فوق را با توابعی از n جایگزین کرد.

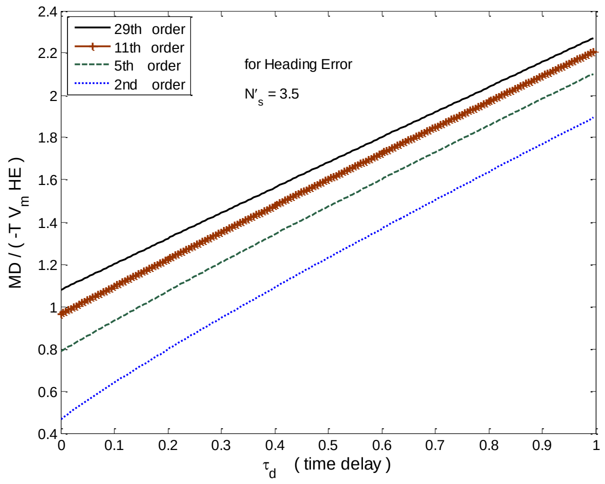
$$\left.\widehat{\mathrm{MD}}^{\mathrm{Worst\,C.}}_{\mathrm{Min.}\ \acute{N}_s=5.35}\right|_{\mathrm{ramp\ \ M.}} = \mathrm{a(n)}\tau_\mathrm{d}^2 + \mathrm{b(n)}\tau_\mathrm{d} + \mathrm{c(n)} \tag{۱۳}$$

$$\mathrm{a(n)} = 0.4\times10^{-4}\mathrm{n}^3 - 2.8\times10^{-3}\mathrm{n}^2 + 6.7\times10^{-2}\mathrm{n} + 8.18 \tag{۱۴}$$

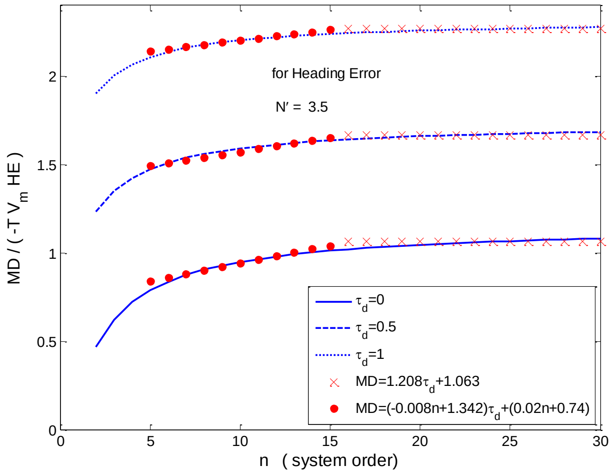
$$\mathrm{b(n)} = -1.1\times10^{-3}\mathrm{n}^2 + 6.1\times10^{-2}\mathrm{n} + 3.7 \tag{۱۵}$$

$$\mathrm{c(n)} = -1.2\times10^{-3}\mathrm{n}^2 + 5.2\times10^{-2}\mathrm{n} + 1.2 \tag{۱۶}$$

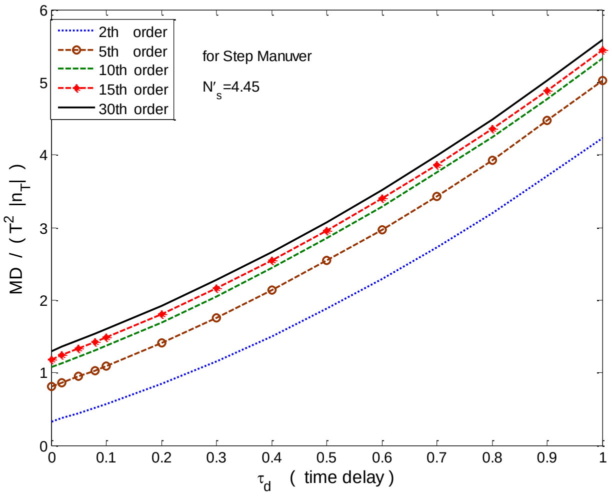
دقت انطباق رابطهٔ اخیر نیز در شکل ۲۱ مشاهده می‌شود. با توجه به این شکل، برای مرتبهٔ بزرگتر از ۱۰ انطباق مناسبی دارد. رفتار فاصلهٔ خطا به ازای هدف با مانور سهمی در شکل ۲۲ ملاحظه می‌شود. در صورت نیاز، رابطهٔ تقریبی فاصلهٔ خطا با برازش منحنی قابل استخراج است.



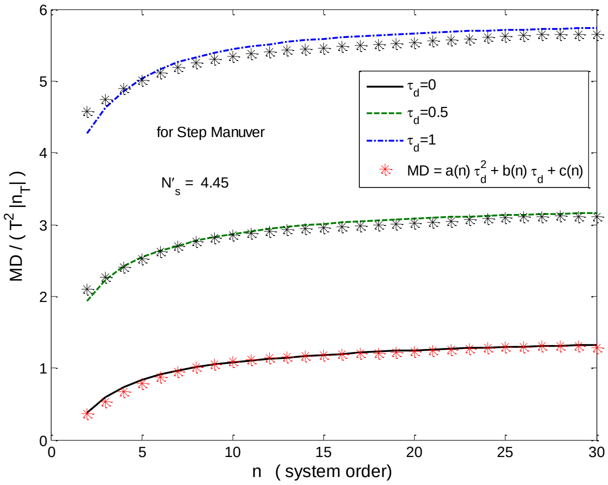
شکل ۱۵. مقادیر فاصلهٔ خطای بی‌بعد برحسب تأخیر زمانی
خالص بی‌بعد سیستم ناشی از خطای سمت اولیه $(N_s' = 3.5)$



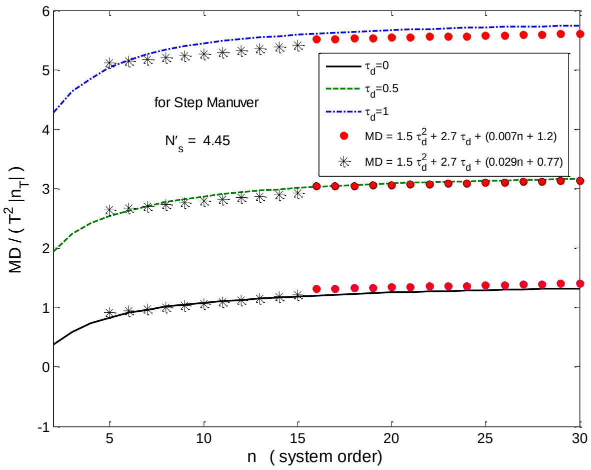
شکل ۱۶. دقت روابط تقریبی متناظر با $N_s' = 3.5$
ناشی از خطای سمت اولیه



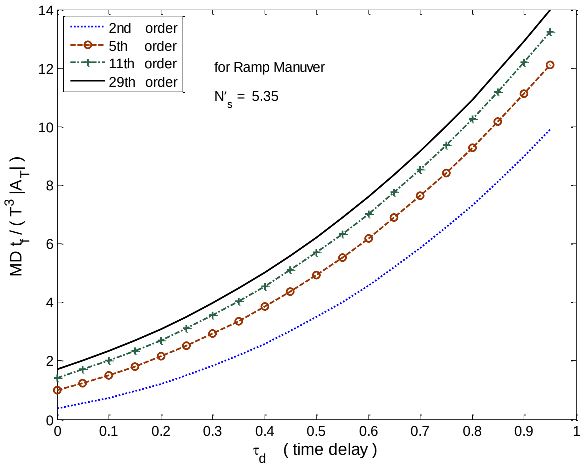
شکل ۱۷. مقادیر فاصلهٔ خطای بی‌بعد برحسب تأخیر زمانی
خالص بی‌بعد ناشی از مانور ثابت هدف $(N_s' = 4.45)$



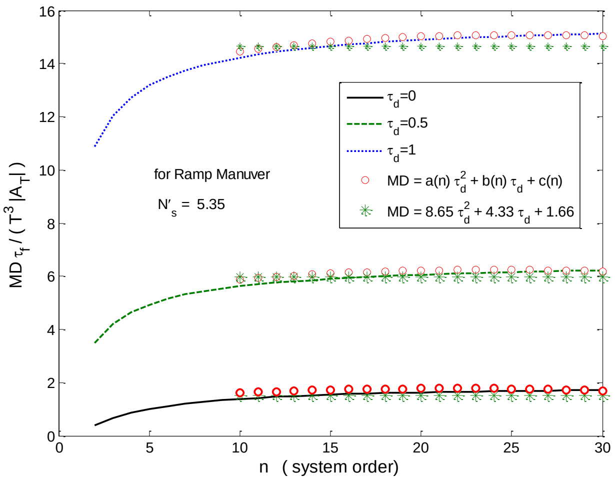
شکل ۱۸. دقت روابط تقریبی ۶ متناظر
با $N_s' = 4.45$ ناشی از مانور ثابت هدف



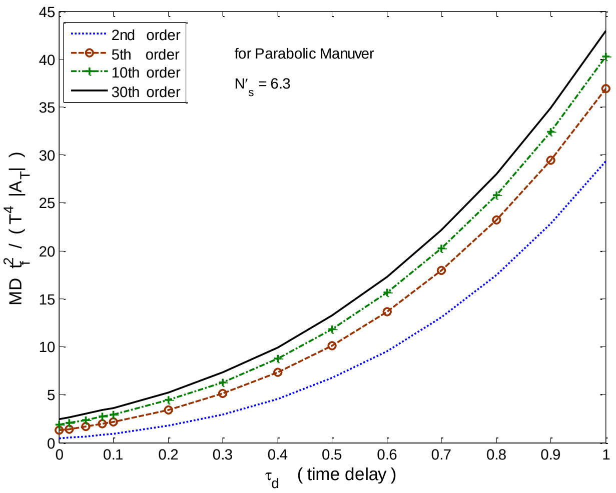
شکل ۱۹. دقت روابط تقریبی ۱۰ متناظر
با $N_s' = 4.45$ ناشی از مانور ثابت هدف



شکل ۲۰. مقادیر فاصله خطای بی‌بعد برحسب تأخیر زمانی
خالص بی‌بعد سیستم ناشی از مانور خطی هدف $(N_s' = 5.35)$



شکل ۲۱. دقت روابط تقریبی متناظر با $N_s' = 5.35$ ناشی از مانور ثابت خطی هدف



شکل ۲۲. مقادیر فاصله خطای بی‌بعد بر حسب تأخیر زمانی خالص بی‌بعد سیستم ناشی از مانور سهمی هدف $(N_s' = 6.3)$

۵. اثر تأخیر زمانی خالص بر فاصلهٔ خطا در حضور نویز

با اعمال نویز جستجوگر از رابطهٔ ۱ در نمودار بلوکی شکل ۳۶ در پیوست و اعمال قواعد الحاقی، مدل الحاقی نمودار بلوکی هدایت تناسبی با نویز جستجوگر در حضور تأخیر زمانی خالص مطابق شکل ۲۳ حاصل شده (بدون خطای سمت اولیه و مانور هدف) و معادلات رسته یک به‌صورت زیر استخراج می‌شود.

$$\dot{x_2} = x_3 \quad (۱۷)$$

$$\dot{x_3} = y_1/v_c\, t \quad (۱۸)$$

$$\dot{x_4} = y_1 \quad (۱۹)$$

$$\dot{z_1} = (y_2 - z_1)/T_a \quad (۲۰)$$

$$\begin{cases} \text{for} \quad j = 2:1:\text{n}-1 \\ \dot{z_j} = (z_{j-1} - z_j)/T_a \\ \text{end} \end{cases} \quad (۲۱)$$

$$\dot{x_{\text{FN}}} = y_1^2 \quad (۲۲)$$

$$\dot{x_{\text{RN}}} = (y_1 v_c t/R_A)^2 \quad (۲۳)$$

$$\dot{x_{\text{RNA}}} = y_1^2\,(v_c t/R_A)^4 \quad (۲۴)$$

$$\dot{x_{\text{GL}}} = (y_1/v_c t)^2 \quad (۲۵)$$

$$y_1 = (\acute{N} v_c z_n - x_4)/T_N \quad (۲۶)$$

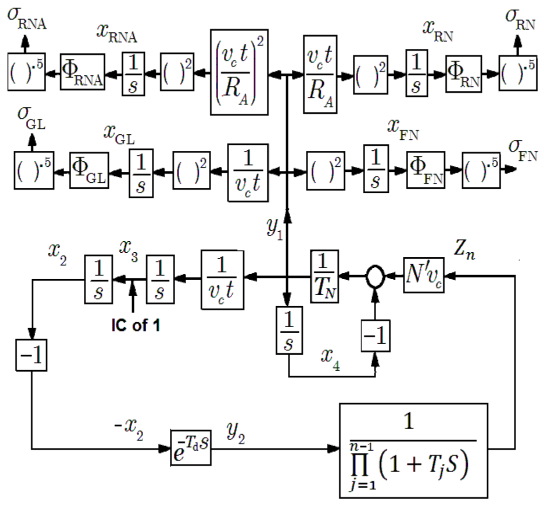
$$y_2(\text{t}) = -\begin{cases} y_2(0) & t < T_d \\ x_2(t - T_d) & t \geq T_d \end{cases} \quad (۲۷)$$

رابطهٔ فوق در حالت گسسته به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y_2(k) = -\begin{cases} y_2(0) & k < d \\ x_2(k - d) & k \geq d \end{cases} \quad (۲۸)$$

به‌طوری‌که در آن، $t = kh$ گام زمانی گسسته‌ساز، T_d تأخیر زمانی خالص و $d = T_d/h \geq 1$ عدد صحیح است. متغیرهای حالت x_{FN}، x_{RN}، x_{RNA} و x_{GL} در مدل الحاقی مربوط به نویز جستجوگر مطابق شکل ۲۳ است. در حل عددی، مقادیر اولیه متغیرهای حالت، به‌جز $x_3(0) = 1$، برابر با صفر لحاظ می‌شود. با توجه به شکل ۲۳، انحراف استاندارد فاصلهٔ خطای نهایی ناشی از نویز جستجوگر به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\sigma_j = \sqrt{\Phi_j x_j(t_f)} \qquad \text{j=GL, FN, RA, RNA} \quad (۲۹)$$



شکل ۲۳. مدل الحاقی نمودار بلوکی هدایت تناسبی با نویز جستجوگر در حضور تأخیر زمانی خالص

با استفاده از تغییر متغیرهای ۳۰ تا ۴۱ معادلات الحاقی به‌صورت زیر بی‌بعد می‌شوند:

$$\hat{x}_2 = x_2/T, \quad \hat{x}_3 = x_3, \quad \hat{x}_4 = x_4/Tv_c \quad (۳۰)$$

$$\hat{z}_{(j)} = \frac{z_{(j)}}{T}, \qquad \hat{x}_{\text{GL}} = Tx_{\text{GL}}, \quad \hat{x}_{\text{FN}} = \frac{x_{\text{FN}}}{Tv_c^2} \quad (۳۱)$$

$$\hat{x}_{\mathrm{RN}} = \frac{R_A^2}{T^3 v_c^4} x_{\mathrm{RN}}, \qquad \hat{x}_{\mathrm{RNA}} = \frac{R_A^4}{T^5 v_c^6} x_{\mathrm{RNA}} \tag{۳۲}$$

$$\hat{x}_2' = \hat{x}_3 \tag{۳۳}$$

$$\hat{x}_3' = \hat{y}_1/\tau \tag{۳۴}$$

$$\hat{x}_4' = \hat{y}_1 \tag{۳۵}$$

$$\hat{z}_1' = (T/T_a)/(\hat{y}_2 - \hat{z}_1) \tag{۳۶}$$

$$\begin{cases} \text{for} \quad j = 2:1:\mathrm{n}-1 \\ \quad \hat{z}_j' = \dfrac{T}{T_a}(\hat{z}_{j-1} - \hat{z}_j) \\ \text{end} \end{cases} \tag{۳۷}$$

$$\hat{x}_{\mathrm{FN}}' = \hat{y}_1^2 \tag{۳۸}$$

$$\hat{x}_{\mathrm{RN}}' = \hat{y}_1^2 \tau^2 \tag{۳۹}$$

$$\hat{x}_{\mathrm{RNA}}' = \hat{y}_1^2 \tau^4 \tag{۴۰}$$

$$\hat{x}_{\mathrm{GL}}' = \hat{y}_1^2/\tau^2 \tag{۴۱}$$

$$\hat{y}_1 = T\,(\acute{N}\hat{z}_{\mathrm{n}} - \hat{x}_4)/T_N \tag{۴۲}$$

$$\hat{y}_2(k) = -\begin{cases} \hat{y}_2(0) & k < \hat{d} \\ \hat{x}_2(k-\hat{d}) & k \geq \hat{d} \end{cases} \tag{۴۳}$$

و مشتق نسبت به $\tau = t/T$ با $()'$ نشان داده شده است.

در نتیجه، ضرایب بی‌بعد K از روابط زیر محاسبه می‌شود [۲۳]:

$$K_{\mathrm{GL}}(\tau_f) = \frac{\sigma_{\mathrm{GL}}}{\sqrt{\Phi_{\mathrm{GL}}/T}} = \sqrt{\hat{x}_{\mathrm{GL}}(\tau_f)} \tag{۴۴}$$

$$K_{\mathrm{FN}}(\tau_f) = \frac{\sigma_{\mathrm{FN}}}{v_c\sqrt{T\Phi_{\mathrm{FN}}}} = \sqrt{\hat{x}_{\mathrm{FN}}(\tau_f)} \tag{۴۵}$$

$$K_{\mathrm{RN}}(\tau_f) = \frac{R_{\mathrm{A}}\sigma_{\mathrm{RN}}}{\Phi_{\mathrm{RN}}^{0.5} T^{1.5} v_c^2} = \sqrt{\hat{x}_{\mathrm{RN}}(\tau_f)} \tag{۴۶}$$

$$K_{\mathrm{RNA}}(\tau_f) = \frac{R_{\mathrm{A}}^2\sigma_{\mathrm{RNA}}}{\Phi_{\mathrm{RNA}}^{0.5} T^{2.5} v_c^3} = \sqrt{\hat{x}_{\mathrm{RNA}}(\tau_f)} \tag{۴۷}$$

به‌طوری‌که در آن $\tau_f = t_f/T$ است. ضرایب بی‌بعد K عبارت است از ضریب بی‌بعد خطای ناشی از نویز تابش (K_{GL})، ضریب بی‌بعد خطای ناشی از نویز مستقل از فاصله (K_{FN})، ضریب بی‌بعد خطای ناشی از نویز وابسته به فاصلهٔ سیستم نیمه‌فعال (K_{RN}) و ضریب بی‌بعد خطای ناشی از نویز وابسته به فاصلهٔ سیستم فعال (K_{RNA}) با افزایش مرتبهٔ سیستم، ضرایب بی‌بعد مذکور در حالت پایا (زمان بی‌نهایت) افزایش می‌یابد [۲۳]. این ضرایب بی‌بعد با استفاده از روابط ۴۴ تا ۴۷ در زمان بینهایت محاسبه می‌شود. این مقادیر در حالت حدی به مقادیر پایا میل می‌کند. مقادیر حدی این ضرایب (هنگامی که مرتبهٔ سیستم بی‌نهایت و $\tau_d = 0$ باشد)، به ازای ضریب ناوبری مؤثر ۳ برحسب زمان بی‌بعد در پیوست مرجع [۲۳] ذکر شده است. در ادامه به تحلیل فاصلهٔ خطا در حضور نویز جستجوگر به ازای سیستم‌های هدایت و کنترل تا مرتبه ۳۰ در حضور تأخیر زمانی خالص پرداخته شده است. در شکل‌های ۲۴ تا ۲۷ به‌ترتیب نتایج حل عددی ضریب بی‌بعد خطای ناشی از نویز تابش (K_{GL})، ضریب بی‌بعد خطای ناشی از نویز مستقل از فاصله (K_{FN})، ضریب بی‌بعد خطای ناشی از نویز وابسته به فاصلهٔ سیستم نیمه‌فعال (K_{RN}) و ضریب بی‌بعد خطای ناشی از نویز وابسته به فاصله سیستم فعال (K_{RNA}) در حضور تأخیر زمانی خالص بی‌بعد به ازای ضریب ناوبری مؤثر ۳/۵ و مرتبه‌های مختلف ترسیم شده است. با توجه به شکل‌های مذکور، مقادیر K به‌جز K_{GL} با افزایش مرتبهٔ سیستم و افزایش مقدار تأخیر زمانی خالص افزایش می‌یابد. اما با توجه به شکل ۲۴ مقدار K_{GL} با افزایش تأخیر زمانی کاهش می‌یابد. از طرفی، با افزایش مرتبهٔ سیستم به‌طور نمونه، از مرتبهٔ ۱۰ تا ۳۰ اختلاف مقادیر K به ازای تأخیر زمانی ثابت، نسبت به مرتبه‌های پایین‌تر (کمتر از ۱۰) بسیار کاهش می‌یابد. در ضمن مقادیر عددی نمایش داده شده در شکل‌های ۲۴ تا ۲۷ به ازای $\tau_d = 0$ با مقادیر محاسبه‌شده در مرجع [۲۳] انطباق دارد. با توجه به شکل‌های ۲۴ تا ۲۷ روابط تقریبی مقادیر K قابل استخراج است. به‌طور نمونه به ازای مرتبه ۱۰ با برازش منحنی‌های مذکور روابط زیر به ازای $N' = 3.5$ حاصل می‌شود.

$$K_{\mathrm{GL}}(\infty) = -0.387\tau_d + 2.43 \tag{۴۸}$$

$$K_{\mathrm{FN}}(\infty) = 4.45\tau_d + 5.72 \tag{۴۹}$$

$$K_{\mathrm{RN}}(\infty) = 52.6\tau_d + 17.6 \tag{۵۰}$$

$$K_{\mathrm{RNA}}(\infty) = 568\tau_d + 40.8 \tag{۵۱}$$

البته تقریب خطی ۵۱ مطابق شکل ۲۷ می‌تواند با تقریب مرتبهٔ دوم به‌صورت زیر جایگزین شود:

$$K_{\mathrm{RNA}}(\infty) = 300\tau_d^2 + 270\tau_d + 89 \tag{۵۲}$$

همچنین به روش مشابه برای $N' = 4.5$ روابط زیر قابل استخراج است:

$$K_{\mathrm{GL}}(\infty) = -0.441\tau_d + 3.6 \tag{۵۳}$$

$$K_{\mathrm{FN}}(\infty) = 8.9\tau_d + 10 \tag{۵۴}$$

$$K_{\mathrm{RN}}(\infty) = 118\tau_d + 35.7 \tag{۵۵}$$

$$K_{\mathrm{RNA}}(\infty) = 1441\tau_d + 81 \tag{۵۶}$$

البته تقریب خطی ۵۶ می‌تواند با تقریب مرتبهٔ دوم به‌صورت زیر جایگزین شود:

$$K_{\mathrm{RNA}}(\infty) = 781\tau_d^2 + 668\tau_d + 207 \tag{۵۷}$$

در ادامه با توجه به روابط ۴۸ تا ۵۱ و ۵۳ تا ۵۶، با میانیابی خطی برای بازهٔ $3 \le N' \le 5$ برای سیستم مرتبهٔ ۱۰ روابط زیر حاصل می‌شود:

$$K_{\mathrm{GL}}(\infty) = (0.054N' + 0.198)\tau_d + (1.17N' - 1.67) \tag{۵۸}$$

$$K_{\mathrm{FN}}(\infty) = (4.45N' - 11)\tau_d + (4.28N' - 9.26) \tag{۵۹}$$

$$K_{\mathrm{RN}}(\infty) = (65.4N' - 176.3)\tau_d + (18N' - 45.75) \tag{۶۰}$$

$$K_{\mathrm{RNA}}(\infty) = (873N' - 2487.5)\tau_d + (40N' - 100) \tag{۶۱}$$

در شکل‌های ۲۸ تا ۳۱ دقت روابط خطی مستخرج بررسی شده‌است که نشان می‌دهد به ازای بازهٔ $3.2 \le N' \le 4.7$ دقت نسبتاً قابل قبولی دارد (به‌جز برای نویز وابسته به فاصله در سیستم فعال که بازهٔ محدودتری را پوشش می‌دهد). در ادامه به‌طور مشابه، روابط تقریبی ضرایب بی‌بعد برای سیستم مرتبهٔ پنجم به ازای $N' = 3.5$ ارائه می‌شود.

$$K_{\mathrm{GL}}(\infty) = -0.1097\tau_d + 2.08 \tag{۶۲}$$

$$K_{\mathrm{FN}}(\infty) = 5.17\tau_d + 4.28 \tag{۶۳}$$

$$K_{\mathrm{RN}}(\infty) = 52.3\tau_d + 11.5 \tag{۶۴}$$

$$K_{\mathrm{RNA}}(\infty) = 536\tau_d + 12.5 \tag{۶۵}$$

روابط اخیر به ازای $N' = 4.5$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$K_{\mathrm{GL}}(\infty) = 0.089\tau_d + 2.9 \tag{۶۶}$$

$$K_{\mathrm{FN}}(\infty) = 10.3\tau_d + 7.08 \tag{۶۷}$$

$$K_{\mathrm{RN}}(\infty) = 116\tau_d + 20.6 \tag{۶۸}$$

$$K_{\mathrm{RNA}}(\infty) = 1334\tau_d + 0.583 \tag{۶۹}$$

با توجه به روابط مستخرج اخیر، روابط تقریبی برای سیستم مرتبه پنجم به ازای بازهٔ $3 \le N' \le 5$ با میانیابی خطی به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

$$K_{\mathrm{GL}}(\infty) = (0.197N' - 0.8)\tau_d + (0.85N' - 0.895) \tag{۷۰}$$

$$K_{\mathrm{FN}}(\infty) = (5.13N' - 12.79)\tau_d + (2.8N' - 5.52) \tag{۷۱}$$

$$K_{\mathrm{RN}}(\infty) = (63.7N' - 170.65)\tau_d + (9N' - 20.3) \tag{۷۲}$$

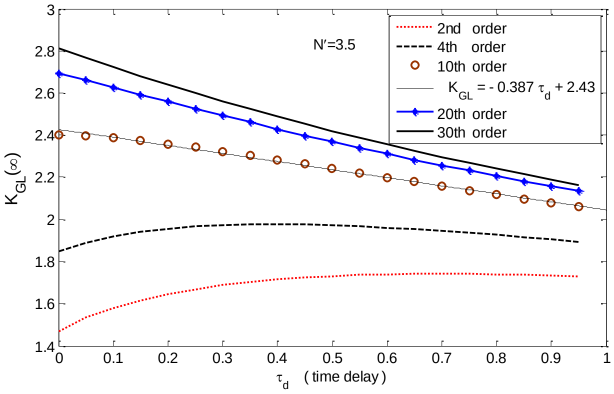
$$K_{\mathrm{RNA}}(\infty) = (798N' - 2257)\tau_d + (-11.9N' + 54) \tag{۷۳}$$

در شکل‌های ۳۲ تا ۳۵ دقت روابط خطی ۷۰ تا ۷۳ بررسی شده است که نشان می‌دهد برای سیستم با مرتبهٔ ۵ مشابه مرتبهٔ ۱۰ به ازای بازهٔ $3.2 \le N' \le 4.7$ روابط مذکور دقت نسبتاً قابل قبولی دارد (به‌جز برای نویز وابسته به فاصله در سیستم فعال که بازهٔ محدودتری را پوشش می‌دهد). در شکل‌های مذکور، مقادیر روی نمودار که با حروف x و y نشان داده شده است، با مقادیر مرجع [۱۳] همخوانی دارد. با توجه به اینکه نتایج مطالعات مقاله حاضر به‌صورت بی‌بعد ارائه شده‌است، در ادامه مثالی عددی آورده شده‌است. به‌طور نمونه برای یک سیستم هدایت و کنترل مرتبه ۵، ثابت زمانی معادل ۰٫۸ ثانیه منظور شده است. سرعت نزدیک‌شدن موشک به هدف نیز ثابت و برابر با ۴۰۰۰ فوت بر ثانیه، زمان پرواز ۶ ثانیه و مانور هدف ۵ g فرض شده است. ضریب ناوبری مؤثر هدایت تناسبی نیز مقدار ۴ انتخاب شده است. مقادیر فاصلهٔ خطا ناشی از مانور ثابت هدف و نویزهای تابش، مستقل از فاصله و وابسته به فاصله برای سیستم نیمه‌فعال در جدول ۱ نشان داده شده است. مقادیر فاصلهٔ خطا ناشی از مانور هدف در جدول ۱ به‌صورت قدر مطلق و مقادیر فاصلهٔ خطا ناشی از نویزها به‌صورت ریشه میانگین مربعات می‌باشد. در مثال فوق برای اینکه مقادیر حاصل با مرجع [۲۷] قابل مقایسه باشد، از سیستم انگلیسی استفاده شده است.

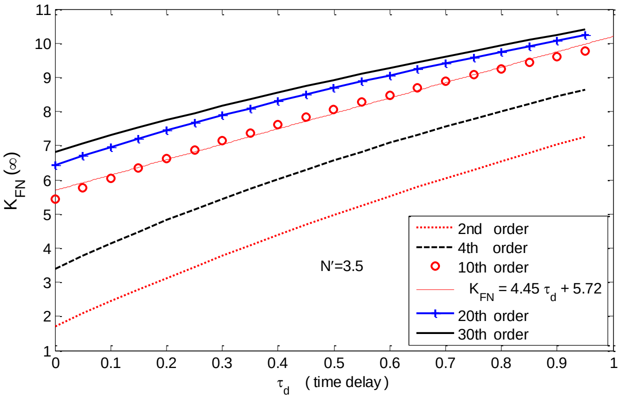
جدول ۱. بودجهٔ خطا برای سیستم مرتبهٔ ۵ ($N' = 4$)

عامل خطا	فاصلهٔ خطا (فوت)	
	$T_d = 0$	$T_d = 0.15$
مانور هدف	۱۷٫۶	۳۰
نویز تابش	۸٫۳	۸٫۸
نویز مستقل از فاصله	۲٫۶	۳٫۶
نویز وابسته به فاصله	۷٫۴e−۱۵	۱۲٫۷e−۱۵

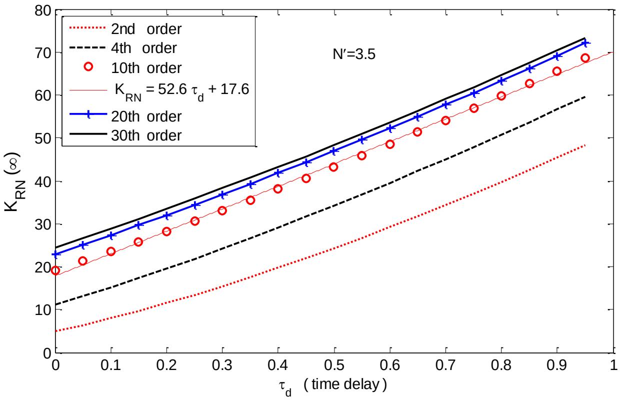
در ادامه، مثال مذکور و تحت شرایط مفروض (به ازای تأخیر زمانی خالص ۰٫۱۵ ثانیه)، ریشهٔ میانگین مربعات نویزها و سیگنال‌ها آورده شده است. ریشهٔ میانگین مربعات سیگنال زاویهٔ خطادید در حضور نویز تابش، نویز مستقل از فاصله و نویز وابسته به فاصلهٔ فیلتر شده، حدود ۰٫۱ رادیان شده است. همچنین ریشهٔ میانگین مربعات نرخ چرخش خط دید فیلتر شده (در حضور هر سه نویز مذکور) حدود ۰٫۶ رادیان می‌شود و ریشهٔ میانگین مربعات هر سه نویز فیلتر شده حدود ۰٫۰۰۵ رادیان حاصل می‌شود. گفتنی است مقادیر فوق در هر اجرا متفاوت بوده و به‌علاوه سیستم مورد بررسی ارگادیک نیست، لذا مقادیر ذکر شده تقریبی‌است.



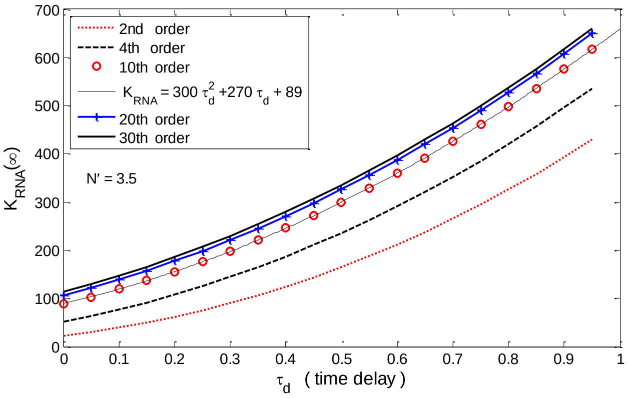
شکل ۲۴. ضرایب بی‌بعد ناشی از نویز تابش بر حسب تأخیر زمانی خالص بی‌بعد به ازای مرتبه‌های مختلف $(N' = 3.5)$



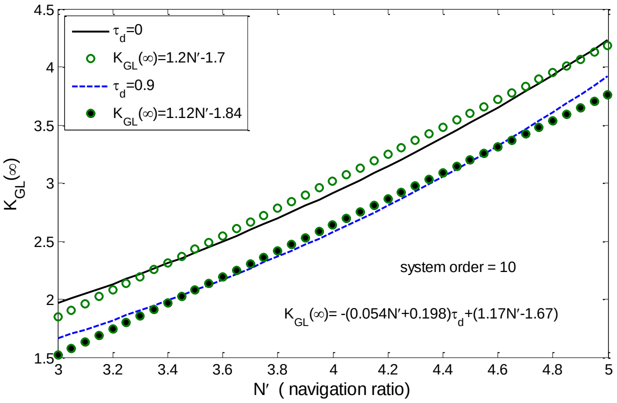
شکل ۲۵. ضرایب بی‌بعد ناشی از نویز مستقل از فاصله برحسب تأخیر زمانی خالص بی‌بعد به ازای مرتبه‌های مختلف سیستم $(N' = 3.5)$



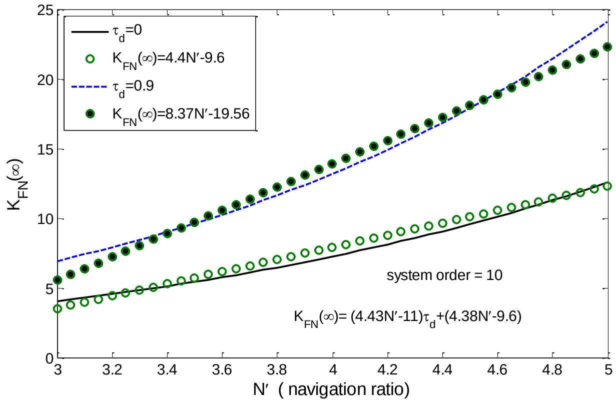
شکل ۲۶. ضرایب بی‌بعد ناشی از نویز وابسته به فاصلهٔ سیستم نیمه فعال برحسب تأخیر زمانی خالص بی‌بعد به ازای مرتبه‌های مختلف سیستم $(N' = 3.5)$



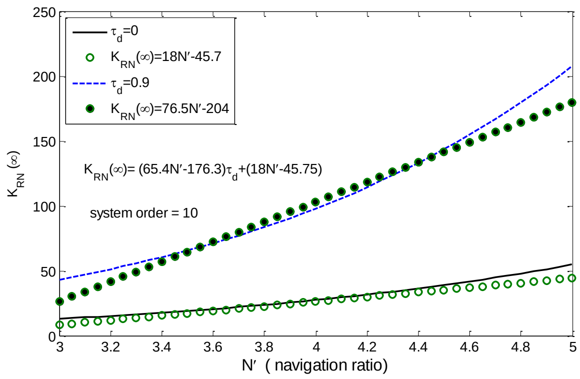
شکل ۲۷. ضرایب بی‌بعد ناشی از نویز وابسته به فاصلهٔ سیستم فعال برحسب تأخیر زمانی خالص بی‌بعد به ازای مرتبه‌های مختلف سیستم $(N' = 3.5)$



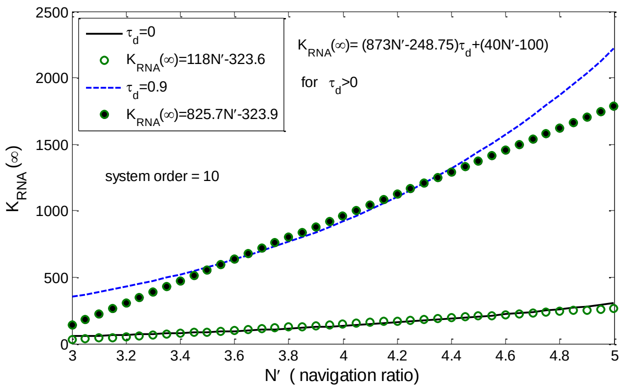
شکل ۲۸. دقت رابطه ضریب بی‌بعد ناشی از نویز تابش برحسب ضریب ناوبری مؤثر به ازای تأخیر زمانی خالص بی‌بعد $(n = 10)$



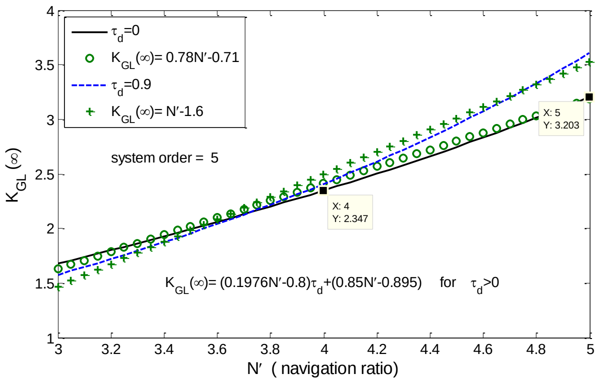
شکل ۲۹. دقت رابطه ضریب بی‌بعد ناشی از نویز مستقل از فاصله برحسب ضریب ناوبری مؤثر به ازای تأخیر زمانی خالص بی‌بعد $(n = 10)$



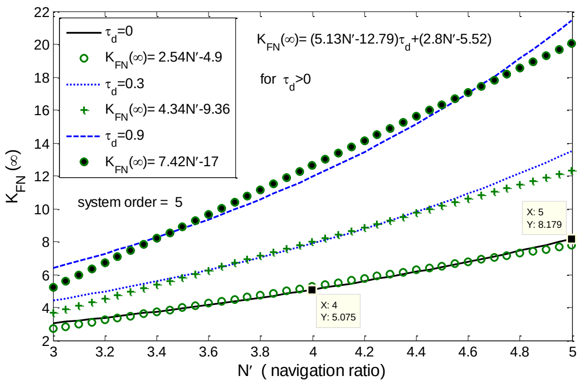
شکل ۳۰. دقت رابطهٔ ضریب بی‌بعد ناشی از نویز وابسته به فاصله سیستم نیمه‌فعال برحسب ضریب ناوبری مؤثر به ازای تأخیر زمانی خالص بی‌بعد



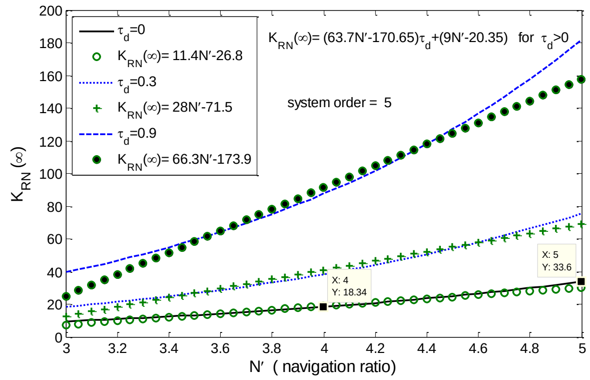
شکل ۳۱. دقت رابطهٔ ضریب بی‌بعد ناشی از نویز وابسته به فاصله سیستم فعال برحسب ضریب ناوبری مؤثر به ازای تأخیر زمانی خالص بی‌بعد $(n = 10)$



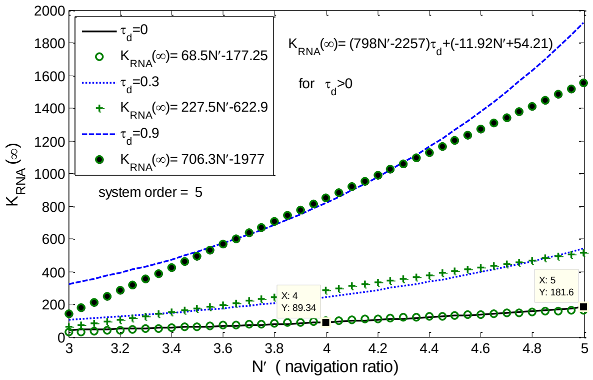
شکل ۳۲. دقت رابطه ضریب بی‌بعد ناشی از نویز تابش برحسب ضریب ناوبری مؤثر به ازای تأخیر زمانی خالص بی‌بعد $(n = 5)$



شکل ۳۳. دقت رابطه ضریب بی‌بعد ناشی از نویز مستقل از فاصله برحسب ضریب ناوبری مؤثر به ازای تأخیر زمانی خالص بی‌بعد $(n = 5)$



شکل ۳۴. دقت رابطه ضریب بی‌بعد ناشی از نویز وابسته به فاصله سیستم نیمه‌فعال برحسب ضریب ناوبری مؤثر به ازای تأخیر زمانی بی‌بعد $(n = 5)$



شکل ۳۵. دقت رابطه ضریب بی‌بعد ناشی از نویز وابسته به فاصله سیستم فعال برحسب ضریب ناوبری مؤثر به ازای تأخیر زمانی خالص بی‌بعد $(n = 5)$

۶. نتیجه‌گیری

در این تحقیق، با استفاده از روش الحاقی به تحلیل بی‌بعد فاصلهٔ خطای نهایی قانون هدایت تناسبی برای سیستم هدایت و کنترل با تابع تبدیل دوجمله‌ای به ازای مرتبه‌های مختلف سیستم (تا مرتبهٔ ۳۰) در حضور المان تأخیر زمانی خالص پرداخته شده است. بدین‌منظور، معادلات تک‌بعدی حاکم بر مسئله با اعمال تأخیر زمانی خالص به دو روش مستقیم و الحاقی به ازای انحراف سمت اولیه و مانورهای مختلف هدف (ثابت، خطی، سهمی و سینوسی)

به‌صورت بی‌بعد استخراج و حل عددی شده است. رفتار کلی نمودارهای حداکثر خطای اصابت (در بدترین زمان نهایی) ناشی از انحراف سمت و مانورهای مختلف هدف (ثابت، خطی و سهمی) به ازای تأخیر زمانی‌های بی‌بعد مختلف و ضریب ناوبری (حداقل) بزرگ‌تر از ۳ نشان می‌دهد که با افزایش مرتبه سیستم، حداکثر فاصلهٔ خطا افزایش و به مقدار مجانبی نزدیک می‌شود. به‌علاوه، زمان رخداد حداکثر فاصله خطا با افزایش τ_d به تأخیر می‌افتد. با وجود اظهارات منابع متعدد، در حالت اعمال خطای سمت اولیه یا هدف با مانور ثابت، خطی و سهموی با افزایش ضریب ناوبری مؤثر به ازای سیستم هدایت و کنترل دوجمله‌ای، در حضور تأخیر زمانی خالص، خطای نهایی همیشه کاهش (یا افزایش) نمی‌یابد؛ بلکه نمودار خطای نهایی برحسب ضریب ناوبری مؤثر، نقطهٔ کمینه‌ای دارد. ضریب ناوبری متناظر با این نقطه کمینه، ضریب ناوبری اکسترمم (N_s') نامیده شده است. در مطالعهٔ رفتار N_s' با افزایش مرتبه سیستم و به ازای تأخیر زمانی خالص معین (در محدودهٔ مفروض و پایدار) در مانورهای مختلف و در نمودارهای مورد بررسی، رفتاری مشابه رفتار مجانبی مشاهده می‌شود. به‌طور نمونه، مقدار N_s' برای سیستم‌های بزرگ‌تر از مرتبه پنج با خطای سمت اولیه و به ازای تأخیر زمانی بی‌بعد خالص، از صفر تا یک تقریباً برابر با مقدار ثابت ۳٫۵ است. در حالت هدف با مانور ثابت، مقدار N_s' برای مرتبهٔ بزرگ‌تر از پنج تقریباً ۴٫۴۵ و در حالت مانور خطی این مقدار تقریباً ۵٫۳۵ و در حالت مانور سهمی این مقدار تقریباً ۶٫۳ است. با توجه به مطالعهٔ حاضر، ضریب ناوبری اکسترمم برای سیستم‌های مرتبه بالا، تقریباً مقداری ثابت و مستقل از مرتبه سیستم و در شرایط مفروض $(0 \leq \tau_d \leq 1)$ مستقل از مقدار تأخیر زمانی خالص است. به‌عنوان مطالعات آتی پیشنهاد می‌شود مقدار ضریب ناوبری اکسترمم با تکمیل مدل سیستم (به‌طور نمونه، اعمال آثار غیرخطی نظیر شتاب اشباع)، بررسی و میزان تغییرات آن تعیین شود. در ادامه، با برازش منحنی نتایج حل عددی، روابط تقریبی برای محاسبهٔ حداکثر فاصلهٔ خطا به ازای N_s' برای خطای سمت اولیه و مانورهای مختلف هدف (خطی و سهمی) استخراج شده است. در نهایت، تحلیل مذکور و استخراج نمودارهای ضرایب بی‌بعد فاصله خطا در حضور نویز جستجوگر انجام شده است. در این‌خصوص، روابط تقریبی فاصلهٔ خطا به‌طور نمونه برای سیستم هدایت وکنترل با مرتبه ۵ و ۱۰ و در محدودهٔ $3 \leq N' \leq 5$ با برازش منحنی استخراج شده است.

پیوست: معادلات بی‌بعد روش مستقیم در حضور تأخیر زمانی خالص

معادلات حالت بر اساس نمودار بلوکی شکل ۳۶ و تابع تبدیل سیستم هدایت و کنترل مطابق رابطهٔ ۲ با فرض $T_j = T_a$ به‌صورت زیر استخراج می‌شود:

$$\dot{y} = \mathrm{v} \tag{۷۴}$$

$$\dot{\mathrm{v}} = n_T - n_L \tag{۷۵}$$

$$\dot{z_s} = (\lambda_N - z_s)/T_N \tag{۷۶}$$

$$\dot{z_1} = (a_{cd} - z_1)/T_a \tag{۷۷}$$

$$\begin{cases} \text{for} \quad j = 2:1:\mathrm{n}-1 \\ \quad \dot{z_j} = (z_{j-1} - z_j)/T_a \\ \text{end} \end{cases} \tag{۷۸}$$

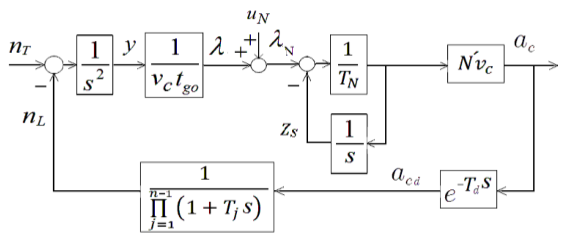
$$n_L = z_{\mathrm{n}-1} \tag{۷۹}$$

که در آن، متغیر حالت z_s نرخ چرخش خط دید پس از عبور از فیلتر مرتبه اول با ثابت زمانی T_N است.

$$\lambda_N = \mathrm{u_N} + y/v_c t_{go} \tag{۸۰}$$

$$a_c = \acute{N}\mathrm{v}_c(\lambda_N - z_s)/T_N \tag{۸۱}$$

$$a_{cd}(t) = \begin{cases} a_{cd}(0) & t < T_d \\ a_c(t - T_d) & t \geq T_d \end{cases} \tag{۸۲}$$



شکل ۳۶. نمودار بلوکی هدایت تناسبی با سیستم هدایت وکنترل مرتبهٔ n با المان تأخیر زمانی خالص

رابطهٔ فوق در حالت گسسته به‌صورت رابطهٔ ۸۳ نوشته می‌شود:

$$a_{cd}(k) = \begin{cases} a_{cd}(0) & k < d \\ a_c(k - d) & k \geq d \end{cases} \tag{۸۳}$$

که در آن، $t = kh$ گام زمانی گسسته‌سازی، T_d تأخیر زمانی خالص و $d = T_d/h \geq 1$ عدد صحیح است. در ادامه، با استفاده از تغییر متغیرهای زیر، معادلات بی‌بعد می‌شود:

$$\hat{y} = y/TV, \quad \hat{v} = v/V, \quad \tau = t/T \tag{۸۴}$$

$$\hat{n}_T = \frac{Tn_T}{V}, \qquad \hat{n}_\mathrm{L} = \frac{Tn_L}{V}, \quad \tau_f = t_f/T \tag{۸۵}$$

$$\hat{z}_s = \frac{v_c}{V} z_s, \qquad \hat{z}_\mathrm{j} = \frac{T}{V} z_j, \quad \hat{\mathrm{u}}_N = \frac{v_c}{V} \mathrm{u}_N \tag{۸۶}$$

$$\tau_d = T_d/T\,, \qquad \hat{d} = \frac{\tau_d}{\hat{h}}, \quad \hat{h} = h/T \tag{۸۷}$$

بنابراین، معادلات بی‌بعد روش مستقیم به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\hat{y}' = \hat{v} \tag{۸۸}$$

$$\hat{v}' = \hat{n}_T - \hat{n}_L \tag{۸۹}$$

$$\hat{z}_s' = T(\hat{\lambda}_N - \hat{z}_s)/T_N \tag{۹۰}$$

$$\hat{z}_1' = \mathrm{T}\,(\hat{n}_f - \hat{z}_1)/T_a \tag{۹۱}$$

$$\begin{cases} \text{for} \quad j = 2{:}\,1{:}\,\mathrm{n}-1 \\ \hat{z}_j' = T(\hat{z}_{j-1} - \hat{z}_j)/T_a \\ \text{end} \end{cases} \tag{۹۲}$$

$$\hat{n}_L = \hat{z}_{\mathrm{n}-1} \tag{۹۳}$$

$$\hat{\lambda}_N = \hat{u}_{\mathrm{N}} + \hat{y}/(\tau_f - \tau) \tag{۹۴}$$

$$\hat{a}_c = T\acute{N}(\hat{\lambda}_N - \hat{z}_s)/T_N \tag{۹۵}$$

$$\hat{a}_{cd}(k) = \begin{cases} \hat{a}_{cd}(0) & k < \hat{d} \\ \hat{a}_c(k - \hat{d}) & k \ge \hat{d} \end{cases} \tag{۹۶}$$

در این روابط، $()'$ نمایانگر مشتق نسبت به متغیر زمان بی‌بعد τ و V پارامتر بی‌بعدسازی با دیمانسیون مشابه سرعت است. مطابق مرجع [۲۳] به ازای انحراف سمت اولیه، $V = |\nu_0|$ و به ازای هدف با مانور ثابت، $V = T\,|n_T|$ لحاظ می‌شود. در حالت هدف با شتاب خطی یا اصطلاحاً شیب $(m = 1)$، شتاب سهمی $(m = 2)$ و شتاب سینوسی می‌توان نوشت [۲۳]:

$$n_T = A_T(t/t_f)^m \;\Rightarrow\; \hat{n}_T = (\tau/\tau_f)^m\,\mathrm{sgn}(A_T) \tag{۹۷}$$

$$n_T = A_T\sin(\omega t) \;\Rightarrow\; \hat{n}_T = \mathrm{sgn}(A_T)\sin(\hat{\omega} t) \tag{۹۸}$$

که در آن، A_T ثابت و با دیمانسیونی مشابه شتاب، ω سرعت زاویه‌ای مانور سینوسی و $\hat{\omega} = \omega\mathrm{T}$ است. به‌منظور صحه‌گذاری، نتایج حل عددی چهار روش مستقیم و الحاقی (با معادلات بابعد و بی‌بعد) مقایسه و انطباق نتایج آنها تأیید شده است.

۷. مآخذ

[1] S. N. Balakrishnan, A. Tsourdos, B. A. White, *Advances in Missile Guidance, Control, and Estimation*, Taylor&Francis Group, 2013.

[2] N. A. Shneydor, *Missile Guidance and Pursuit: Kinematics, Dynamics, and Control*, Horwood Series in Engineering Science, 1998.

[3] E. L. Fleeman, *Tactical Missile Design*, AIAA Education Series, 2001.

[4] A. Spencer, W. Moore, Design Trade-offs for Homing Missiles, *AIAA SDIO Annual Interceptor Technology Conference*, AIAA-92-2755, USA, 1992.

[5] S. Vathsal, A. K. Sarkar, Current Trends in Tactical Missile Guidance, *Defence Science Journal*, Vol. 55, No. 2, pp. 265-280, July 2005.

[6] C. F. Lin, *Modern Navigation, Guidance, and Control Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.

[7] S. Miwa, Radome Effect on the Miss Distance of a Radar Homing Missile, *Electronics and Communications in Japan*, Part 1, Vol. 81, No. 7, 1998.

[8] H. B. Hablani, D. W. Pearson, Miss Distance Error Analysis of Exoatmospheric Interceptors, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 27. No. 2, 2004.

[9] F. W. Neslin, P. Zarchan, A New Look at Classical versus Modern Homing Missile Guidance, *AIAA Journal of Guidance and Control*, Vol. 4, No. 1, pp. 78-85, 1981.

[10] J. Alpert, Miss Distance Analysis for Command Guided Missiles, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 11. No. 6, pp. 481-487, 1988.

[11] D. Bucco, P. Zarchan, M. Weiss, On Some Issues Concerning the Adjoint Simulation of Guidance Systems, *AIAA, Guidance, Navigation and Control Conference*, 2012.

[12] J. Alpert, Normalized Analysis of Interceptor Missiles Using the 4-State Optimal Guidance System, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 26. No. 6, pp. 838-845, 2003.

[13] P. Zarchan, *Tactical and Strategic Missile Guidance*, 6th ed., Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol. 239, AIAA, 2012.

[14] P. Zarchan, When Bad Things Happen to Good Missiles, in Proc. AIAA Guidance, Navigation, Control Conf., Washington, DC, USA, pp. 765-773, 1993.

[15] J. Shinar, T. Shima, A Game Theoretical Interceptor Guidance Law for Ballistic Missile Defence, in Proc. IEEE CDC Kobe, Japan, pp. 2780-2785, 1996.

[16] J. Shinar, T. Shima, On the Validity of Linearized Analysis in the Interception of Reentry Vehicles, in Proc. AIAA Guidance, Navigation Control, Conf., Boston, MA, USA, pp. 1050-1060, 1998.

[17] J. Shinar, T. Shima, Nonorthodox Guidance Law Development Approach for Intercepting Maneuvering Targets, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 25. No. 4, pp. 658-666, 2002.

[18] H. B. Hablani, Endgame Guidance and Relative Navigation of Strategic Interceptors with Delays, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 29. No. 1, pp. 82-94, 2006.

[19] J. Xu, K. Y. Lum, J. X. Xu, Analysis of PNG Laws with LOS Angular Rate Delay, in Proc. AIAA Guid., Navigat., Control Conf. Exhibit, pp. 1-17, 2007.

[20] K. Y. Lum, J. X. Xu, K. Abidi, J. Xu, Sliding Mode Guidance Law for Delayed LOS Rate Mesurement, in Proc. AIAA Guid., Navigat., Control Conf. Exhibit, pp. 1-11, 2008.

[21] N. Dhananjay, K. Y. Lu, J. X. Xu, Analysis of Proportional Navigation Guidance Law with Delayed Line-of-Sight Rate, presented at the 8th IEEE Int. Conf. Control Autom. (ICCA), Xiamen, China, 2010.

[22] N. Dhananjay, K. Y. Lu, J. X. Xu, Proportional Navigation with Delayed Line-of-Sight Rate, *IEEE Trans. Control Syst. Technol*., Vol. 21, No. 1, pp. 247-253, 2013.

[23] S. H. Jalali-Naini, A. Arabian-Arani, Miss Distance Analysis of Proportional Navigation for High-Order Binomial Control Systems in Presence of Noise and Target Maneuvers, *Journal of Aeronautical Engineering*, Vol. 18, No. 1, pp. 34-50, 2016 (in persian).

[24] S. H. Jalali-Naini, Noise-Induced Miss Distance Formulas of First-Order Control System under PN for Arbitrary Navigation Ratios, The 15th Int. Conf. of Iranian Aerospace Society, Tehran, Feb 2016.

[25] S. H. Jalali-Naini, Noise-Induced Miss Distance Analysis of Proportional Navigation with Acceleration Feedback for Second-Order System Using Normalized Adjoint Method, *Journal of Aeronautical Engineering*, Vol. 15, No. 2, pp. 59-73, 2014 (in persian).

[26] B. Roffel, B. Betlem, Process Dynamics and Control:Modeling for Control and Prediction, Wiley, 2006.

[27] F. W. Neslin, P. Zarchan, Miss Distance Dynamics in Homing Missiles, *AIAA Guidance and Control Conference Proceedings*, Aug. 1984, pp. 84-98.

پی‌نوشت

1. Time Delay