

تأثیر اصطکاک و لقی در یاتاقان‌های کمکی بر ارتعاشات آشوبناک یک روتور هم‌محور با یاتاقان‌های مغناطیسی فعال

رضا ابراهیمی^۱، مصطفی غیور^۲، حشمت‌اله محمدخانلو^۳

۱ دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

۲ استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ghayour@cc.iut.ac.ir

۳ استادیار، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۸/۲۴

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۹/۰۶

چکیده

در بسیاری از سیستم‌های دوار همچون موتورهای جت، برای انتقال توان بین قسمت‌های فشار بالا و فشار پایین توربین و کمپرسور از سیستم روتور هم‌محور استفاده می‌شود. در این مقاله تحلیل آشوبناک یک سیستم روتور هم‌محور تعلیق‌شده به صورت مغناطیسی در یاتاقان‌های کمکی ارائه شده است که شامل ممان‌های ژيروسکوپی دیسک‌ها و کوپلینگ هندسی قطب‌های مغناطیسی است. معادلات دیفرانسیل غیرخطی حرکت با استفاده از معادلات لاگرانژ استخراج و با روش عددی رونگ - کوتا حل شده‌اند. سپس آثار اصطکاک و لقی در یاتاقان‌های کمکی روی ارتعاشات آشوبناک سیستم روتور هم‌محور - یاتاقان مغناطیسی فعال، با استفاده از مسیرهای مداری، طیف توان، مقاطع پوانکاره، نمودارهای دوشاخگی و ماکزیمم نماهای لیاپانوف بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که با تغییر این پارامترها، دینامیک سیستم می‌تواند به طور قابل ملاحظه‌ای تحت تأثیر قرار گیرد؛ به طوری که پاسخ‌های سیستم پدیده‌های دینامیک غیرخطی متنوعی را از جمله آشوب و پرش آشکار می‌کنند. همچنین با توجه به نتایج تحلیل، برخی مقادیر آستانه‌ای را می‌توان در ارتباط با طراحی پارامترهای مناسب برای این سیستم به دست آورد.

واژگان کلیدی

روتور هم‌محور، یاتاقان مغناطیسی فعال^۱، یاتاقان کمکی، دینامیک غیرخطی، دوشاخگی

۱. مقدمه

برق یا صنایع هوافضا، برای اینکه نسبت توان به وزن بالایی در سیستم حاصل شود، چیدمان روتورهای هم‌محور، رایج‌ترین چیدمان است. هرچند تحلیل رفتار دینامیکی یک سیستم روتور

ارتعاشات در ماشین‌های دوار یکی از مهم‌ترین و رایج‌ترین مسائلی است که همواره مورد توجه پژوهشگران بوده است. در بسیاری از ماشین‌های دوار مانند توربین‌های گازی به کار رفته در صنایع تولید

هم‌محور، به‌واسطه اثر برهم‌کنش بین شافت داخلی و خارجی پیچیده‌تر است [۱]. تحلیلی نظری برای بررسی و تعیین مشخصات دینامیکی سیستم‌های توربومشین با یک روتور و دو روتور توسط چیانگ و همکاران [۲] ارائه شد. سپس اثر نسبت سرعت و سختی تکیه‌گاه بر فرکانس‌های طبیعی و سرعت‌های بحرانی بررسی شد. نتایج نشان داد که اولین و دومین سرعت بحرانی سیستم با افزایش سختی تکیه‌گاه افزایش می‌یابد، این در حالی است که سومین سرعت بحرانی سیستم تقریباً ثابت است. هرچند با شرایط تکیه‌گاهی صلب‌تر، سرعت‌های بحرانی اول و دوم سیستم نیز با افزایش سختی، تقریباً ثابت می‌مانند.

فی و همکاران [۳] با استفاده از روش اجزای محدود و روش نیومارک^۲ فرکانس‌های طبیعی، سرعت‌های بحرانی و پاسخ‌های گذرای یک سیستم روتور هم‌محور را به‌دست آورده‌اند. آنها به این نتیجه رسیدند که ممان‌های ژيروسکوپی، منجر به سرعت‌های بحرانی متفاوتی در حالت دوران هم‌جهت و خلاف جهت روتورها می‌شود. یانگ و همکاران [۴-۵] آثار برخورد اصطکاک را روی مشخصات دینامیکی یک سیستم روتور هم‌محور بررسی کرده‌اند. آنها نشان دادند که برای یک سیستم روتور هم‌محور بدون برخورد اصطکاک، پدیده ضربان^۳ در یک سرعت دورانی خاص رخ می‌دهد. همچنین برخورد اصطکاک، مؤلفه‌های فرکانسی زیادی را در پاسخ‌های سیستم ایجاد می‌کند.

در مطالعات بالا تحلیل دینامیکی سیستم‌های روتور هم‌محور با یاتاقان‌های معمولی مورد بررسی قرار گرفت. این در حالی است که انواع دیگری از یاتاقان‌ها از جمله یاتاقان مغناطیسی فعال روی مدل‌های ساده با یک روتور، مطالعه شده‌اند. یاتاقان‌های مغناطیسی فعال در ماشین‌های دوار از اهمیت خاصی برخوردارند. عدم تماس روتور با AMB و در نتیجه عدم وجود اصطکاک، سبب فرسودگی کمتر و عمر بیشتر سیستم شده و به این ترتیب هزینه‌های تعمیر و نگهداری را کاهش می‌دهد. همچنین عدم نیاز به روغنکاری، دقت کنترلی بالا و توانایی کار در محیط‌های با تغییرات دمایی بالا یا خلا، از دیگر مزیت‌های AMB به حساب می‌آید [۶-۷].

جی و لیونگ [۸] نوسانات غیرخطی یک سیستم روتور صلب - AMB را تحت شرایط رزونانس فوق‌هارمونیک^۴ بررسی کرده‌اند. دو AMB به‌کار رفته در مدل آنها مشابه بوده و دارای هشت قطب الکترومگنت هستند که یک کنترلر PD روی جریان‌های کنترلی قطب‌ها اعمال شده است. در شرایط رزونانس فوق‌هارمونیک

فرض شده است که فرکانس طبیعی سیستم خطی تقریباً سه برابر فرکانس تحریک باشد. سپس اثر بهره‌های کنترلی روی پاسخ غیرخطی سیستم مطالعه شده است. نتایج نشان می‌دهد که برای مقادیر کم دامنه تحریک، به ازای هر بهره کنترلر تناسبی یک حل پایدار منحصر به‌فرد وجود دارد. همچنین با افزایش بهره مشتقی، دامنه ارتعاشات فوق‌هارمونیک کاهش می‌یابد. به این ترتیب تحلیل انجام‌شده بینش عمیق‌تری از بهره‌های کنترلی را روی پاسخ غیرخطی روتور ارائه می‌کند تا از نتایج حاصل از آن بتوان برای طراحی کنترلر مناسب استفاده کرد.

ژانگ و همکاران [۹-۱۰] حرکت آشوبناک یک روتور صلب با AMB را با فرض سختی متغیر با زمان بررسی کرده‌اند. برای ایجاد سختی متغیر با زمان در سیستم یاتاقان مغناطیسی، بهره تناسبی در کنترلر PD، به‌صورت یک ضریب تناوبی در نظر گرفته شده است. معادلات حرکت این سیستم دو درجه آزادی کوپل، شامل غیرخطی‌های مرتبه دوم و مرتبه سوم و تحریک پارامتری هستند. در ادامه شرایط تشدید زیرهارمونیک که در آن فرکانس تحریک، دو برابر فرکانس طبیعی سیستم خطی است در نظر گرفته شده است و معادلات حرکت با روش اغتشاشی مجانبی^۵ تحلیل شده‌اند. نتایج عددی نشان‌دهنده حرکت آشوبناک برای سیستم هستند. همچنین یک پدیده پرش در سیستم روتور صلب - AMB همراه با سختی متغیر مشاهده شده است. به‌هنگام نصب روتورها روی یاتاقان‌های مغناطیسی، یاتاقان‌های کمکی معمولی به‌همراه آنها باید استفاده شود. معمولاً این یاتاقان‌ها به‌گونه‌ای نصب می‌شوند که اگر جابه‌جایی روتور از نصف لقی شعاعی یاتاقان مغناطیسی بیشتر شد، از ایجاد آسیب به مجموعه روتور یاتاقان جلوگیری کنند. این شرایط ممکن است در اثر عواملی مانند بیش‌باری آبی یا قطع منبع تغذیه الکتریکی AMB ایجاد شود. البته به‌دلیل لقی شعاعی خیلی کم، تماس بین روتور و یاتاقان‌های کمکی در شرایط کاری طبیعی نیز دور از انتظار نیست. بر این اساس عنایت‌حسین [۱۱] دینامیک غیرخطی یک روتور صلب با AMB و یاتاقان کمکی را بررسی کرده است. در مدل‌سازی سیستم، اثر نیروی وزن روتور، نیروی نابالانسی، نیروی اعمال‌شده از طرف یاتاقان‌های کمکی، نیروهای اعمال‌شده از طرف یاتاقان‌های مغناطیسی و کوپلینگ هندسی^۶ بین نیروهای مغناطیسی در نظر گرفته شده است. معادلات حرکت به ازای مقادیر عددی مختلف از پارامترهای نابالانسی، سختی و ضریب

دامنه ارتعاشی کمتری را ایجاد می‌کند. زی و همکاران [۱۶] رفتار دینامیکی پایدار یک روتور انعطاف‌پذیر تعلیق شده با AMB و یاتاقان کمکی را مطالعه نموده‌اند. بین روتور و یاتاقان‌های کمکی یک مقدار لقی در نظر گرفته شده است. نمودارهای دوشاخگی پاسخ روتور به ازای تغییر نابالانسی، لقی در یاتاقان‌های کمکی، سختی تکیه‌گاه و میرایی ارائه شده و به این ترتیب محدوده سختی و میرایی که در آن حرکت از حالت چندتناوبی به حالت آشوبناک وارد می‌شود مشخص شده است. نتایج حاکی از آن است که هرچه مقدار لقی در یاتاقان‌های کمکی زیاده‌تر شود، دامنه پدیدهٔ پرش افزایش می‌یابد. همچنین اثر نیروی وزن به دلیل اینکه روتور را در تماس با یاتاقان‌های کمکی قرار می‌دهد، منجر به ارتعاشات چندتناوبی یا آشوبناک شده و به‌عنوان یک اثر منفی تلقی می‌گردد. علاوه بر این، برای مقادیر کمتر میرایی و مقادیر بیشتر لقی و سختی در یاتاقان‌های کمکی، اثر نابالانسی روی سیستم شدیدتر شده و حرکت روتور در محدودهٔ کمتری به‌صورت منظم باقی می‌ماند. به‌همین دلیل برای جلوگیری از حرکت‌های چندتناوبی یا آشوبناک بهتر است که یاتاقان‌های کمکی با لقی و سختی تکیه‌گاهی کمتر انتخاب شود.

با توجه به جمع‌بندی مطالعات صورت‌گرفته، تحقیقات پیشین می‌توانند راه‌کارهایی را در رابطه با تحلیل رفتار آشوبناک سیستم‌های دوار با یک روتور و یاتاقان‌های مغناطیسی فعال به‌دست دهند. همچنین می‌توانند بینش خوبی را برای تحلیل پاسخ فرکانسی و سرعت‌های بحرانی سیستم‌های دوار با چندروتور و یاتاقان‌های معمولی ارائه دهند. اما بررسی رفتار آشوبناک سیستم روتور هم‌محور با AMB و تماس با یاتاقان کمکی، مسئله‌ای است که فقط در پژوهش قبلی نویسندگان به آن پرداخته شده و در آن تأثیر وزن و سرعت دورانی روی دینامیک غیرخطی سیستم مورد بررسی قرار گرفته است [۱۷]. از طرفی به‌دلیل دینامیک پیچیدهٔ سیستم‌هایی با حرکات آشوبناک، عقب انداختن یا حذف رفتار آشوبناک با تنظیم مناسب پارامترهای سیستم در هنگام طراحی، ایدهٔ اولیه و اصلی در کنترل آشوب محسوب می‌شود. چون برای هر پارامتر مرزها و محدودیت‌هایی وجود دارد که خارج‌شدن از آنها تأثیر جدی بر عملکرد سیستم دارد، لازم است ابتدا موقعیت وقوع آشوب به ازای تغییر پارامترهای مختلف در سیستم دینامیکی شناسایی شود. بر این اساس برای تحلیل دقیق‌تر رفتار غیرخطی سیستم روتور هم‌محور با AMB و

اصطکاک در یاتاقان‌های کمکی با روش رونگ - کوتا حل شده‌اند. نتایج حل عددی با استفاده از نمودارهای دوشاخگی، پاسخ زمانی، مسیرهای مداری، مقاطع پوانکاره و نمودارهای طیف توانی ارائه شده‌اند. نتایج عددی نشان می‌دهد که پاسخ سیستم به‌طور عمده تحت تأثیر مقدار نابالانسی روتور است. در حالتی که مقدار نابالانسی زیاد باشد، مقادیر سختی و ضریب اصطکاک لغزشی اثر تقریباً ناچیزی روی پاسخ سیستم دارند. برای مقادیر نابالانسی نسبتاً کم نیز استفاده از یاتاقان‌های کمکی با سختی کمتر و ضریب اصطکاک کمتر، منجر به کاهش یا حذف حرکات نامنظم در پاسخ می‌شود.

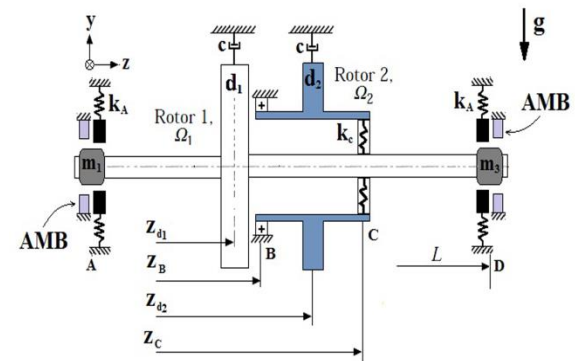
عنایت‌حسین در تحقیق دیگری آثار کوپلینگ هندسی روی پاسخ دوشاخگی یک روتور انعطاف‌پذیر با AMB را بررسی کرده است. نتایج عددی نشان می‌دهد که با پارامتر کوپلینگ هندسی کوچک، پاسخ روتور همیشه سنکرون است. برای مقادیر نسبتاً زیاد پارامتر کوپلینگ هندسی، پاسخ روتور پدیده‌های غیرخطی مانند ارتعاشات زیرهارمونیک با دورهٔ تناوب 2T، 3T، 6T، 9T، 17T، ارتعاشات شبه‌تناوبی و آشوبناک را نشان می‌دهد [۱۲-۱۳]. قاندری و همکاران [۱۴] به مطالعهٔ اثر وزن روی رفتار آشوبناک یک روتور انعطاف‌پذیر با AMB پرداخته‌اند. در مدل هشت درجه آزادی ارائه‌شده توسط آنها، آثار ژبروسکویی دیسک در نظر گرفته شده است، اما تأثیر برخورد اصطکاک با یاتاقان‌های کمکی لحاظ نشده است. نتایج نشان می‌دهد که اثر وزن می‌تواند رفتار آشوبناک سیستم را به تأخیر بیندازد. هرچند با در نظر گرفتن اثر وزن، رفتارهای آشوبناک در محدوده‌های بیشتری از سرعت دورانی روتور مشاهده می‌شوند.

جانگ و چن [۱۵] به تحلیل دوشاخگی پاسخ دینامیکی یک سیستم AMB با روتور انعطاف‌پذیر و یاتاقان کمکی پرداختند که در آن آثار کوپلینگ بین جهت‌های افقی و قائم نیز در نظر گرفته شده است. با استفاده از مقاطع پوانکاره، نمودارهای دوشاخگی و طیف توان، رفتار دینامیکی سیستم به ازای پارامترهای مختلف از جمله نابالانسی، نسبت جرم دیسک به جرم یاتاقان‌ها، سختی شافت، لقی شعاعی در AMB و بهره‌های تناسبی و مشتقی جریان‌های کنترلی بررسی شده است. نتایج نشان داد که نابالانسی کمتر، لقی شعاعی بیشتر، نسبت جرم نزدیک به یک و بهرهٔ مشتقی کمتر کنترلر، دامنهٔ گسترده‌تری از حرکت تناوبی را نتیجه می‌دهد. همچنین نابالانسی کمتر و بهرهٔ تناسبی بزرگتر کنترلر،

تماس با یاتاقان کمکی، به مطالعات کامل‌تری نیاز است. لذا در این پژوهش تأثیر اصطکاک و لقی در یاتاقان‌های کمکی روی رفتار سیستم، مورد ارزیابی قرار گرفته که تاکنون در پژوهش دیگری ارائه نشده است. برای این کار از ابزارهایی مانند مسیرهای مداری، طیف توان، مقاطع پوانکاره، نمودارهای دوشاخگی و ماکزیمم نماهای لیاپانوف استفاده شده است.

۲. فرمول‌بندی و تعریف مسئله

یک مدل ارتعاشی از سیستم روتور هم‌محور - AMB با دو یاتاقان کمکی (در A و D) در شکل ۱ نمایش داده شده است. این مدل شامل یک شافت انعطاف‌پذیر داخلی (روتور اول) و یک شافت صلب خارجی (روتور دوم) به صورت هم‌محور است که یک دیسک صلب روی هر کدام از آنها قرار گرفته است. به این ترتیب می‌توان شافت صلب خارجی و دیسک روی آن را به صورت یک جسم صلب یکپارچه در نظر گرفت. برای تحلیل این مدل، فرضیات زیر در نظر گرفته شده است.



شکل ۱. مدل روتور هم‌محور تعلیق‌شده با دو یاتاقان کمکی

۱. دیسک‌ها و روتور خارجی به صورت صلب در نظر گرفته شده‌اند
 ۲. جرم روتور انعطاف‌پذیر داخلی به صورت متمرکز در دو انتهای آن لحاظ شده است، لذا مانند یک شافت انعطاف‌پذیر بدون جرم در سیستم عمل می‌کند
 ۳. از میرایی داخلی شافت داخلی صرف‌نظر می‌شود
 ۴. از ارتعاشات محوری و پیچشی روتور چشم‌پوشی شده است
 ۵. آثار ژيروسکوپی دیسک‌ها و همچنین کوپلینگ هندسی بین قطب‌ها، در هر یاتاقان الکترومغناطیسی در نظر گرفته شده است
 ۶. سرعت‌های دورانی دو روتور ثابت فرض شده است
- قسمت‌هایی از شافت انعطاف‌پذیر داخلی که سمت چپ و راست دیسک d_1 قرار دارد، به صورت جرم‌های متمرکز (m_3 و m_1)

در انتهای سمت چپ و راست آن لحاظ شده است؛ به این ترتیب برای هر کدام از جرم‌های متمرکز m_3 و m_1 دو مختصه انتقالی x_1, y_1, x_3 و y_3 در نظر گرفته شده است. دیسک d_1 قرار گرفته روی روتور انعطاف‌پذیر داخلی نیز دارای دو مختصه انتقالی x_2 و y_2 و دو مختصه دورانی θ_{1x} و θ_{1y} است. حرکت روتور صلب خارجی هم می‌تواند با دو مختصه انتقالی x_4 و y_4 مربوط به دیسک d_2 توصیف شود. لذا در مجموع، سیستم روتور هم‌محور ارائه‌شده را می‌توان به صورت یک سیستم ارتعاشی ده درجه آزادی مدلسازی کرد. سختی یاتاقان B به اندازه کافی زیاد فرض می‌شود که بتوان آن را مانند یک تکیه‌گاه مفصلی در نظر گرفت. حرکت دو روتور هم‌محور تنها به وسیله یاتاقان واسطه C در راستای عرضی به هم کوپل شده است و بین دو روتور کوپلینگ پیچشی وجود ندارد. انرژی جنبشی کلی سیستم، جمع انرژی جنبشی جرم‌های متمرکز و دیسک‌های صلب می‌باشد که به صورت رابطه ۱ ساده‌سازی و بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
 T &= T_{m_1} + T_{m_3} + T_{d_1} + T_{d_2} \\
 &= \frac{1}{2} [m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\
 &\quad + m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) + m_4 (\dot{x}_4^2 + \dot{y}_4^2) \\
 &\quad + I_{T_1} (\dot{\theta}_{1x}^2 + \dot{\theta}_{1y}^2) + I_{P_1} (\Omega_2^2 - 2\Omega_1 \dot{\theta}_{1y} \theta_{1x}) \\
 &\quad + \frac{I_{T_2}}{(z_{d2} - z_B)^2} (\dot{x}_4^2 + \dot{y}_4^2) \\
 &\quad + I_{P_2} (\Omega_2^2 + 2\Omega_2 \frac{\dot{x}_4 y_4}{(z_{d2} - z_B)^2})] \quad (1)
 \end{aligned}$$

در این رابطه I_{P_2} و I_{T_2} ، I_{P_1} ، I_{T_1} به ترتیب ممان اینرسی جرمی قطری دیسک d_1 ، ممان اینرسی جرمی ممان اینرسی جرمی قطری دیسک d_2 می‌باشند. برای هر دیسک ممان اینرسی جرمی قطری، دو برابر ممان اینرسی جرمی در نظر گرفته می‌شود ($I_{P_2} = 2I_{T_2}$ و $I_{P_1} = 2I_{T_1}$). انرژی پتانسیل کلی سیستم جمع انرژی کرنشی شافت انعطاف‌پذیر داخلی و انرژی پتانسیل ناشی از خاصیت الاستیک بودن یاتاقان واسطه C است که به صورت ۲ داده می‌شود:

$$V = V_s + V_c \quad (2)$$

انرژی کرنشی شافت انعطاف‌پذیر داخلی در اثر خمش خالص که با V_s نشان داده شده است، بر اساس تئوری تیر خطی به صورت رابطه ۳ داده می‌شود.

$$\begin{aligned}
 V_s &= \frac{1}{2} \int_0^{\alpha_1 L} EI[(x''_{beam}(z))^2 + (y''_{beam}(z))^2] dz \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\alpha_1 L}^L EI[(x''_{beam}(z))^2 + (y''_{beam}(z))^2] dz \\
 &= \frac{3EI}{2\alpha_1^3 L^3} [x_1^2 - 2x_1x_2 + 2\alpha_1x_1L\theta_{1y} \\
 &+ y_1^2 - 2y_1y_2 - 2\alpha_1y_1L\theta_{1x}] \\
 &+ \frac{3EI}{2L^3} \left[\frac{1+3\alpha_1^2-3\alpha_1}{\alpha_1^3(1-\alpha_1)^3} (x_2^2 + y_2^2) \right. \\
 &+ \frac{L^2}{\alpha_1(1-\alpha_1)} (\theta_{1x}^2 + \theta_{1y}^2) \\
 &+ \left. \frac{2(1-2\alpha_1)L}{\alpha_1^2(1-\alpha_1)^2} (y_2\theta_{1x} - x_2\theta_{1y}) \right] \\
 &+ \frac{3EI}{2(1-\alpha_1)^3 L^3} [x_3^2 - 2x_2x_3 - 2(1-\alpha_1)x_3L\theta_{1y} \\
 &+ y_3^2 - 2y_2y_3 + 2(1-\alpha_1)y_3L\theta_{1x}]
 \end{aligned} \quad (10)$$

برای نوشتن انرژی پتانسیل ناشی از سختی k_c یاتاقان واسطه، تماس به صورت الاستیک فرض شده است. از آثار لقی، میرایی و اصطکاک در یاتاقان واسطه C نیز چشم‌پوشی شده است. همچنین بردار جابه‌جایی مرکز روتور داخلی و روتور خارجی در نقطه C با \vec{r}_{c1} و \vec{r}_{c2} نشان داده شده‌اند که عبارت‌اند از:

$$\vec{r}_{c1} = x_{beam}(z_c)\hat{i} + y_{beam}(z_c)\hat{j} + z_c\hat{k} \quad (11)$$

$$\vec{r}_{c2} = \left[1 + \frac{z_c - z_{d2}}{z_{d2} - z_B}\right]x_4\hat{i} + \left[1 + \frac{z_c - z_{d2}}{z_{d2} - z_B}\right]y_4\hat{j} + z_c\hat{k} \quad (12)$$

به این ترتیب انرژی پتانسیل ناشی از سختی k_c در یاتاقان واسطه C بین دو روتور برابر است با:

$$V_c = \frac{1}{2} k_c e_c^2 \quad (13)$$

که مقدار تغییر شکل الاستیک e_c ایجادشده در یاتاقان واسطه C به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_c = |\vec{r}_{c1} - \vec{r}_{c2}| \quad (14)$$

انرژی اتلافی سیستم، ناشی از وجود سیال هوا در اطراف دیسک‌ها می‌باشد که به صورت میرایی ویسکوز روی دیسک‌ها مدل شده است:

$$D.E. = \frac{1}{2} C(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{x}_4^2 + \dot{y}_4^2) \quad (15)$$

نیروهای خارجی اعمال شده به سیستم شامل نیروهای وزن، نیروهای ناشی از نابالانسی در دیسک‌ها، نیروهای الکترومغناطیسی (F_M) ایجاد شده در AMB و نیروهای تماس (F_C) بین شافت انعطاف‌پذیر داخلی و یاتاقان‌های کمکی A و D می‌باشند. لذا

$$V_s = \frac{1}{2} \int_0^L EI[(x''_{beam}(z))^2 + (y''_{beam}(z))^2] dz \quad (3)$$

توابع $x_{beam}(z)$ و $y_{beam}(z)$ مربوط به تغییر شکل خمشی شافت داخلی در دو صفحه $x-z$ و $y-z$ می‌باشند که در شکل ۲ نمایش داده شده‌اند. عملگر ("") بیانگر مشتق دوم این توابع نسبت به متغیر z است. زوایای θ_{1x} و θ_{1y} منجر به ایجاد کوپل‌های ژيروسکوپی در سیستم می‌شوند. با فرض اینکه طول شافت داخلی L و موقعیت دیسک d_1 قرار گرفته روی آن $z = \alpha_1 L$ در نظر گرفته شود، در این صورت توابع شکل انتخاب شده برای قسمت‌هایی از شافت داخلی که سمت چپ و راست دیسک d_1 قرار دارند، باید شرایط مرزی داده‌شده در جدول ۱ را برآورده نمایند. با توجه به چهار شرط مرزی حاکم بر مسئله در هر کدام از صفحات $x-z$ و $y-z$ ، توابع تغییر شکل انتخاب شده باید به صورت یک چندجمله‌ای مرتبه سوم با چهار ضریب مجهول به صورت زیر انتخاب شوند:

$$x_{beam}(z) = a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 \quad (4)$$

$$y_{beam}(z) = b_1 z^3 + b_2 z^2 + b_3 z + b_4 \quad (5)$$

پس از اعمال شرایط مرزی روی معادلات بالا و محاسبه ضرایب ثابت a_1 تا a_4 و b_1 تا b_4 ، توابع $x_{beam}(z)$ و $y_{beam}(z)$ در فاصله $z=0$ تا $z=\alpha_1 L$ عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}
 x_{beam}(z) &= \frac{x_1 - x_2 + \alpha_1 L \theta_{1y}}{2\alpha_1^3} \left(\frac{z}{L}\right)^3 \\
 &+ \frac{3x_2 - 3x_1 - \alpha_1 L \theta_{1y}}{2\alpha_1} \left(\frac{z}{L}\right) + x_1
 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 y_{beam}(z) &= \frac{y_1 - y_2 - \alpha_1 L \theta_{1x}}{2\alpha_1^3} \left(\frac{z}{L}\right)^3 \\
 &+ \frac{3y_2 - 3y_1 + \alpha_1 L \theta_{1x}}{2\alpha_1} \left(\frac{z}{L}\right) + y_1
 \end{aligned} \quad (7)$$

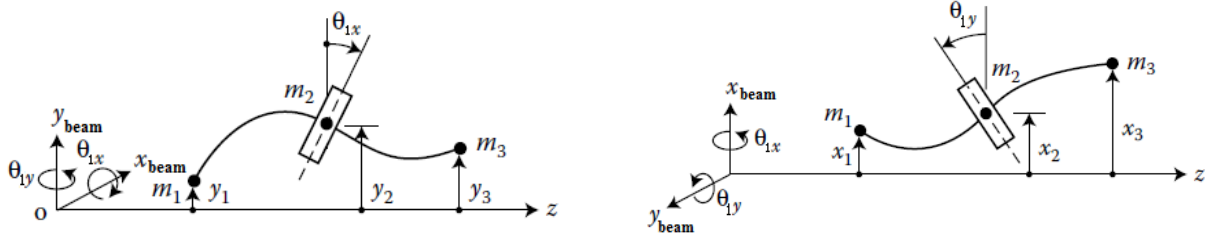
به همین ترتیب، توابع تغییر شکل $x_{beam}(z)$ و $y_{beam}(z)$ در فاصله $z=L$ تا $z=\alpha_1 L$ هم عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}
 x_{beam}(z) &= \frac{x_3 - x_2 - (1-\alpha_1)L\theta_{1y}}{2(1-\alpha_1)^3} \left(\frac{L-z}{L}\right)^3 \\
 &+ \frac{3x_2 - 3x_3 + (1-\alpha_1)L\theta_{1y}}{2(1-\alpha_1)} \left(\frac{L-z}{L}\right) + x_3
 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 y_{beam}(z) &= \frac{y_3 - y_2 + (1-\alpha_1)L\theta_{1x}}{2(1-\alpha_1)^3} \left(\frac{L-z}{L}\right)^3 \\
 &+ \frac{3y_2 - 3y_3 - (1-\alpha_1)L\theta_{1x}}{2(1-\alpha_1)} \left(\frac{L-z}{L}\right) + y_3
 \end{aligned} \quad (9)$$

با جایگذاری موارد فوق در معادله ۳، انرژی کرنشی شافت داخلی بدین صورت محاسبه می‌شود.

نیروهای تعمیم یافته متناظر با مختصات تعمیم یافته مورد نظر برای سیستم دو روتوری عبارت‌اند از [۱۷]:



شکل ۲. مدل تغییر شکل خمشی شافت داخلی

جدول ۱. شرایط مرزی مربوط به توابع شکل انتخاب شده

شرایط مرزی	$z=0$ تا $z=\alpha_1 L$	
	صفحه X-Z	صفحه Y-Z
۱	$x_{beam}(0) = x_1$	$y_{beam}(0) = y_1$
۲	$x_{beam}(\alpha_1 L) = x_2$	$y_{beam}(\alpha_1 L) = y_2$
۳	$x'_{beam}(\alpha_1 L) = \theta_{1y}$	$y'_{beam}(\alpha_1 L) = -\theta_{1x}$
۴	$x''_{beam}(0) = 0$	$y''_{beam}(0) = 0$
شرایط مرزی	$z=L$ تا $z=\alpha_1 L$	
	صفحه X-Z	صفحه Y-Z
۱	$x_{beam}(L) = x_3$	$y_{beam}(L) = y_3$
۲	$x_{beam}(\alpha_1 L) = x_2$	$y_{beam}(\alpha_1 L) = y_2$
۳	$x'_{beam}(\alpha_1 L) = \theta_{1y}$	$y'_{beam}(\alpha_1 L) = -\theta_{1x}$
۴	$x''_{beam}(L) = 0$	$y''_{beam}(L) = 0$

کوپلینگ هندسی بین قطب‌های واقع در راستای افقی و قائم، در نظر گرفته شده است. نمای کلی از مقطع این یاتاقان‌ها در موقعیت‌های A و D روتور داخلی، در شکل ۳ نمایش داده شده است. نیروهای مغناطیسی ایجاد شده توسط قطب‌های AMB، تابعی غیرخطی از جریان عبوری از سیم‌پیچ آنها و فاصله هوایی بین قطب‌ها و روتور داخلی می‌باشند. با چشم‌پوشی از آثار ناشی شار مغناطیسی در فضای اطراف، جریان گردابی^۷ و تلفات هبسترزیس^۸ جنس هسته سیم‌پیچ‌ها، نیروهای الکترومغناطیس اعمال شده به روتور داخلی در موقعیت‌های A و D (جرم‌های m_1 و m_3) در راستای X و Y به صورت زیر داده می‌شوند [۶]:

$$F_{M_{x_1}} = \frac{A_p \mu_0 N^2}{4} \left[\frac{I_0 + i_{x_1}}{g_0 - x_1} - \frac{I_0 - i_{x_1}}{g_0 + x_1} \right] + \alpha x_1 \frac{A_p \mu_0 N^2}{4} \left[\frac{I_0 + i_{y_1}}{g_0 - y_1} + \frac{I_0 - i_{y_1}}{g_0 + y_1} \right] \quad (26)$$

$$Q_{x_1} = F_{M_{x_1}} + F_{C_{x_1}} \quad (16)$$

$$Q_{y_1} = -m_1 g + F_{M_{y_1}} + F_{C_{y_1}} \quad (17)$$

$$Q_{x_2} = m_2 u \Omega_1^2 \cos(\Omega_1 t) \quad (18)$$

$$Q_{y_2} = -m_2 g + m_2 u \Omega_1^2 \sin(\Omega_1 t) \quad (19)$$

$$Q_{\theta_{1x}} = 0 \quad (20)$$

$$Q_{\theta_{1y}} = 0 \quad (21)$$

$$Q_{x_3} = F_{M_{x_3}} + F_{C_{x_3}} \quad (22)$$

$$Q_{y_3} = -m_3 g + F_{M_{y_3}} + F_{C_{y_3}} \quad (23)$$

$$Q_{x_4} = m_4 u \Omega_2^2 \cos(\Omega_2 t) \quad (24)$$

$$Q_{y_4} = -m_4 g + m_4 u \Omega_2^2 \sin(\Omega_2 t) \quad (25)$$

در روابط فوق، g ثابت گرانشی و u شعاع نابالانسی است. یاتاقان‌های مغناطیسی فعال در این مدل‌سازی دارای چهار قطب الکترومغناطیسی می‌باشد که در راستای X و Y قرار گرفته‌اند.

در هنگام تماس شافت انعطاف‌پذیر داخلی با یاتاقان‌های کمکی نیز چون سطح تماس، نسبت به ابعاد کلی بسیار کوچک باقی می‌ماند، این تماس را می‌توان به صورت الاستیک فرض کرد و از اثر حرارت ایجاد شده به واسطه اصطکاک چشم‌پوشی نمود. در شکل ۴ مدل نیروهای تماسی بین شافت انعطاف‌پذیر داخلی و یاتاقان کمکی موقعیت A نشان داده شده است. این نیروهای تماسی هم از لحاظ تأثیر بر رفتار دینامیکی شافت و هم از لحاظ تأثیر بر نیروی منتقل شده به پایه، از اهمیت زیادی برخوردار می‌باشند. به این ترتیب می‌توان نیروهای ایجاد شده توسط یاتاقان کمکی در موقعیت A را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} f_{n_A} = k_a e_A \\ f_{t_A} = \mu f_{n_A} \end{cases} \quad (34)$$

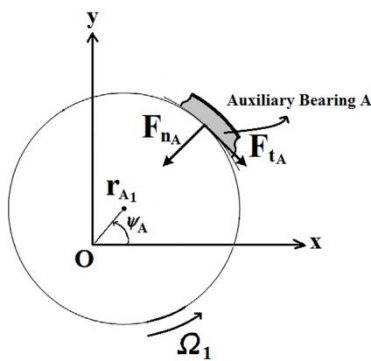
$$e_A = (\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - g_1) H(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - g_1) \quad (35)$$

در رابطه بالا $H(\bullet)$ تابع پله‌ای یا هویساید است که مقدار آن به ازای ورودی‌های مثبت، برابر یک و به ازای سایر ورودی‌ها، برابر یک است. بنابراین مؤلفه‌های نیروی تماسی اعمال شده به جرم m_1 در راستای x_1 و y_1 عبارت‌اند از:

$$F_{C_{y_1}} = -f_{n_A} \cos \psi_A + f_{t_A} \sin \psi_A \quad (36)$$

$$F_{C_{x_1}} = -f_{n_A} \sin \psi_A - f_{t_A} \cos \psi_A \quad (37)$$

$$\psi_A = \tan^{-1} \left(\frac{y_1}{x_1} \right) \quad (38)$$



شکل ۴. مدل نیروهای تماسی بین شافت داخلی و یاتاقان کمکی A

دیفرانسیل بدون بعد غیرخطی و کوپل شده حرکت سیستم به دست می‌آیند [۱۷]. پارامترهای بدون بعد عبارت‌اند از:

$$x_i = \frac{x_i}{g_0} \quad y_i = \frac{y_i}{g_0} \quad \theta_{ix} = \frac{L\theta_{ix}}{g_0}$$

$$F_{M_{y_1}} = \frac{A_p \mu_0 N^2}{4} \left[\left(\frac{I_0 + i_{y_1}}{g_0 - y_1} \right)^2 - \left(\frac{I_0 - i_{y_1}}{g_0 + y_1} \right)^2 \right] + \alpha y_1 \frac{A_p \mu_0 N^2}{4} \left[\left(\frac{I_0 + i_{x_1}}{g_0 - x_1} \right)^2 + \left(\frac{I_0 - i_{x_1}}{g_0 + x_1} \right)^2 \right] \quad (37)$$

$$F_{M_{x_3}} = \frac{A_p \mu_0 N^2}{4} \left[\left(\frac{I_0 + i_{x_3}}{g_0 - x_3} \right)^2 - \left(\frac{I_0 - i_{x_3}}{g_0 + x_3} \right)^2 \right] + \alpha x_3 \frac{A_p \mu_0 N^2}{4} \left[\left(\frac{I_0 + i_{y_3}}{g_0 - y_3} \right)^2 + \left(\frac{I_0 - i_{y_3}}{g_0 + y_3} \right)^2 \right] \quad (38)$$

$$F_{M_{y_3}} = \frac{A_p \mu_0 N^2}{4} \left[\left(\frac{I_0 + i_{y_3}}{g_0 - y_3} \right)^2 - \left(\frac{I_0 - i_{y_3}}{g_0 + y_3} \right)^2 \right] + \alpha y_3 \frac{A_p \mu_0 N^2}{4} \left[\left(\frac{I_0 + i_{x_3}}{g_0 - x_3} \right)^2 + \left(\frac{I_0 - i_{x_3}}{g_0 + x_3} \right)^2 \right] \quad (39)$$

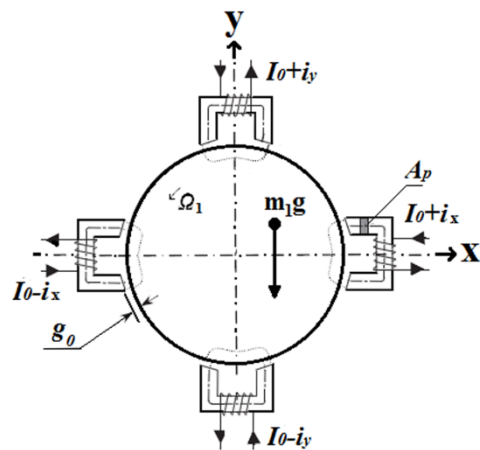
با در نظر گرفتن یک کنترلر PD برای سیستم یاتاقان مغناطیسی فعال، هر کدام از جریان‌های کنترلی i_{x_1} ، i_{y_1} ، i_{x_3} و i_{y_3} می‌توانند با بهره تناسبی \bar{P} و بهره مشتقی \bar{D} ، به جابه‌جایی و سرعت روتور انعطاف‌پذیر داخلی در موقعیت‌های A و D ارتباط داده شوند؛ لذا:

$$i_{x_1} = -\bar{P}x_1 - \bar{D}\dot{x}_1 \quad (40)$$

$$i_{y_1} = -\bar{P}y_1 - \bar{D}\dot{y}_1 \quad (41)$$

$$i_{x_3} = -\bar{P}x_3 - \bar{D}\dot{x}_3 \quad (42)$$

$$i_{y_3} = -\bar{P}y_3 - \bar{D}\dot{y}_3 \quad (43)$$



شکل ۳. مقطع عرضی AMB در نقطه A

نیروهای تماسی برای یاتاقان کمکی D نیز به همین صورت مدل می‌شوند. در ادامه با استفاده از معادله لاگرانژ و همچنین معرفی برخی پارامترهای بدون بعد و ضرایب ثابت، ده معادله

$$\beta_{23} = \frac{\gamma_2^2}{\beta_{21}} \quad \beta_{24} = \frac{\beta_7}{\beta_{21}}$$

$$\beta_{25} = \frac{(1 + \sqrt{\beta_4})\gamma_2}{\beta_{21}} \quad \beta_{26} = \frac{\beta_{14}}{\beta_{21}}$$

معادلات دیفرانسیل بدون بعد حرکت سیستم:

$$\ddot{x}_1 + \frac{\beta_1}{\alpha_2 S_1^2} (x_1 - x_2) + \frac{\beta_2}{\alpha_2 S_1^2} \theta_{1y}$$

$$= \frac{1}{4(P-1)} \left[\frac{(1 - Px_1 - D\dot{x}_1)^2}{1 - x_1} - \frac{(1 + Px_1 + D\dot{x}_1)^2}{1 + x_1} \right]$$

$$+ \frac{\alpha x_1}{4(P-1)} \left[\frac{(1 - Py_1 - D\dot{y}_1)^2}{1 - y_1} + \frac{(1 + Py_1 + D\dot{y}_1)^2}{1 + y_1} \right] \quad (39)$$

$$- \frac{(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - n_1)H(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - n_1)}{S_3^2}$$

$$\times (\cos \psi_A - \mu \sin \psi_A)$$

$$\ddot{y}_1 + \frac{\beta_1}{\alpha_2 S_1^2} (y_1 - y_2) - \frac{\beta_2}{\alpha_2 S_1^2} \theta_{1x}$$

$$= -\frac{W}{S_1^2} + \frac{1}{4(P-1)}$$

$$\times \left[\frac{(1 - Py_1 - D\dot{y}_1)^2}{1 - y_1} - \frac{(1 + Py_1 + D\dot{y}_1)^2}{1 + y_1} \right] \quad (40)$$

$$+ \frac{\alpha y_1}{4(P-1)} \left[\frac{(1 - Px_1 - D\dot{x}_1)^2}{1 - x_1} + \frac{(1 + Px_1 + D\dot{x}_1)^2}{1 + x_1} \right]$$

$$- \frac{(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - n_1)H(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - n_1)}{S_3^2}$$

$$\times (\cos \psi_A + \mu \sin \psi_A)$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{2\zeta}{S_1} \dot{x}_2 + \left[\frac{\beta_3}{S_1^2} + \frac{\beta_4}{S_2^2} \right] x_2 - \frac{\beta_1}{S_1^2} x_1 - \left[\frac{\beta_5}{S_1^2} + \frac{\beta_6}{S_2^2} \right] x_3$$

$$+ \frac{\beta_7}{S_2^2} x_4 - \left[\frac{\beta_8}{S_1^2} + \frac{\beta_9}{S_2^2} \right] \theta_{1y} = US^2 \cos(S\tau) \quad (41)$$

$$\ddot{y}_2 + \frac{2\zeta}{S_1} \dot{y}_2 + \left[\frac{\beta_3}{S_1^2} + \frac{\beta_4}{S_2^2} \right] y_2 - \frac{\beta_1}{S_1^2} y_1 - \left[\frac{\beta_5}{S_1^2} + \frac{\beta_6}{S_2^2} \right] y_3$$

$$+ \frac{\beta_7}{S_2^2} y_4 + \left[\frac{\beta_8}{S_1^2} + \frac{\beta_9}{S_2^2} \right] \theta_{1x} = -\frac{W}{S_1^2} + US^2 \sin(S\tau) \quad (42)$$

$$\ddot{\theta}_{1x} + 2S\dot{\theta}_{1y} + 4n_2^2 \left[\frac{\beta_{10}}{S_1^2} + \frac{\beta_{11}}{S_2^2} \right] \theta_{1x} - \frac{4n_2^2 \beta_2}{S_1^2} y_1$$

$$+ 4n_2^2 \left[\frac{\beta_8}{S_1^2} + \frac{\beta_9}{S_2^2} \right] y_2 + 4n_2^2 \left[\frac{\beta_{12}}{S_1^2} - \frac{\beta_{13}}{S_2^2} \right] y_3 \quad (43)$$

$$+ 4n_2^2 \frac{\beta_{14}}{S_2^2} y_4 = 0$$

$$\ddot{\theta}_{1y} - 2S\dot{\theta}_{1x} + 4n_2^2 \left[\frac{\beta_{10}}{S_1^2} + \frac{\beta_{11}}{S_2^2} \right] \theta_{1y} + \frac{4n_2^2 \beta_2}{S_1^2} x_1$$

$$- 4n_2^2 \left[\frac{\beta_8}{S_1^2} + \frac{\beta_9}{S_2^2} \right] x_2 - 4n_2^2 \left[\frac{\beta_{12}}{S_1^2} - \frac{\beta_{13}}{S_2^2} \right] x_3 \quad (44)$$

$$- \frac{4n_2^2 \beta_{14}}{S_2^2} x_4 = 0$$

$$\theta_{2x} = \frac{L\theta_{2x}}{g_0} \quad \theta_{1y} = \frac{L\theta_{1y}}{g_0} \quad \theta_{2y} = \frac{L\theta_{2y}}{g_0}$$

$$n_1 = \frac{g_1}{g_0} \quad n_2 = \frac{L}{r_1} \quad \tau = \omega_0 t$$

$$\frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{d\tau} \quad W = \frac{g}{g_0 \omega_1^2} \quad \zeta = \frac{C}{2m_2 \omega_1}$$

$$S_1 = \frac{\omega_0}{\omega_1} \quad S_2 = \frac{\omega_0}{\omega_2} \quad S_3 = \frac{\omega_0}{\omega_3}$$

$$\Omega = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \quad S = \frac{\Omega_1}{\omega_0} \quad U = \frac{u}{g_0}$$

$$\alpha_2 = \frac{m_1}{m_2} \quad \alpha_3 = \frac{m_4}{m_2} \quad P = \frac{g_0 \bar{P}}{I_0}$$

$$D = \frac{g_0 \omega_0 \bar{D}}{I_0}$$

ضرایب ثابت تعریفشده در معادلات عبارت‌اند از:

$$\omega_0^2 = \frac{\mu_0 N^2 A_p I_0^2 (P-1)}{m_1 g_0^3} \quad \omega_1^2 = \frac{3EI}{L^3 m_2}$$

$$\omega_2^2 = \frac{k_c}{m_2} \quad \omega_3^2 = \frac{k_a}{m_1}$$

$$\gamma_1 = \frac{L - z_c}{L} \quad \gamma_2 = \left(1 + \frac{z_c - z_{d2}}{z_{d2} - z_B} \right)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{\alpha_1^3} \quad \beta_2 = \frac{1}{\alpha_1^2}$$

$$\beta_3 = \frac{1 + 3\alpha_1^2 - 3\alpha_1}{\alpha_1^3 (1 - \alpha_1)^3} \quad \beta_4 = \frac{1}{4} \left[\frac{3\gamma_1}{(\alpha_1 - 1)} - \frac{\gamma_1^3}{(\alpha_1 - 1)^3} \right]^2$$

$$\beta_5 = \frac{1}{(1 - \alpha_1)^3} \quad \beta_6 = \beta_4 + \sqrt{\beta_4}$$

$$\beta_7 = \gamma_2 \sqrt{\beta_4} \quad \beta_8 = \frac{(1 - 2\alpha_1)}{\alpha_1^2 (1 - \alpha_1)^2}$$

$$\beta_9 = \frac{\sqrt{\beta_4}}{2} \left(\gamma_1 - \frac{\gamma_1^3}{(\alpha_1 - 1)^2} \right) \quad \beta_{10} = \frac{1}{\alpha_1 (1 - \alpha_1)}$$

$$\beta_{11} = \frac{1}{4} \left(\gamma_1 - \frac{\gamma_1^3}{(\alpha_1 - 1)^2} \right)^2 \quad \beta_{12} = \frac{1}{(1 - \alpha_1)^2}$$

$$\beta_{13} = \left(\gamma_1 - \frac{\gamma_1^3}{(\alpha_1 - 1)^2} \right) \quad \beta_{14} = \frac{1}{2} \left(\gamma_1 - \frac{\gamma_1^3}{(\alpha_1 - 1)^2} \right) \gamma_2$$

$$\times \frac{(1 + \sqrt{\beta_4})}{2}$$

$$\beta_{15} = \frac{\alpha_1}{(1 - \alpha_1)^4} \quad \beta_{16} = \frac{\alpha_1}{(1 - \alpha_1)} (\sqrt{\beta_4} + 1)^2$$

$$\beta_{17} = \frac{\alpha_1}{(1 - \alpha_1)} (\sqrt{\beta_4} + \beta_4) \quad \beta_{18} = \alpha_1 \beta_5$$

$$\beta_{19} = \frac{\alpha_1}{(1 - \alpha_1)} \beta_{13} \quad \beta_{20} = \frac{\alpha_1}{(1 - \alpha_1)} (\sqrt{\beta_4} + 1) \gamma_2$$

$$\beta_{21} = 1 + \frac{r_{o2}^2 - r_{i2}^2}{4(z_{d2} - z_B)^2} \quad \beta_{22} = \frac{2(r_{o2}^2 - r_{i2}^2)}{4(z_{d2} - z_B)^2 + (r_{o2}^2 - r_{i2}^2)}$$

شده‌اند. در این تحقیق، حل عددی معادلات حرکت با استفاده از روش رونگ - کوتا با گام متغیر در نرم‌افزار متلب انجام شده است. برای صحت‌سنجی برنامه‌های رایانه‌ای نوشته‌شده، از معادله غیرخطی دافینگ استفاده و نمودارهای حاصل با مرجع [۱۸] مقایسه شده است، که نتایج آن با توجه به محدودیت تعداد صفحات مقاله در اینجا آورده نشده است. گفتنی است در تحلیل رفتار سیستم، برای اطمینان از دریافت خروجی حل معادلات در حالت دائمی، تعداد زیادی از اطلاعات اولیه حاصل از انتگرال‌گیری عددی در یک فاصله زمانی که در حالت گذرا هستند کنار گذاشته شده و پس از اطمینان از رسیدن به حالت دائمی، فاصله زمانی محدودی برای ثبت اطلاعات انتخاب شده است. تحلیل رفتار غیرخطی سیستم نیز با استفاده از ابزارهایی مانند مسیره‌های مداری، طیف توان، مقاطع پوانکاره و نمودارهای دوشاخگی انجام شده است. مسیره‌های مداری فقط مشخص می‌کند که حرکت سیستم تناوبی یا غیرتناوبی است و نمی‌تواند اطلاعات کافی را برای شروع حرکت نامنظم فراهم کنند. نمودار طیف توان که از تبدیل فوریه گسسته متغیر خروجی به دست می‌آید، در اکثر فرایندهای پردازش سیگنال نیز به کار می‌رود. این نمودار از یک سری خطوط قائم تشکیل می‌شود و این خطوط مبین این موضوع هستند که سیگنال مورد نظر را می‌توان به صورت مجموعه‌ای گسسته از توابع هارمونیک نشان داد. هرگاه طیف توان دارای یک خط طیف باشد، نشان‌دهنده حرکت تناوبی است. طیف توان رفتار شبه‌تناوبی نیز از خطوط طیف در برخی فرکانس‌های نامتناسب با یکدیگر تشکیل شده است [۱۹]. مقطع پوانکاره صفحه‌ای در فضای فاز است که نمودار فازی ایجادشده از حل معادلات حاکم بر حرکت سیستم را قطع می‌کند. برای حرکت‌های تناوبی، مقطع پوانکاره تنها یک نقطه است. چنانچه حرکت شبه‌تناوبی باشد، مقطع پوانکاره یک منحنی بسته از نقاط منفصل را ایجاد می‌کند یا از تعدادی نقاط به صورت توده‌ای و با نظم خاصی تشکیل می‌شود [۲۰].

از نمودارهای دوشاخگی برای شناسایی مسیر ورود به حرکت نامنظم استفاده می‌شود. در نمودار دوشاخگی، دامنه دائمی یک سیستم غیرخطی به صورت تابعی از پارامتر غیرخطی سیستم ترسیم می‌شود. به طوری که این پارامتر به آرامی تغییر می‌کند و با تغییر آن، پایداری نقاط تعادل و تعداد آنها تحت تأثیر قرار می‌گیرد. هنگام تغییر پارامتر کنترلی، اگر حرکت به صورت زیرهارمونیک با

$$\ddot{x}_3 + \left[\frac{\beta_{15}}{\alpha_2 S_1^2} + \frac{\beta_{16}}{\alpha_2 S_2^2} \right] x_3 - \left[\frac{\beta_{15}}{\alpha_2 S_1^2} + \frac{\beta_{17}}{\alpha_2 S_2^2} \right] x_2 - \frac{\beta_{20}}{\alpha_2 S_2^2} x_4 - \left[\frac{\beta_{18}}{\alpha_2 S_1^2} - \frac{\beta_{19}}{\alpha_2 S_2^2} \right] \theta_{1y} = \frac{\alpha_1}{4(1-\alpha_1)(P-1)} \times \left[\frac{(1-Px_3 - D\dot{x}_3)^2}{1-x_3} - \frac{(1+Px_3 + D\dot{x}_3)^2}{1+x_3} \right] + \frac{\alpha\alpha_1 x_3}{4(1-\alpha_1)(P-1)} \left[\frac{(1-Py_3 - D\dot{y}_3)^2}{1-y_3} + \frac{(1+Py_3 + D\dot{y}_3)^2}{1+y_3} \right] - \frac{\alpha_1(\sqrt{x_3^2 + y_3^2} - n_1)H(\sqrt{x_3^2 + y_3^2} - n_1)}{(1-\alpha_1)S_3^2} \times (\cos\psi_D - \mu \sin\psi_D) \quad (45)$$

$$\ddot{y}_3 + \left[\frac{\beta_{15}}{\alpha_2 S_1^2} + \frac{\beta_{16}}{\alpha_2 S_2^2} \right] y_3 - \left[\frac{\beta_{15}}{\alpha_2 S_1^2} + \frac{\beta_{17}}{\alpha_2 S_2^2} \right] y_2 - \frac{\beta_{20}}{\alpha_2 S_2^2} y_4 + \left[\frac{\beta_{18}}{\alpha_2 S_1^2} - \frac{\beta_{19}}{\alpha_2 S_2^2} \right] \theta_{1x} = -\frac{W}{S_1^2} + \frac{\alpha_1}{4(1-\alpha_1)(P-1)} \times \left[\frac{(1-Py_3 - D\dot{y}_3)^2}{1-y_3} - \frac{(1+Py_3 + D\dot{y}_3)^2}{1+y_3} \right] + \frac{\alpha\alpha_1 y_3}{4(1-\alpha_1)(P-1)} \left[\frac{(1-Px_3 - D\dot{x}_3)^2}{1-x_3} + \frac{(1+Px_3 + D\dot{x}_3)^2}{1+x_3} \right] - \frac{\alpha_1(\sqrt{x_3^2 + y_3^2} - n_1)H(\sqrt{x_3^2 + y_3^2} - n_1)}{(1-\alpha_1)S_3^2} \times (\cos\psi_D + \mu \sin\psi_D) \quad (46)$$

$$\ddot{x}_4 + \frac{2\zeta}{\beta_{21}\alpha_3 S_1} \dot{x}_4 + S\Omega\beta_{22}\dot{y}_4 + \frac{\beta_{23}}{\alpha_3 S_2^2} x_4 + \frac{\beta_{24}}{\alpha_3 S_2^2} x_2 - \frac{\beta_{25}}{\alpha_3 S_2^2} x_3 - \frac{\beta_{26}}{\alpha_3 S_2^2} \theta_{1y} = \frac{US^2\Omega^2}{\beta_{21}} \cos(S\Omega\tau) \quad (47)$$

$$\ddot{y}_4 + \frac{2\zeta}{\beta_{21}\alpha_3 S_1} \dot{y}_4 - \Omega S\beta_{22}\dot{x}_4 + \frac{\beta_{23}}{\alpha_3 S_2^2} y_4 + \frac{\beta_{24}}{\alpha_3 S_2^2} y_2 - \frac{\beta_{25}}{\alpha_3 S_2^2} y_3 + \frac{\beta_{26}}{\alpha_3 S_2^2} \theta_{1x} = -\frac{W}{\beta_{21}S_1^2} + \frac{U\Omega^2 S_4^2}{\beta_{21}} \sin(S\Omega\tau) \quad (48)$$

۳. الگوریتم حل عددی و ابزارهای تحلیل رفتارهای غیرخطی

تعداد اندکی از معادلات دیفرانسیل حل تحلیلی و دقیق دارند که اغلب پیچیده و زمان‌بر می‌باشد. به همین دلیل روش‌های حل عددی، به روشی کارآمد در حل معادلات دیفرانسیل تبدیل

دوره تناوب n باشد، در هر گام مشخص، n نقطه مجزا روی منحنی دیده خواهد شد. در نهایت اگر حرکت شبه‌تناوبی یا آشوبناک باشد، ستونی از نقاط روی منحنی مشاهده می‌شود. در این حالت با مراجعه به مقاطع پوانکاره می‌توان حرکت شبه‌تناوبی را از حرکت آشوبناک تشخیص داد [۲۶].

نماهای لیاپانوف در سال ۱۸۹۲ م توسط لیاپانوف، ریاضی‌دان روسی، برای بررسی پایداری معادلات دیفرانسیل غیرخطی مورد استفاده قرار گرفتند. ماکزیمم نمای لیاپانوف می‌تواند به‌عنوان ابزاری برای تشخیص آشوب در یک سیستم مکانیکی استفاده گردد. برای اینکه یک سیستم را آشوبناک بنامیم باید نشان دهیم که دو مسیر در فضای فازی که از دو نقطه نزدیک به هم شروع می‌شوند، خیلی سریع به‌طور نمایی از هم واگرا شده و آینده متفاوتی پیدا می‌کنند. چنانچه ماکزیمم نمای لیاپانوف مثبت باشد حرکت آشوبناک است و در غیر این‌صورت حرکت منظم خواهد بود. بنابراین ماکزیمم نمای لیاپانوف صفر، مرز میان رفتار آشوبناک و منظم می‌باشد [۲۲-۲۴].

۴. نتایج و بحث

وجود اصطکاک در یک یاتاقان علاوه بر کاهش عمر آن، محدودیت استفاده از یاتاقان در سرعت‌های بالا را به‌همراه خواهد داشت. اصطکاک در یک یاتاقان می‌تواند تابعی از مواد استفاده‌شده در ساخت آن و ویسکوزیته سیال روانکار باشد. در این قسمت به ازای مقادیر مختلفی از لقی در یاتاقان‌های کمکی، تأثیر ضریب اصطکاک بر رفتار غیرخطی سیستم بررسی می‌گردد. شکل ۴ نمودارهای دوشاخه‌ای پاسخ دیسک‌های d_1 و d_2 را با تغییر پارامتر کنترلی μ ، در پارامترهای لقی بدون بعد $n_1=0.4$ و $n_1=0.5$ و $n_1=0.6$ نشان می‌دهد. به ازای پارامتر لقی بدون بعد $n_1=0.4$ حرکت تناوبی در محدوده نسبتاً وسیع $\mu=[0.1 \sim 0.678]$ قابل دستیابی است. این حرکت تناوبی ناگهان به یک جاذب نامنظم در $\mu=0.679$ پرش می‌کند و رفتار نامنظم ایجاد شده تا $\mu=0.8$ حفظ می‌شود. بنابراین $\mu=0.679$ یک مقدار آستانه^۹ است که بیشتر از این مقدار منجر به رفتار نامنظم سیستم می‌شود.

به ازای پارامتر لقی بدون بعد $n_1=0.5$ نمودار دوشاخگی شدن، در محدوده $\mu=[0.1 \sim 0.572]$ دارای رفتار تناوبی است. پس از آن در مقدار آستانه^۹ $\mu=0.573$ دچار رفتار نامنظم شده و رفتار نامنظم ایجاد شده تا $\mu=0.8$ حفظ می‌شود. به ازای پارامتر

لقى بدون بعد $n_1=0.6$ حرکت تناوبی در کل محدوده حفظ شده و تغییر ضریب اصطکاک روی پاسخ دینامیکی سیستم اثرگذار نیست. این موضوع نشان‌دهنده عدم تماس روتور انعطاف‌پذیر داخلی با یاتاقان‌های کمکی است. به‌عبارت دیگر، وقتی پارامتر لقی یاتاقان‌های کمکی برابر با ۰.۶ باشد، تعلیق مجموعه روتور هم‌محور مورد نظر فقط با یاتاقان‌های مغناطیسی فعال انجام می‌شود.

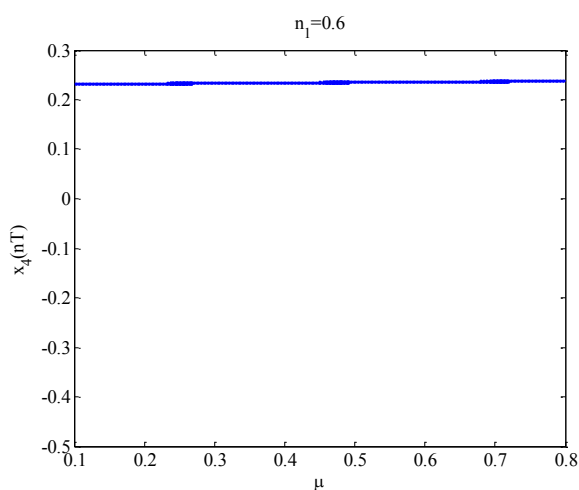
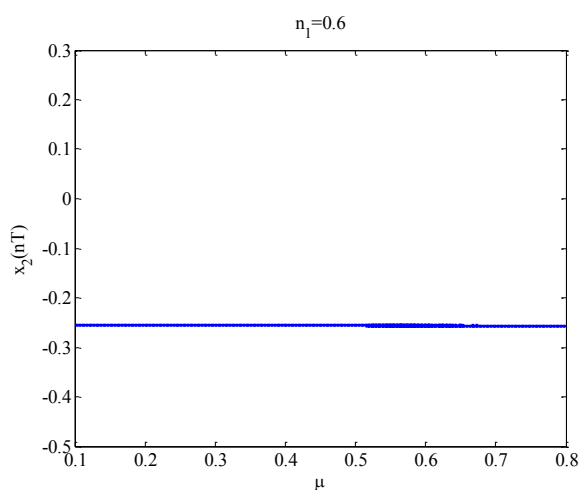
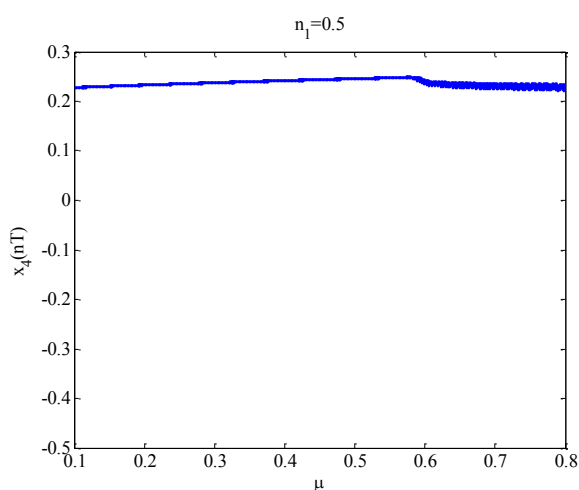
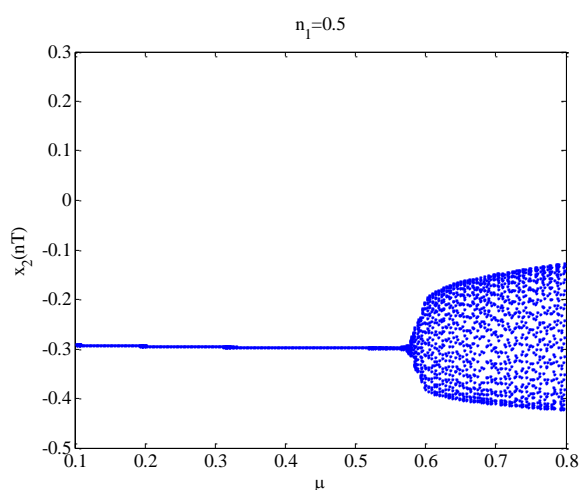
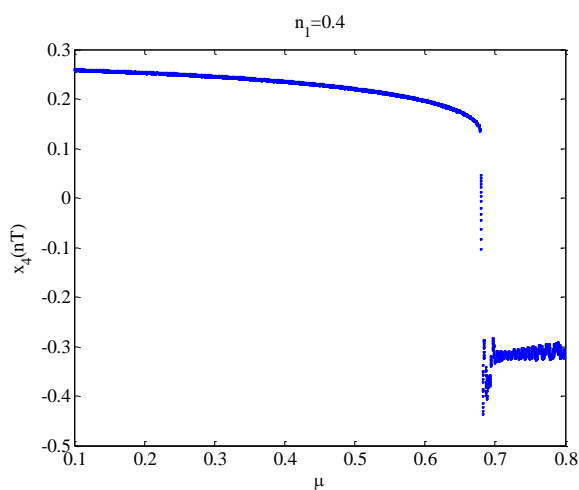
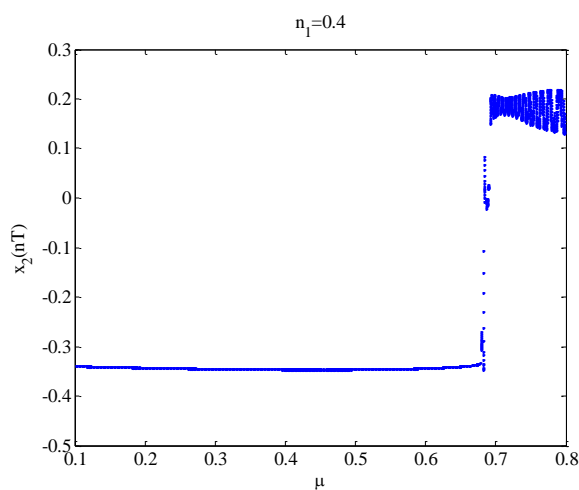
از دیگر تکنیک‌های شناسایی نیز برای بررسی و تأیید دقیق‌تر رفتار دینامیکی سیستم استفاده شده است. برای این منظور در شکل ۵ مسیرهای چرخشی دیسک d_1 طیف توان x_2 و مقطع پوانکاره دیسک d_1 در $\mu=0.75$ و $n_1=0.4$ نشان داده شده است. توده نقاط متراکم و نامنظم در مقطع پوانکاره و همچنین طیف گسترده نمودار طیف توان بیانگر رفتار آشوبناک سیستم می‌باشد. برای اطمینان کامل از وقوع آشوب در $\mu=0.75$ ، از ابزار ماکزیمم نمای لیاپانوف نیز استفاده شده است. با توجه به شکل ۶ مثبت بودن ماکزیمم نمای لیاپانوف وجود پدیده آشوب را تأیید می‌کند.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله تحلیل دینامیک غیرخطی یک سیستم روتور هم‌محور مجهز به دو AMB و دو یاتاقان کمکی انجام شد. سیستم مورد نظر با ده درجه آزادی در دو صفحه طولی عمود بر هم مدلسازی شد. در این مدل، انعطاف‌پذیری شافت داخلی، کوپلینگ ارتعاشات عرضی بین شافت داخلی و شافت خارجی، ممان‌های ژيروسکوپی دیسک‌ها و کوپلینگ هندسی بین قطب‌های AMB در نظر گرفته شده است. مسیرهای مداری، طیف توان، مقاطع پوانکاره و نمودارهای دوشاخگی برای تحلیل رفتار غیرخطی سیستم به‌کار گرفته شدند. نتایج نشان داد که اصطکاک و لقی در یاتاقان‌های کمکی آثار قابل ملاحظه‌ای روی پاسخ‌های دینامیکی سیستم روتور هم‌محور - AMB دارند. رفتارهای غیرخطی متنوعی نیز از جمله پدیده پرش و حرکات آشوبناک برای سیستم آشکار شد. همچنین نتایج نشان داد که در صورت وقوع تماس، با تغییر ضریب اصطکاک و لقی در یاتاقان‌های کمکی، رفتار روتور داخلی بیشتر از روتور خارجی تحت تأثیر قرار می‌گیرد. همچنین با کاهش لقی در یاتاقان‌های کمکی می‌توان وقوع رفتار آشوبناک را به تأخیر انداخت و محدوده وسیع‌تری از پاسخ تناوبی را برای سیستم ایجاد نمود. نکته دیگر اینکه مقدار

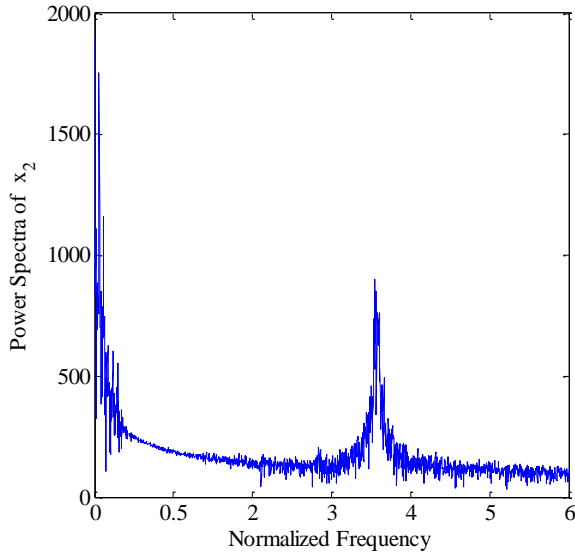
نمود که به ازای مقادیر کمتر از آن رفتار سیستم تناوبی است.

آستانه برای ضریب اصطکاک یاتاقان‌های کمکی می‌توان معرفی

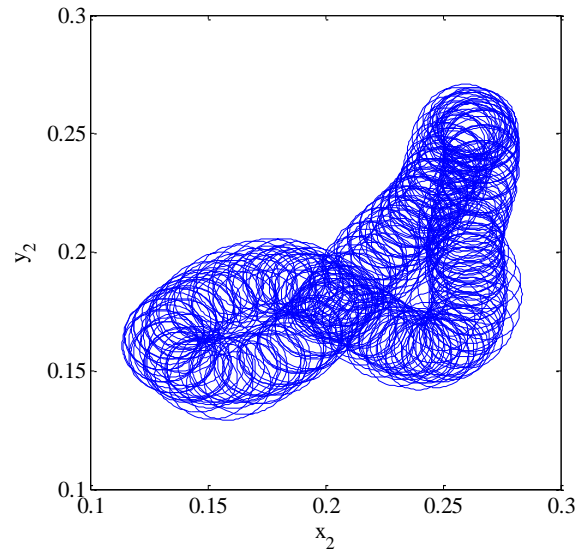


شکل ۵. نمودارهای دوشاخگی جابه‌جایی افقی بدون بعد دیسک d_1 و d_2 با تغییر پارامتر نابالانسی μ به ازای $S=4$ ، $\Omega=-1$ ، $W=0$ ، $a_2=4.761$ ، $a_3=0.49 \times 10^{-4}$ ،

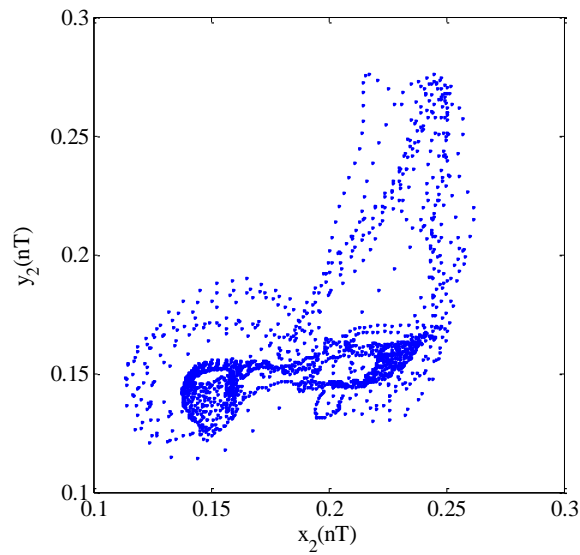
$$D=0.04 \text{ و } P=1.1, \alpha_3=0.55, \alpha_2=0.045, \alpha_1=0.333, \alpha=0.24, U=0.1, S_3=1.688, S_2=0.3, S_1=8.062$$



(ب)

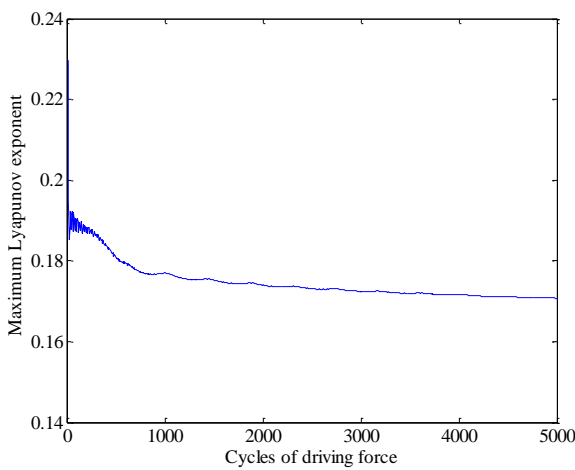


(ف)

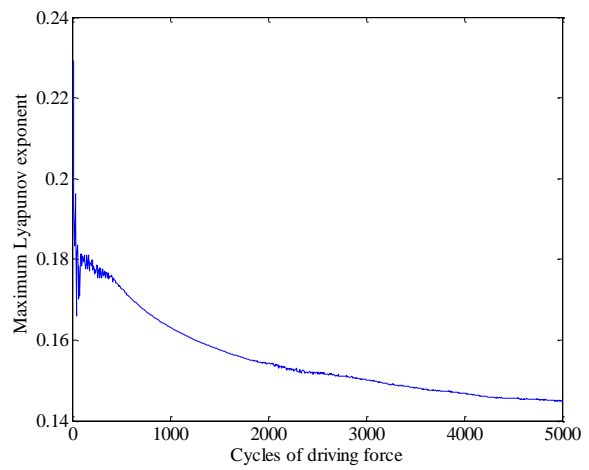


(ج)

شکل ۶. نمودار الف) مسیرهای چرخشی، ب) طیف توان، ج) مقطع پوانکاره در $\mu=0.75$ و $n_1=0.4$



(ب)



(ف)

شکل ۷. نمودار ماکزیمم نمای لیابانوف در الف) $\mu=0.75$ و $n_1=0.4$ ب) $\mu=0.75$ و $n_1=0.5$

فهرست علائم

فعال D (A)	A_p	مساحت یک قطب مغناطیسی (m^2)
جریان کنترلی در قطب‌های قائم یاتاقان مغناطیسی	C	ضریب میرایی خارجی ($\frac{N.s}{m}$)
فعال A (A)	D	بهره کنترلر مشتقی بدون بعد
جریان کنترلی در قطب‌های قائم یاتاقان مغناطیسی	\bar{D}	بهره کنترلر مشتقی ($\frac{A.s}{m}$)
فعال D (A)	E	مدول یانگ شافت داخلی ($\frac{N}{m^2}$)
سختی یاتاقان‌های کمکی ($\frac{N}{m}$)	e_A	عمق نفوذ شافت داخلی در یاتاقان کمکی A
سختی یاتاقان واسطه ($\frac{N}{m}$)	$F_{C_{x_1}}$	مؤلفه افقی نیروی تماس در یاتاقان کمکی A
طول شافت داخلی (m)	$F_{C_{x_3}}$	مؤلفه افقی نیروی تماس در یاتاقان کمکی D
جرم متمرکز در نقطه A (kg)	$F_{C_{y_1}}$	مؤلفه قائم نیروی تماس در یاتاقان کمکی A
جرم دیسک d_1 (kg)	$F_{C_{y_3}}$	مؤلفه قائم نیروی تماس در یاتاقان کمکی D
جرم متمرکز در نقطه D (kg)	$F_{M_{x_1}}$	مؤلفه افقی نیروی الکترومغناطیسی در یاتاقان مغناطیسی فعال A
جرم دیسک d_2 (kg)	$F_{M_{x_3}}$	مؤلفه افقی نیروی الکترومغناطیسی در یاتاقان مغناطیسی فعال D
تعداد دور سیم‌پیچ‌ها	$F_{M_{y_1}}$	مؤلفه قائم نیروی الکترومغناطیسی در یاتاقان مغناطیسی فعال A
بهره کنترلر تناسبی بدون بعد	$F_{M_{y_3}}$	مؤلفه قائم نیروی الکترومغناطیسی در یاتاقان مغناطیسی فعال D
بهره کنترلر تناسبی ($\frac{A}{m}$)	f_{n_A}	مؤلفه شعاعی نیروی تماس در یاتاقان کمکی A
شعاع دیسک d_1 (m)	f_{t_A}	مؤلفه مماسی نیروی تماس در یاتاقان کمکی A
شعاع داخلی دیسک d_2 (m)	g	ثابت گرانشی ($\frac{m}{s^2}$)
شعاع خارجی دیسک d_2 (m)	g_0	لقی شعاعی یاتاقان‌های مغناطیسی فعال (m)
پارامتر سرعت	g_1	لقی شعاعی یاتاقان‌های کمکی (m)
پارامتر نابالانسی	$H(\blacksquare)$	تابع هوپساید
پارامتر وزن	I	ممان اینرسی سطح مقطع شافت داخلی حول محور خنثی (m^4)
موقعیت محوری نقطه B (m)	I_0	جریان اولیه سیم‌پیچ‌ها (A)
موقعیت محوری نقطه C (m)	i_{x_1}	جریان کنترلی در قطب‌های افقی یاتاقان مغناطیسی فعال A (A)
موقعیت محوری دیسک d_2 (m)	i_{x_3}	جریان کنترلی در قطب‌های افقی یاتاقان مغناطیسی فعال A (A)
پارامتر کوپلینگ مغناطیسی		
نسبت موقعیت دیسک d_1 به طول شافت داخلی		
ضریب اصطکاک یاتاقان‌های کمکی		
ضریب تراوایی مغناطیسی خلا		
نسبت سرعت دو شافت		

۶. مأخذ

- [1] G. Ferraris, V. Maisonneuve, M. Lalanne, Prediction of the dynamic behavior of non symmetric coaxial co or counter-rotating rotors, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 195, No. 4, pp. 649-666, 1996.
- [2] H. W. D. Chiang, C. N. Hsu, S. H. Tu, Rotor-bearing analysis for turbomachinery single- and dual-rotor systems, *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 20, No. 6, pp. 1096-1104, 2004.
- [3] Z. Fei, S. Tong, C. Wei, Investigation of the dynamic characteristics of a dual rotor system and its start-up simulation based on finite element method, *Applied Physics & Engineering*, Vol. 14, No. 4, pp. 268-280, 2013.

- [4] Y. Yang, D. Cao, D. Wang, G. Jiang, Fixed-point rubbing characteristic analysis of a dual-rotor system based on the Lankarani-Nikravesh model, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 103, pp. 202-221, 2016.
- [5] Y. Yang, D. Cao, T. Yu, D. Wang, C. Li, Prediction of dynamic characteristics of a dual-rotor system with fixed point rubbing – Theoretical analysis and experimental study, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 115, pp. 253-261, 2016.
- [6] G. Schweitzer, E. Maslen, H. Bleuler, A. Traxler, M. Cole, P. Keogh, *Magnetic bearings: theory, design, and application to rotating machinery*, Springer, 2009.
- [7] A. Chiba, T. Fukao, O. Ichikawa, M. Oshima, M. Takemoto, DG. Dorrell, *Magnetic bearings and bearingless drives*, London: Elsevier, 2005.
- [8] J.C. Ji, A.Y.T. Leung, Non-linear oscillations of a rotor-magnetic bearing system under superharmonic resonance conditions, *International Journal of Nonlinear Mechanics*, Vol. 38, pp. 829-835, 2003.
- [9] W. Zhang, M.H. Yao, X.P. Zhan, Multi-pulse chaotic motions of a rotor-active magnetic bearing system with time-varying stiffness, *Chaos Solitons and Fractals*, Vol. 27, pp. 175-186, 2006.
- [10] W. Zhang, J.W. Zu, Transient, steady nonlinear responses for a rotor-active magnetic bearings system with time-varying stiffness, *Chaos Solitons and Fractals*, Vol. 38, pp. 1152-1167, 2008.
- [11] J.I. Inayat-Hussain, Nonlinear dynamics of a magnetically supported rigid rotor in auxiliary bearings, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 45, pp. 1651-1667, 2010.
- [12] J.I. Inayat-Hussain, Multiple attractors in the response of a flexible rotor in active magnetic bearings with geometric coupling, *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 96, pp. 1-7, 2008.
- [13] J.I. Inayat-Hussain, Geometric coupling effects on the bifurcations of a flexible rotor response in active magnetic bearings, *Chaos Solitons and Fractals*, Vol. 41, pp. 2664-2671, 2009.
- [14] S. Ghaedi, M. Ghayour, R. Tikani, Influence of weight parameter on chaotic vibration of flexible rotor supported by active magnetic bearings, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 1, pp. 213-224, 2016. (in Persian)
- [15] M.J. Jang, C.K. Chen, Bifurcation analysis in flexible rotor supported by active magnetic bearings, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 11, No. 8, pp. 2163-2178, 2001.
- [16] H. Xie, G.T. Flowers, L. Feng, C. Lawrence, Steady-state dynamic behavior of a flexible rotor with auxiliary support from a clearance bearing, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 121, pp. 78-83, 1999.
- [17] R. Ebrahimi, M. Ghayour, H.M. Khanlo, Chaotic vibration analysis of a coaxial rotor system in active magnetic bearings and contact with auxiliary bearings, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Vol. 12, 031012, 2016.
- [18] Y. Ueda, Randomly transitional phenomena in the system governed by Duffing's equation, *Journal of Statistical Physics*, Vol. 20, pp. 181-196, 1979.
- [19] G. M. Jenkins, D. G. Watt, *Spectral analysis and its applications*, Michigan: Holden-Day, 1969.
- [20] F. C. Moon, *Chaotic vibration, an introduction for applied scientists and engineers*, New Jersey: John Wiley, 2004.
- [21] Y. Chen, *Bifurcation and chaos in engineering*, Springer, 1998.
- [22] Xu. Jianxue, Some advances on global analysis of nonlinear systems, *Chaos Solitons and Fractals*, Vol. 39, pp. 1839-48, 2009.
- [23] A. H. Nayfeh, B. Balachandran, *Applied nonlinear dynamics: analytical, computational and experimental methods*, New York, Wiley, 1995.
- [24] A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, J.A. Vastano, Determining lyapunov exponents from a time series, *Physica*, Vol. 16, pp. 285-317, 1985.

-
1. active magnetic bearing
 2. Newmark
 3. beating
 4. super harmonic
 5. asymptotic perturbation method
 6. geometric coupling
 7. eddy current
 8. hysteresis
 9. threshold