تعیین بردار سرعت یک جسم در حال حرکت به کمک داده‌های جی. پی. اس. باآنالیز و دسته‌بندی الگوریتم‌های مختلف مشتق‌گیری عددی

امیر پورصادق سادات محله[۱]، مهدی پورقلی[۲]، علیرضا یزدی‌زاده[۳]

۱ دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید بهشتی، گروه کنترل، تهران

۲ استادیار، دانشگاه شهید بهشتی، گروه کنترل، تهران، m_pourgholi@sbu.ac.ir

۳ دانشیار، دانشگاه شهید بهشتی، گروه کنترل، تهران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۹/۲۳

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۳/۱۳

چکیده

محاسبهٔ نرخ تغییرات یا به‌عبارتی مشتق‌گیری از سیگنال‌های دیجیتال همواره از مهم‌ترین چالش‌های موجود در زمینهٔ پردازش سیگنال‌های دیجیتال بوده است. این در حالی است که در کاربردهای مختلف به ناچار باید به مشتق‌گیری از سیگنال‌های دیجیتال پرداخت. در بسیاری از کاربردها استفاده از روش‌های مرسوم مشتق‌گیری ناکارآمد است و منجر به افزایش شدید خطا و نویز تا حدود چند ده برابر می‌شوند. در این مقاله محاسبهٔ سرعت از روی داده-های همراه با نویز و گسسته در متغیر حالتِ مکان با روش‌های مختلف از لحاظ تئوری و عملی بررسی و مقایسه و در ادامه بهترین روش محاسبهٔ نرخ تغییرات (مشتق‌گیری) برای کاربرد مذکور استخراج شده است. با بررسی‌های انجام‌شده ملاحظه می‌شود که روش فیلتر کالمن مناسب‌ترین عملکرد را در کمینه‌کردن مجموع مربعات خطا برای کاربرد محاسبهٔ مشتق از داده‌های جی. پی. اس. دارد و به‌خوبی با فیلتر مناسب داده‌ها آثار نویز و خطا را از بین می‌برد. استفاده از روش فیلتر کالمن دارای حالت گذرای مناسب نیست. این مشکل با اصلاح روش و به‌کارگیری فیلتر کالمن تطبیقی با وزن‌دهی مناسب به داده‌های عملکرد حالت گذرا را نیز تا حد خوبی بهبود داده است. نتایج حاصل از اعمال الگوریتم‌های مورد بحث روی داده‌های واقعی جی. پی. اس. برای استخراج بردار سرعت لحظه‌ای گزارش شده است.

واژگان کلیدی

پاسخ فرکانسی، تخمین سرعت، فیلتر کالمن تطبیقی، مشتق‌گیر، داده‌های جی. پی. اس.

۱. مقدمه

در بسیاری از کاربردهای تئوری و عملی، به محاسبهٔ مشتق توابعی که با داده‌ها مشخص شده‌اند نیاز است. در این مواقع استفاده از روش‌های مرسوم تفاضلی ناکارآمد است؛ زیرا خطایی کوچک در داده‌ها سبب ایجاد خطایی بسیار بزرگ در مشتق می‌شود [۱-۲]،

یا وجود نویز در داده‌ها سبب بزرگ‌شدن اثر نویز در مشتق می‌گردد [۳–۴].

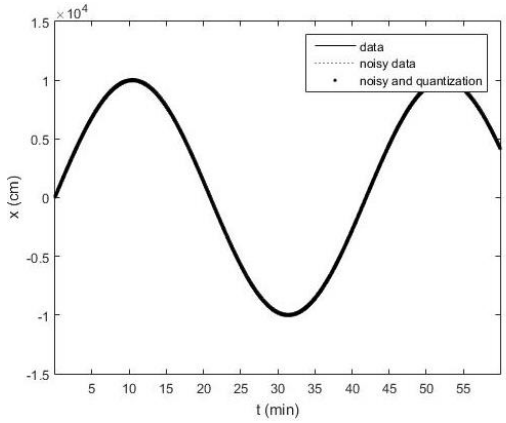
تینگنا و همکاران (۲۰۱۵) به‌کمک موقعیت‌های مختلف رتور در موتور مغناطیس دائم همزمان، به‌روش فیلتر کالمن خود تنظیم، خطای سرعت را تحلیل کرده‌اند [۵]. رونز و همکاران (۲۰۱۳) به بیان پاره‌ای از مشکلات مشتق‌گیرهای عددی در محاسبهٔ سرعت و شتاب از روی داده‌های متناوب در نزدیکی رژیم گذرا با استفاده از روش‌های تطبیقی پرداخته‌اند [۶]. همچنین ایگر و همکاران (۲۰۱۶) به بحث فیزیکی بردارهای سرعت و شتاب لحظه‌ای و همچنین مشتقات مراتب بالاتر پرداخته‌اند [۷]. شیرانگ و همکاران [۲۰۱۷] در پژوهشی به آنالیز عملکرد الگوریتم تخمین سرعت البته به‌کمک حرکت ماهواره پرداخته و هنسن و همکاران (۲۰۱۸) در پژوهش خود از یک رؤیتگر غیرخطی برای تخمین سرعت از روی داده‌های جی. پی. اس. استفاده کرده‌اند [۹]. با توجه به اهمیت موضوع، هدف این مقاله آن است که برای داده‌های مکان گرفته شده با کمک جی. پی. اس.، که گسسته در زمان و مکان و خطادار و همراه با نویز هستند، با حذف نویز و آماده‌سازی داده‌ها، مشتق اول آن یعنی سرعت محاسبه شود. چون در این مقاله روابط و الگوریتم‌های متنوعی برای مشتق‌گیری عددی مورد بحث قرار گرفته است، نخست الگوریتم‌ها روی یک مسیر فرضی و تا حد ممکن منطبق با داده‌های جی. پی. اس. آزمایش شده تا در هر مرحله الگوریتم‌ها نیز ارزیابی شوند. فرض شده است اطلاعات مسیر فرضی به‌صورت تابع $x(t)$ برحسب سانتی‌متر و نویزی با توزیع یکنواخت با حداکثر ۵۰ سانتی‌متر به داده‌ها اضافه شده باشد. پردازنده‌ای که مکان را می‌دهد هشت بیتی است، لذا خطای گسسته‌سازی نیز برای داده‌ها داریم. فرکانس نمونه‌برداری ۵ هرتز است. مسیر حرکت در راستای x به صورت شکل ۱ است.

$$x(t) = 10000\, sin(\frac{t}{400})$$

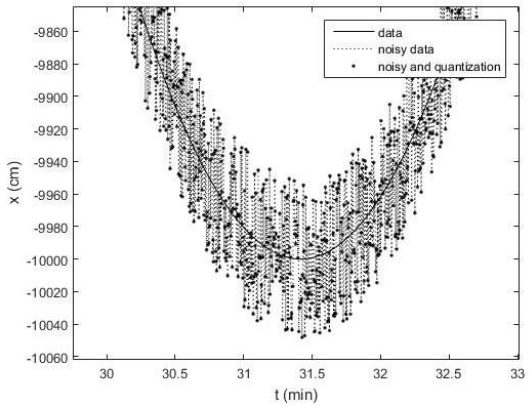
معیار ارزیابی روابط مجموع مربعات نسبی خطا با رابطهٔ ۱ در نظر گرفته شده است:

$$e_L^2 = \frac{\sum_{n=n_1}^{n_2}(v[n] - v_e[n])^2}{n_2 - n_1} \qquad (۱)$$

به‌طوری‌که در این رابطه $v[n]$ سرعت درست در هر لحظه، $v_e[n]$ سرعت تخمین زده شده در هر لحظه، n_1 لحظهٔ اولی که می‌توان سرعت را داشت، n_2 لحظهٔ انتهایی که می‌توان سرعت را داشت و e_L^2 مجموع مربعات نسبی خطای تعریف‌شده در این مقاله است. شکل ۲ نمایی از مسیر حرکت اصلی فرضی همراه با نویز و خطای گسسته‌سازی را در بخش کوچکی از مسیر نشان می‌دهد که مجموع مربعات نسبی خطا در کل مسیر از رابطهٔ ۱ برابر ۸۴۰ به‌دست می‌آید. در ادامه تمامی الگوریتم‌ها روی این مسیر فرضی که خطا و نویز آن مشخص است آزمایش شده و در انتها پس از ارائهٔ یک نتیجه‌گیری اولیه نتایج اعمال الگوریتم‌ها روی داده‌های واقعی جی. پی. اس. نیز آورده شده است.



شکل ۱. مسیر فرض‌شده برای حرکت



شکل ۲. قسمتی از مسیر فرضی با وجود نویز و خطای گسسته‌سازی

۲. الگوریتم‌های مبتنی بر بسط سری تیلور و درون‌یابی

روش‌های مختلف مشتق‌گیری مبتنی بر بسط تیلور در مرجع [۱۰] آمده است. با استفاده از برون‌یابی ریچاردسون می‌توان الگوریتم‌های جدیدی را برای محاسبهٔ مشتق استخراج کرد. نتایج تا دو مرحله برون‌یابی ریچاردسون به‌صورت جدول ۱ نشان داده

شده است که در آن T فاصلهٔ زمان نمونه‌برداری است. از طریق روابط برون‌یابی مانند استرلینگ[1] که در مرجع [۱۱] بیان شده یا روابط تقریب چند جمله‌ای در مرجع [۱۲] می‌توان روابط جدیدی برای محاسبهٔ مشتق‌گیری عددی استخراج کرد که نتایج آن در جدول ۲ آمده است. با دقت در روابط مشخص است که به ازای $N=3$ و $N=5$ روابط مشابه الگوریتم سوم و چهارم اویلر است. مجموع مربعات نسبی خطا برای این روابط روی این مسیر فرضی به‌صورت جدول‌های ۳ و ۴ است. اثر بزرگ‌شدن خطا و نویز در مجموع مربعات نسبی خطای سرعت نسبت به مکان به‌وضوح مشخص است و بر خلاف انتظار الگوریتم سوم (N=3) در روابط استخراج‌شده از تخمین چندجمله‌ای بهترین نتیجه را دارد که علت آن در ادامه بررسی خواهد شد. شکل سرعت ایده‌آل و سرعت استخراج‌شده از بهترین الگوریتم این روابط؛ یعنی همان $N=3$ در شکل ۳ آمده است که اختلاف بسیار زیاد با نتایج مطلوب به‌وضوح مشخص است. بدیهی است در صورت نویزدار بودن داده‌ها مشتق حاصل از الگوریتم‌های متداول مشتق‌گیری سبب چند برابر شدن اثر این نویز می‌شود. این مهم از مقایسهٔ عدد ۸۴۰، که مربوط به مجموع مربعات نسبی خطا برای داده‌های اصلی است، با داده‌های جدول‌های ۳ و ۴ قابل استنتاج است. در ادامه با ارائهٔ روش‌هایی سعی خواهد شد این مشکل برطرف شود.

جدول ۱. الگوریتم‌های اول تا پنجم برای فرمول‌های مشتق استخراج‌شده از بسط سری تیلور

الگوریتم	فرمول مشتق‌گیری	مرتبهٔ خطا
اول	$\dot{f}[n]=\frac{f[n+T]-f[n]}{T}$	$o(h)$
دوم	$\dot{f}[n]=\frac{f[n]-f[n-T]}{T}$	$o(h)$
سوم	$\dot{f}[n]=\frac{f[n+T]-f[n-T]}{2T}$	$o(h^2)$
چهارم	$\dot{f}[n]=\frac{-f[n+2T]+8f[n+T]-8f[n-T]+f[n-2T]}{12T}$	$o(h^4)$
پنجم	$\dot{f}[n]=\frac{f[n+4T]-40f[n+2T]+256f[n+T]-256f[n-T]+40f[n-2T]-f[n+4T]}{360T}$	$o(h^6)$

جدول ۲. فرمول‌های مشتق‌گیری مرتبه اول **N** نقطه‌ای استخراج‌شده به‌روش تقریب چندجمله‌ای به تابع

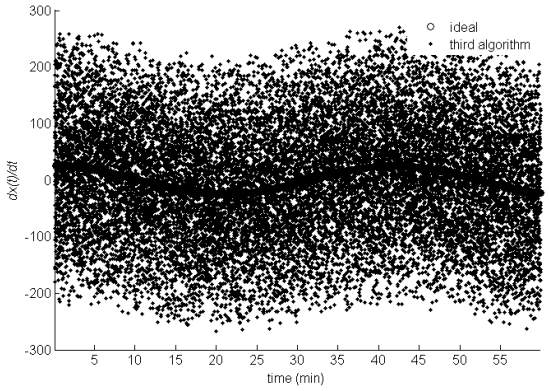
الگوریتم	فرمول مشتق‌گیری
به ازای $N=3$	$\dot{f}[n]=\frac{f[n+T]-f[n-T]}{2T}$
به ازای $N=5$	$\dot{f}[n]=\frac{-f[n+2T]+8f[n+T]-8f[n-T]+f[n-2T]}{12T}$
به ازای $N=7$	$\dot{f}[n]=\frac{f[n+3T]-9f[n+2T]+45f[n+T]-45f[n-T]+9f[n-2T]-f[n-3T]}{60T}$
به ازای $N=9$	$\dot{f}[n]=\frac{-3f[n+4T]+32f[n+3T]-168f[n+2T]+672f[n+T]-672f[n-T]+168f[n-2T]-32f[n-3T]+3f[n+4T]}{840T}$

جدول ۳. مجموع مربعات نسبی خطا برای الگوریتم‌های اول تا پنجم استخراج شده از بسط سری تیلور

الگوریتم اول	الگوریتم دوم	الگوریتم سوم	الگوریتم چهارم	الگوریتم پنجم
۴۱۶۸۷	۴۱۶۸۷	۱۰۳۶۱	۱۸۷۵۷	۲۱۵۴۲

جدول ۴. مجموع مربعات نسبی خطا برای الگوریتم‌های استخراج‌شده از تقریب چندجمله‌ای

$N=9$	$N=7$	$N=5$	$N=3$
۲۴۴۷۴	۲۴۴۷۷	۱۸۸۷۳	۱۰۴۴۶



شکل ۳. سرعت واقعی و سرعت استخراج‌شده از بهترین الگوریتم مبتنی بر اویلر یعنی الگوریتم سوم

۲-۱. طراحی فیلترهای مشتق‌گیر

پاسخ فرکانسی فیلتر مشتق‌گیر ایده‌آل در حالت گسسته به‌صورت زیر است:

$$H_d(j\omega) = j\omega \quad 0 \le |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \tag{۲}$$

که بیانگر این است که فیلتر مشتق‌گیر ایده‌آل دارای فاز ثابت $\pi/2$ در همهٔ فرکانس‌هاست و اندازهٔ آن خطی است. با محاسبهٔ عکس تبدیل فوریه این فیلتر برای محاسبهٔ پاسخ ضربهٔ این فیلتر داریم:

$$\begin{aligned} h(nT) &= \frac{1}{\omega_s}\int_{\frac{-\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} j\omega e^{j\omega nT} d\omega \\ &= -\frac{1}{\omega_s}\int_{0}^{\frac{\omega_s}{2}} 2\,\omega sin(\omega nT) d\omega \\ h(nT) &= \begin{cases} 0 & for\ n=0 \\ \frac{1}{nT} cos\pi n & otherwise \end{cases} \end{aligned} \tag{۳}$$

با استفاده از پنجرهٔ مستطیلی [۸] و سپس تبدیل Z گرفتن از سیگنال حاصل داریم:

$$H_\omega(z) = \frac{1}{6T}(2z^3 - 3z^2 + 6z - 6z^{-1} + 3z^{-2} - 2z^{-3}) \tag{۴}$$

شکل پاسخ فرکانسی آن (تبدیل فوریه) در حالت آفلاین به‌صورت شکل ۴ است. (فرکانس نمونه برداری $f_s = 5Hz$ است، لذا تمامی شکل‌های پاسخ فرکانسی در بازه $0 \le f \le \frac{f_s}{2}$ رسم شده‌اند.) همان‌گونه که مشاهده می‌شود دارای ناهمواری‌های در اندازهٔ پاسخ فرکانسی است. در مراجع [۱۱]، [۱۳] و [۱۵] روش‌هایی برای حذف ناهمواری‌های اندازه در پاسخ فرکانسی پیشنهاد شده که در شکل ۵ است بهبود اندازهٔ پاسخ فرکانسی با استفاده از این روش‌ها نمایش داده شده است.

مجموع مربعات نسبی خطا برای اعمال این الگوریتم‌ها روی مسیر فرضی در نظر گرفته شده به‌صورت جدول ۵ است. با نگاه دقیق‌تر به فاز پاسخ‌های فرکانسی رسم شده مشخص است که همگی دارای فاز ثابت ۹۰ درجه هستند و مشکلی در فاز برای طراحی فیلتر مشتق‌گیر (برای پیاده‌سازی آفلاین) وجود ندارد و تمرکز اصلی روی بهبود اندازهٔ پاسخ فرکانسی است. با ملاحظهٔ پاسخ زمانی الگوریتم‌های مختلف بررسی شده مشخص است که همگی (به‌جز الگوریتم اول و دوم اویلر) حول نقطهٔ صفر پادمتقارن هستند.

۲-۲. تحلیل پاسخ فرکانسی فیلترها و تحلیل فاز آنها و رابطهٔ آنها با تأخیر

در حالت کلی برای یک فیلتر دیجیتال می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} &{}^{\omega}H = R(\omega) + jI(\omega) \qquad \omega = 2\pi f \\ &|{}^{\omega}H| = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} \\ &p(\omega) = arctan\left(\frac{I(\omega)}{R(\omega)}\right) \\ &{}^{\omega}H(\omega) = |{}^{\omega}H(\omega)|e^{jp(\omega)} \end{aligned} \tag{۵}$$

که در آن ${}^{\omega}H(\omega)$ همواره مثبت است و $p(\omega)$ دارای ناپیوستگی‌هایی است که این ناپیوستگی‌ها در زمانی رخ می‌دهد که اندازه بخواهد منفی شود، اما به‌علت همواره مثبت بودن اندازه

این اتفاق نمی‌تواند بیافتد، لذا اثر آن با جهش در فاز مشاهده می‌شود [۱۵]. این مشکل را می‌توان با نمایش ${}^{\omega}H(\omega)$ به فرم زیر حل کرد:

$$ {}^{\omega}H(\omega) = A(\omega)e^{j\theta(\omega)} \quad (۶)$$

که در آن $A(\omega)$ می‌تواند مثبت یا منفی باشد و $\theta(\omega)$ همواره پیوسته است. حال فرض کنیم در حالت خاص پاسخ فرکانسی یعنی $\theta(\omega)$ خطی باشد، لذا داریم:

$$\theta(\omega) = -M.\omega \quad (۷)$$

حال اگر فرض کنیم که پاسخ ضربهٔ فیلتر همواره دارای مقادیر حقیقی است و سیگنال ورودی نیز به‌صورت تابع $x_1[n] = \cos(\omega_1 n + \varphi_1)$ باشد؛ عبور سیگنال $x_1[n]$ از فیلتر ${}^{\omega}H(\omega)$ به‌صورت زیر خواهد بود:

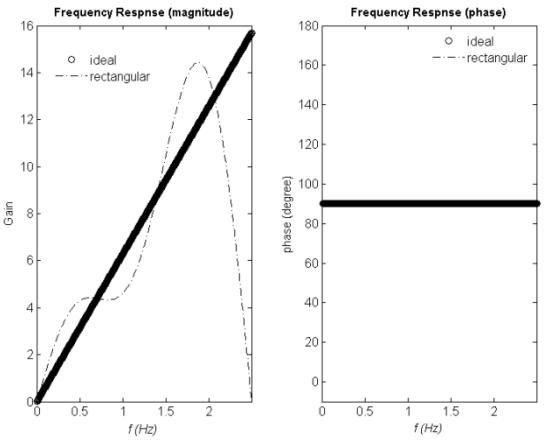
$$\begin{aligned} y_1[n] &= A(\omega_1)\, cos(\omega_1 n + \varphi_1 + \theta(\omega_1)) \\ y_1[n] &= A(\omega_1)\, cos\left(\omega_1\left(n + \frac{\theta(\omega_1)}{\omega_1}\right) + \varphi_1\right) \end{aligned} \quad (۸)$$

لذا این بیان که در فیلترهای دارای فاز خطی، فاز خطی موجب یک تأخیر ثابت در حوزهٔ زمان می‌شود [۱۴]، به‌وضوح در رابطهٔ ۸ مشخص است و مقدار این تأخیر $-\theta(\omega_1)/\omega_1$ است. باید توجه داشت که از لحاظ دیمانسیون این منحنی فاز خطی، که واحد آن رادیان است، منجر به تأخیر زمانی ثابت، که واحد آن ثانیه است، می‌شود. در واقع نکتهٔ بسیار مهم این است که تأخیر زمانی ایجادشده برای فیلتری که دارای فاز خطی است به فرکانس وابسته نیست (مستقل از فرکانس است).

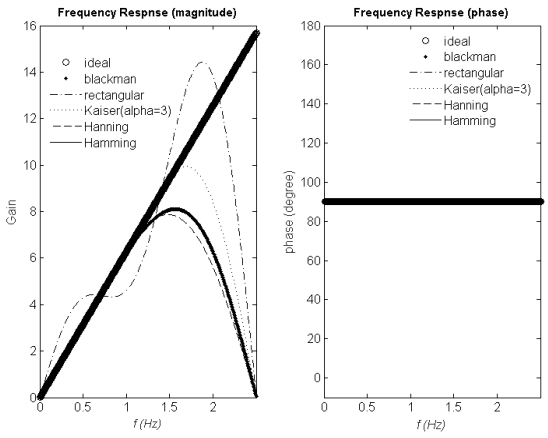
در حالت کلی برای فیلترهایی که پاسخ ضربهٔ متقارن و پادمتقارن دارند، منحنی فاز پاسخ فرکانسی خطی خواهد شد و در حالت پادمتقارن ۹۰ درجه فاز نیز اضافه خواهد شد [۱۱]، لذا تأخیر ثابتی در حوزهٔ زمان خواهیم داشت (این مهم به‌سادگی اثبات می‌شود). در حالت کلی تأخیر برابر زمانی است که حول آن تقارن داریم.

۲-۳. نگاهی به الگوریتم‌های مبتنی بر اویلر و درونیابی از دیدگاه تئوری فیلترها

منحنی اندازه و فاز آن برای پیاده‌سازی آفلاین پاسخ فرکانسی الگوریتم‌های مبتنی بر اویلر و درون‌یابی، در شکل‌های ۶ و ۷ نمایش داده شده است. علت بهتربودن الگوریتم سوم اویلر و $N=3$ در الگوریتم‌های مبتنی بر درونیابی قابل درک است. چون مسیر فرضی در نظر گرفته شده نسبت به فرکانس نمونه‌برداری فرکانس پایینی دارد (اکثر داده‌های واقعی به‌خصوص داده‌های دریافتی از گیرنده‌ی جی. پی. اس. نیز به این صورت است) و پاسخ فرکانس این الگوریتم‌ها دارای فیلتر پایین‌گذر بهتری است، لذا این بهتر بودن نتیجه قابل توجیح است.



شکل ۴. پاسخ فرکانسی فیلتر مشتق‌گیر با طراحی پنجرهٔ مستطیلی



شکل ۵. پاسخ فرکانسی فیلترهای طراحی‌شده به روش پنجره‌ای

۲-٤. اصلاح الگوریتم‌های مبتنی بر درونیابی و اویلر با طراحی فیلتر پایین‌گذر ابتدایی

از جمله فیلترهایی که برای حذف نویز معرفی می‌شود، فیلتر میانگین‌گیر متحرک و فیلتر سینک[۲] است. فیلتر میانگین‌گیر متحرک دارای رابطهٔ ۹ است:

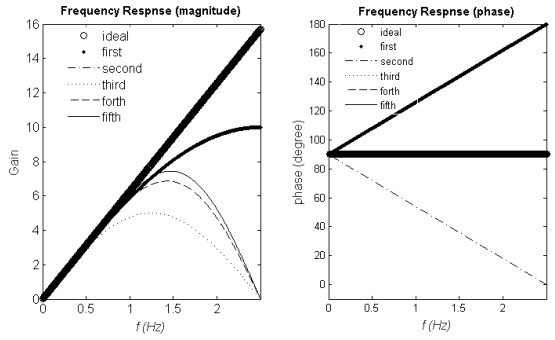
$$y[i] = \frac{i}{N}\sum_{j=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} x[i+j] \quad (۹)$$

همچنین فیلتر سینک دارای رابطهٔ ۱۰ است:

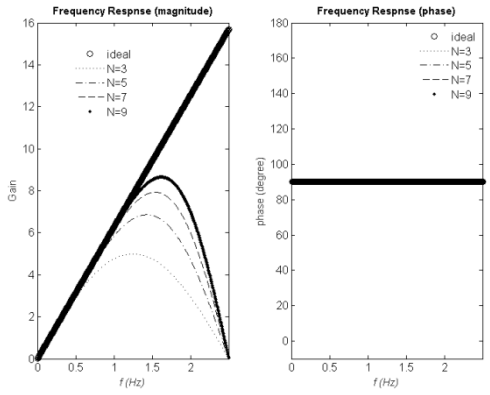
$$h[n] = \frac{sin(2\pi f, n)}{n\pi} \quad (۱۰)$$

که باز فیلتر سینک در پاسخ فرکانسی دارای ناهمواری است که با اصلاح بلکمن[3] تا حدودی می‌توان آن را برطرف نمود. مجموع مربعات نسبی خطا برای اعمال فیلتر پایین‌گذر ابتدایی و اعمال الگوریتم‌های اویلر و درونیابی در جدول‌های ۵ و ۶ آورده شده است. عملکرد بهتر فیلتر میانگین‌گیر متحرک مشهود است.

که باز فیلتر سینک در پاسخ فرکانسی دارای ناهمواری است که با اصلاح بلکمن تا حدودی می‌توان آن را برطرف کرد. مجموع مربعات نسبی خطا برای اعمال فیلتر پایین‌گذر ابتدایی و اعمال الگوریتم‌های اویلر و درون‌یابی در جدول‌های ۵ و ۶ آورده شده است. عملکرد بهتر فیلتر میانگین‌گیر متحرک مشهود است.



شکل ۶. پاسخ فرکانسی الگوریتم‌های اول تا پنجم استخراج‌شده از بسط تیلور



شکل ۷. پاسخ فرکانسی روش‌های مبتنی بر درونیابی

۲-۵. طراحی فیلترهای مشتق‌گیر مقاوم در حذف نویز

از جمله روش‌هایی که برای این منظور در [۱۲] پیشنهاد شده روش طراحی به روش ساویزکی - گولی[4] است. همچنین روش دیگری تحت نام مشتق‌گیر لانکزس[5] و عملکرد بسیار بهتر در [۱۶] و [۱۷] معرفی شده است. پاسخ زمانی این روش نهایتاً منجر به رابطهٔ ۱۱ می‌گردد:

$$\dot{f}(x) = \frac{\sum_{n=-k}^{k} n f(x+nh)}{2\sum_{n=1}^{k} n^2 h} \qquad (۱۱)$$

همان‌طور که از پاسخ فرکانسی این روش مشخص است، مورد استفادهٔ این روش زمانی است که فرکانس‌های موجود در سیگنال نسبت به نرخ نمونه‌برداری کوچک باشد و بدانیم نویزهایی در داده‌ها وجود دارد. مجموع مربعات نسبی خطا اعمال این الگوریتم‌ها روی مسیر حرکت در نظر گرفته شده به‌صورت جدول ۷ است. عملکرد مناسب این روش نسبت به الگوریتم‌های تا به اینجای کار مشخص است. لازم به ذکر است که هرچه N بزرگتر شود نتایج بهتر خواهد شد ولی N بیشتر معادل تأخیر زمانی بیشتر است و ممکن است سیستم نتواند این تاخیر را بپذیرد.

۳. روش‌هایی با تعمیم بحث فیلترها

در ادامه تمرکز روی الگوریتم‌های آنلاین است و از این پس پیاده‌سازی آنلاین روش‌ها را ارائه خواهیم کرد. در این قسمت به مقایسهٔ سه روش مشتق‌گیری، که به نوعی تعمیم بحث فیلترها است، می‌پردازیم. اولین روش همان پیاده‌سازی آنلاین روش مشتق‌گیری لانکزس است که همان‌طور که مشاهده شد در بین روش‌های آفلاین دارای بهترین نتیجه بود. دومین روش برگرفته از مرجع [۱۸] است.

جدول ۵. مجموع مربعات نسبی خطا برای الگوریتم‌های اول تا پنجم استخراج‌شده از بسط سری تیلور

پس از عبور از فیلتر میانگین‌گیر متحرک با $N = 11$ و فیلتر سینک با $N = 11$ و $f_c = 0.05$

همراه با فیلتر	الگوریتم اول	الگوریتم دوم	الگوریتم سوم	الگوریتم چهارم	الگوریتم پنجم
میانگین‌گیر متحرک	۴۲۲	۴۲۲	۲۱۳	۲۹۴	۳۱۷
سینک	۵۳۹	۵۳۹	۴۶۳	۵۲۸	۵۳۶

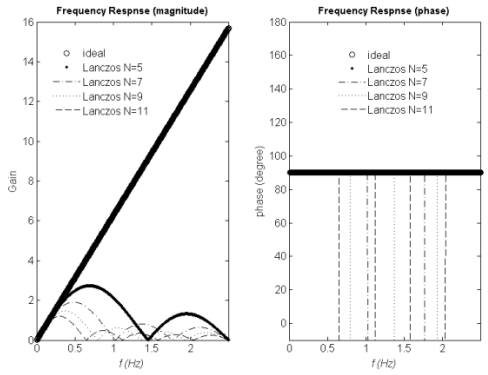
جدول ۶. مجموع مربعات نسبی خطا برای الگوریتم‌های استخراج شده از تقریب چندجمله‌ای

پس از عبور از فیلتر میانگین‌گیر متحرک با $N = 11$ و فیلتر سینک با $N = 11$ و $f_c = 0.05$

همراه با فیلتر	$N = 3$	$N = 5$	$N = 7$	$N = 9$
میانگین‌گیر متحرک	۲۱۲	۲۹۲	۳۳۴	۶۳۱
سینک	۴۶۵	۵۳۱	۵۴۲	۵۴۷

جدول ۷. مجموع مربعات نسبی خطا برای فرمول مشتق‌گیری مقاوم در از بین بردن نویز طراحی به روش مشتق‌گیر لانکزس

$N = 3$	$N = 5$	$N = 7$	$N = 9$
۲۰۱۹	۷۲۰	۳۳۴	۱۸۴



شکل ۸. پاسخ فرکانسی روش مشتق‌گیری مقاوم به روش مشتق‌گیر لانکزس

سومین روش ایدهٔ یافتن مشتق به روش طراحی کنترل‌کننده است که می‌تواند به‌عنوان نماینده‌ای از فیلترهای پاسخ ضربهٔ نامحدود[۶] تلقی گردد.

۳-۱. روش میانگین‌گیر متحرک تطبیقی

در مرجع [۱۸] به نوعی به طراحی یک فیلتر میانگین‌گیر متحرک پرداخته شده که می‌تواند مشکل تأخیر را حل کند. این روش با استفاده از یک الگوریتم تطبیقی تأخیر را طوری حداقل می‌کند که واریانس خطا مینیمم شود. در این روش ابتدا یک فیلتر میانگین‌گیر متحرک به شکل زیر به داده‌های مکان که خطادار و نویزی هستند اعمال می‌شود:

$$y[k] = \frac{x[k] + x[k+1] + x[k-2] + \cdots + x[k-n]]}{n} \quad (۱۲)$$

سپس از طریق الگوریتم دوم اویلر مشتق محاسبه می‌شود یعنی:

$$v(k) = \frac{y[k] - y[k-1]}{T} \quad (۱۳)$$

که با ترکیب دو رابطهٔ بالا، فرمول زیر برای مشتق‌گیری استخراج می‌شود:

$$v(k) = \frac{x[k] - x[k-n]}{nT} \quad (۱۴)$$

در این روش کار با به‌کارگیری یک الگوریتم تطبیقی مقدار n یعنی طول پنجره به‌دست می‌آید. باید $n = \max\{1,2,3,\dots\}$ به‌دست آید؛ به‌طوری‌که:

$$\left|y_{k-i} - {}^{L}y_{k-i}\right| \le d, \quad \forall i \in \{1,2,\dots,n\} \quad (۱۵)$$

که در آن ${}^{L}y_{k-i} = a_n + b_n(k-i)T$ است و داریم:

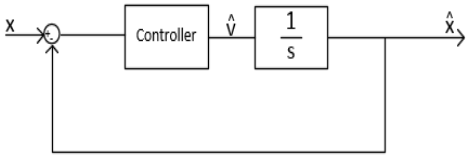
$$a_n = x_k - b_n(n-k)T \quad (۱۶)$$

$$\hat{v}_k = b_n = \frac{y_k - y_{k-n}}{nT}$$

که در [۱۸] اثبات شده این روش می‌تواند واریانس خطا به فرم خطای گسسته‌سازی مکانی را حداقل کند. در این روش انتخاب حداکثر طول پنجرهٔ ممکن و همچنین مقدار d (حداقل انحراف مجاز برای خط تخمین زده شده از نقاط مابین) چالش برانگیز است و باید در انتخاب آنا توجه جدی شود. در این مقاله برای شبیه‌سازی مقدار حداکثر طول پنجره ۲۰۰ و مقدار d برابر ۵۰ یعنی حداکثر خطایی که خود داده‌های مکان داشتند قرار داده شده است. انتخاب این مقادیر از جمله مشکلات این روش است که نمی‌توان آن را برای تمام داده‌ها تعمیم داد.

۳-۲. استخراج مشتق از طریق طراحی کنترل‌کننده برای سیستم انتگرال‌گیر دیجیتال

فرض کنیم حلقهٔ کنترلی شکل ۹ را داریم:



شکل ۹. حلقهٔ کنترلی درنظرگرفته شده برای طراحی الگوریتم مشتق‌گیر

در این صورت اگر بتوان کنترل‌کننده‌ای طراحی شود که بتواند به‌نحو مطلوبی x حذف نویز شده را تخمین بزند تلاش کنترلی یعنی $\hat{v}$ همان مشتق ما خواهد بود. باید توجه داشت که حلقهٔ کنترلی بالا را باید به‌صورت دیجیتال پیاده‌سازی شود. در اینجا $1/s$ یعنی انتگرال‌گیری را به‌صورت زیر پیاده‌سازی می‌کنیم:

$$\hat{x}(k) = \hat{x}(k-1) + \hat{v}(k-1)T$$
$$\frac{\hat{X}(z)}{\hat{V}(z)} = \frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}} \qquad (۱۷)$$

حال باید کنترل‌کننده طراحی شود. چون سیستم در دل خودش انتگرال‌گیر دارد، کنترل‌کننده را به یک بهرهٔ ساده k محدود می‌کنیم. به‌صورت تجربی ملاحظه می‌شود که اگر بهره از رابطهٔ زیر تعیین گردد می‌تواند به نحو مطلوبی x را فیلتر کند و در نتیجه $\hat{v}$ را تخمین بزند.

$$k = 0.001842\frac{\sqrt{\max(x)}}{\sqrt[3]{\max(noise)}} \qquad (۱۸)$$

با این کنترل‌کننده داریم:

$$\frac{\hat{X}(z)}{X(z)} = \frac{\frac{kTz^{-1}}{1-z^{-1}}}{1+\frac{kTz^{-1}}{1-z^{-1}}} = \frac{kTz^{-1}}{1+(kT-1)z^{-1}} = \frac{kT}{z+(kT-1)}$$
$$\frac{\hat{V}(z)}{X(z)} = \frac{k}{1+\frac{kTz^{-1}}{1-z^{-1}}} = \frac{k(1-z^{-1})}{1+(kT-1)z^{-1}} = \frac{k(z-1)}{z+(kT-1)} \qquad (۱۹)$$

البته باید توجه داشت که این بهرهٔ تجربی و این روابط در حالتی به‌دست آمده است که ما شناخت کافی از داده‌ها داریم و در حالت کلی این جواب نمی‌تواند پاسخگوی حل همهٔ مسائل باشد.

۳-۳. نتایج شبیه‌سازی این روش‌ها

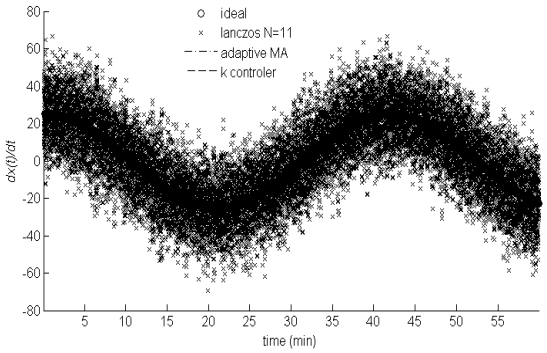
مجموع مربعات نسبی خطا این سه روش در جدول ۸ خلاصه شده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، بهبود قابل توجه در نتایج مشهود است. شکل‌های مشتق به‌صورت زیر است. همچنین طول پنجره‌هایی که الگوریتم تطبیقی، به‌دست آورده در شکل ۱۱ آورده شده است. مشخص است که در نزدیکی رخ‌دادن اکسترمم‌ها، چون سرعت نزدیک صفر است، از حداکثر طول پنجره بهره برده شده و وقتی که تغییرات سرعت بیشتر است از طول پنجرهٔ کمتری استفاده شده است.

جدول ۸. مجموع مربعات نسبی خطا برای سه الگوریتم آنلاین ذکرشده

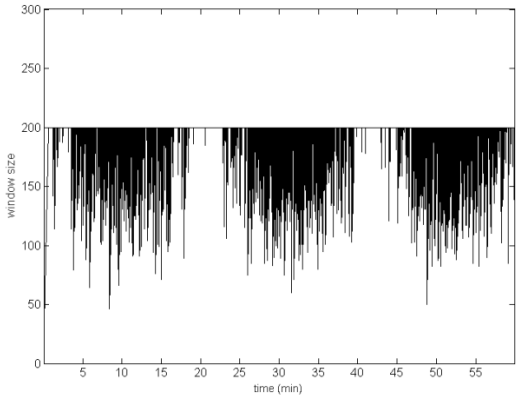
لانکزس با N = 11	میانگین‌گیر متحرک تطبیقی	کنترل‌کنندهٔ بهرهٔ ساده
۱۸۸/۳۷	۲/۰۵	۴/۰۷

٤. روش‌های تخمین و پیش‌بینی برای محاسبهٔ مشتق

روش تخمین حداقل مربعات یک روش کاملاً آفلاین است و پیاده‌سازی آنلاین آن نتایج چندان مطلوبی ندارد و حجم محاسبات بالایی را می‌طلبد. برای رفع مشکل استفاده از روش تخمین مینیمم واریانس بازگشتی پیشنهاد می‌شود [۱۹]. روش مینیمم واریانس بازگشتی را به نوعی می‌توان زیرمجموعهٔ روش فیلتر کالمن تلقی کرد؛ زیرا فیلتر کالمن به نوعی دینامیک متغیرها را نیز لحاظ کرده که در روش تخمین مینیمم واریانس اینگونه نیست. با درنظر گرفتن $Q=0$ در روش فیلتر کالمن همان نتایج روش مینیمم واریانس بازگشتی حاصل می‌گردد. لذا در مطالعه فقط روش فیلتر کالمن و سپس اصلاح آن به منظور بهبود نتایج را بررسی خواهد شد.



شکل ۱۰. نتیجهٔ حاصل از سه الگوریتم مشتق‌گیری آنلاین بررسی‌شده



شکل ۱۱. شکل طول پنجره‌های حاصل از الگوریتم میانگین‌گیر متحرک تطبیقی

۴-۱. روش فیلتر کالمن معمولی

فرض کنیم اندازه‌گیری‌ها با روابط زیر با مجهولات در ارتباط باشد:

$$y(k) = Hx(k) + w(k) \tag{۲۰}$$

که در آن $w(k)$ نویز اندازه‌گیری است و دارای شرایط زیر است:

$$E[w(k)] = 0 \qquad E[w(k)w^T(k)] = R(k) \tag{۲۱}$$

که *R(k)* ماتریسی ارزش اطلاعات و ثابت است، همچنین *y(k)* مقادیر اندازه‌گیری‌شده *H(k)* یک ماتریس معلوم که ارتباط‌دهندهٔ فضای مجهولات یعنی *x(k)* با فضای شناخته شده یعنی *y(k)* می‌باشد و ماتریس ثابتی است. *x(k)* متغیر مطلوب است. حال فرض کنیم x خود در طی گذشت زمان طبق رابطهٔ خطی و از پیش دانسته متحول می‌شود. این رابطه به‌صورت زیر است:

$$x(k+1) = F(k)x(k) + u(k) \tag{۲۲}$$

که در آن *u(k)* نویز و دارای شرایط زیر است:

$$E[u(k)] = 0 \qquad E[u(k)u^T(k)] = Q(k) \tag{۲۳}$$

شرایط حاکم بر *Q(k)* همانند *R(k)* است، از اینرو می‌توان آن را ثابت در نظر گرفت. *F(k)* ماتریسی است که *x(k)* مطابق آن متحول می‌شود.

با استفاده از قضیهٔ مینیمم واریانس ارتقایافته بیان شده و محاسبهٔ ماتریس کوواریانس در هر مرحله روابط زیر برای پیاده‌سازی فیلتر کالمن برای کاربرد این پژوهش استخراج می‌گردد.

$$P(k+1|k) = F(k)P(k|k)F^T(k) + Q(k) \tag{۲۴}$$

$$\hat{x}(k+1|k+1) = F(k)\hat{x}(k|k) + P(k+1|k)H^T(k+1)[H(k+1)P(k+1|k)H^T(k+1) + R(k+1)]^{-1}[y(k+1) - H(k+1)F(k)\hat{x}(k)] \tag{۲۵}$$

$$P(k+1|k+1) = P(k+1|k) - P(k+1|k)H^T[(k+1)[H(k+1)P(k+1|k)H^T(k+1) + R(k+1)]^{-1}[y(k+1 - H(k+1)P(k+1|k)] \tag{۲۶}$$

سه رابطهٔ اخیر در واقع ماهیت فیلتر کالمن را تشکیل می‌دهد. می‌توان گفت کار این فیلتر تخمین حالت *x(k)* است، وقتی که خود *x(k)* در طی معادلاتی متحول می‌شود. در اینجا نیز برای شبیه‌سازی از سه مدل سرعت ثابت، شتاب ثابت، جرک ثابت که به‌ترتیب دارای روابط زیر است استفاده می‌شود:

$$x(kT+1) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(kT) + u(kT) \qquad y(kT) = [1 \quad 0]x(kT) + w(kT) \tag{۲۷}$$

$$x(kT+1) = \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(kT) + u(kT) \qquad y(kT) = [1 \quad 0 \quad 0]x(kT) + w(kT) \tag{۲۸}$$

$$x(kT+1) = \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2} & \frac{T^3}{6} \\ 0 & 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(kT) + u(kT) \qquad y(kT) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]x(kT) + w(kT) \tag{۲۹}$$

برای شبیه‌سازی لازم است R و Q در روش فیلتر کالمن تنظیم شدند. ماتریس R واریانس نویز اندازه‌گیری است که با توجه به شکل نویز در نظر گرفته شده قابل استخراج است؛ هرچند می‌توان آن را به نوعی درجهٔ آزادی در نظر گرفت؛ زیرا مقدار آن

معمولاً به‌راحتی قابل دسترس نیست. با درنظر گرفتن واریانس نویز فرایند برابر q، ماتریس Q برای سه مدل در نظر گرفته شده، به‌صورت زیر قابل استخراج است:

$$Q_{fixed\ Acc.} = q\begin{bmatrix} \frac{T^5}{20} & \frac{T^4}{8} & \frac{T^3}{6} \\ \frac{T^4}{8} & \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^3}{6} & \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix}$$

$$Q_{fixed\ Jerk} = q\begin{bmatrix} \frac{T^7}{252} & \frac{T^6}{72} & \frac{T^5}{30} & \frac{T^4}{24} \\ \frac{T^6}{72} & \frac{T^5}{20} & \frac{T^4}{8} & \frac{T^3}{6} \\ \frac{T^5}{30} & \frac{T^4}{8} & \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^4}{24} & \frac{T^3}{6} & \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix}$$

در اینجا q آزادی عملی است که در اختیار است و باید با توجه به فرایند تنظیم شود. با در نظر گرفتن $R = 1$ و q مناسب و همچنین به‌علت اطلاعات دقیق از شرایط اولیه با فرض $P(0) = 10^{-4}I$، مجموع مربعات نسبی خطا با حذف ۳ دقیقهٔ اول به‌صورت جدول ۹ به‌دست آمده است.

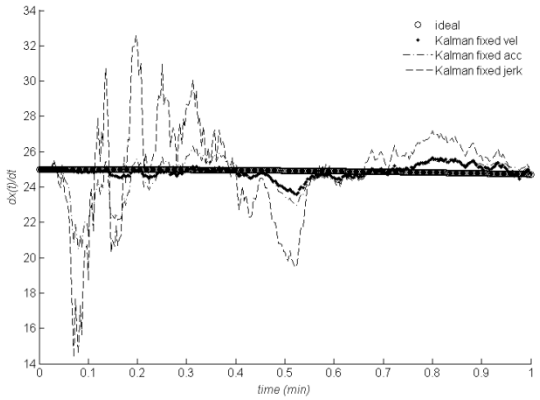
جدول ۹. مجموع مربعات نسبی خطا از سه مدل در روش فیلتر کالمن معمولی

مدل سرعت ثابت با $q = 10^{-4}$	مدل شتاب ثابت با $q = 10^{-9}$	مدل جرک ثابت با $q = 10^{-14}$
۰/۳۹۰۶	۰/۰۴۲۷	۰/۰۳۶۷

بهبود قابل توجه نتایج نشان‌دهندهٔ عملکرد مناسب این روش است. تنها ایراد این روش این است که نتایج دقایق ابتدایی آن مناسب نیست (شکل ۱۲).

۴-۲. اعمال روش فیلتر کالمن تطبیقی به‌منظور بهبود حالت گذرای پاسخ

هدف این قسمت از مقاله اصلاح روش فیلتر کالمن و بهبود نتایج است. روش فیلتر کالمن معمولی یک روش بهینهٔ تخمین حالت مینیمم واریانس است که از روی داده‌های اندازه‌گیری شده $y[0], y[1], \dots, y[k-1]$ به تخمین حالت $x(k)$ می‌پردازد. این روش وقتی دارای کارایی مناسب است که مدل دینامیکی در نظر گرفته شده برای سیستم و همچنین اندازه‌گیری‌ها مناسب باشند. وقتی این دو مناسب نباشند فیلتر کالمن می‌تواند حالت‌های اشتباهی را تخمین بزند و داری خطای زیادی باشد. فیلتر کالمن تطبیقی می‌تواند با حذف تاثیر داده‌های گذشته با استفاده از فاکتور فراموشی $\lambda(k) \geq 1$ بر روی معادلهٔ ماتریس کوواریانس به‌صورت زیر رفع این مشکل به‌کار رود [۲۰]:



شکل ۱۲. دقایق ابتدایی روش فیلتر کالمن معمولی

عملکرد روش فیلتر کالمن تطبیقی بالا که با نام فیلتر کالمن تطبیقی محو شونده[۷] شناخته می‌شود به شدت به $\lambda(k)$ وابسته است و باید یک الگوریتم بهینه برای محاسبهٔ آن به‌کار رود. در این مقاله یک کاربرد جدید از روش فیلتر کالمن تطبیقی را ارائه می‌شود. این روش قادر است که نتایج دقایق ابتدایی تخمین یا به‌نوعی حالت گذرای پاسخ تخمین را تا حد قابل قبولی بهبود بخشد. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، این روش می‌تواند نتایج ابتدای کار را بهبود بخشد. مجموع مربعات نسبی خطا از ابتدا تا انتهای حرکت برای روش فیلتر کالمن تطبیقی و فیلتر کالمن معمولی به ازای ماتریس Q مشابه یکدیگر و $P(0)$ مشابه و با تعیین R که حتی‌المقدور منجر به بهترین نتیجه گردد (با سعی و خطا) به‌صورت جدول ۱۰ می‌شود. همچنین شکل دقایق ابتدایی آن‌ها به صورت شکل ۱۳ است. مشاهده می‌شود که الگوریتم تطبیقی به خوبی توانسته در نتایج ابتدایی بهبود حاصل کند.

۵. اعمال نتایج به داده‌های واقعی جی. پی. اس.

در این قسمت بهترین الگوریتم‌های استخراج شده را روی یک مجموع داده‌های واقعی اعمال نموده و با استفاده از روش فیلتر کالمن تطبیقی تخمین لحظات اولیه را نیز بهبود خواهیم بخشید.

۵-۱. اعمال الگوریتم‌ها به مجموعهٔ اول داده‌ها

داده‌های طول و عرض جغرافیایی دریافتی از یک گیرندهٔ جی. پی. اس. به‌صورت شکل ۱۴ است.

جدول ۱۰. مقایسهٔ مجموع مربعات نسبی خطا برای دو روش فیلتر کالمن معمولی و تطبیقی با سه مدل در نظر گرفته شده

فیلتر کالمن معمولی	مدل سرعت ثابت با $R = 1$	مدل شتاب ثابت با $R = 1$	مدل جرک ثابت با $R = 1$
	۰/۴۱۴۰	۰/۵۸۰۳	۱/۱۳۵۹

فیلتر کالمن تطبیقی	مدل سرعت ثابت با $R = 0.7$	مدل شتاب ثابت با با $R = 820$	مدل جرک ثابت با $R = 5000$
	۰/۴۰۹۸	۰/۲۵۷۳	۰/۹۱۲۷

همان‌طور که پیش‌بینی می‌شد نتایج حاصل از اعمال طراحی کنترل‌کننده برای سیستم انتگرال‌گیر دیجیتال با یک گین ساده در پیاده‌سازی آنلاین دارای نتیجهٔ مطلوبی نبود. مجموع مربعات نسبی خطای جدید تعریف شده که بتواند دید بهتری نسبت به خطا بر حسب متر به ما بدهد به‌صورت رابطه ۳۰ استفاده شده است:

$$\boldsymbol{e_s^2 = \sum_{n=n_1}^{n_2} (v[n] - v_e[n])^2 \frac{\pi}{180} \times 6400000} \qquad (۳۰)$$

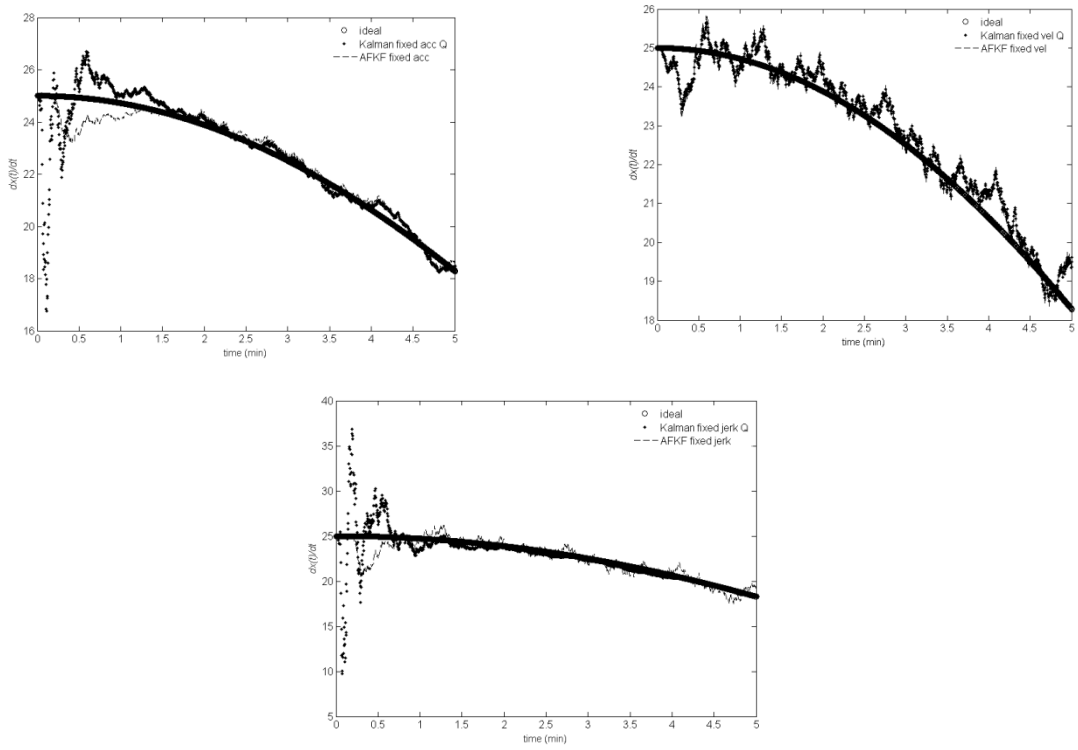
که در آن e_s^2 به‌طور تقریبی معادل با مجموع مربعات خطا برحسب متر است که در اینجا تعریف شده است. برای استفاده از فیلتر کالمن در هر سه مدل $R=1$ فرض گردیده و شرایط اولیه به‌صورت درست و $P(0) = 10^{-3}$ قرار داده شده است. q به‌ترتیب برابر $q = 10^{-1}$ و $q = 10^{-2}$ و $q = 10^{-3}$ برای مدل سرعت ثابت و شتاب ثابت و جرک ثابت در نظر گرفته شده است. با حذف ۳ دقیقهٔ اول مجموع مربعات خطا برای سرعت به‌صورت جدول ۱۱ به‌دست می‌آید. نتایج مشتقات حاصله به‌صورت شکل ۱۵ است. همچنین شکل خطای مشتق به‌صورت شکل ۱۶ است. در مجموع همانند نتایج داده‌های مسیر فرضی در نظر گرفته شده، می‌توان الگوریتم محاسبهٔ مشتق با روش فیلتر کالمن با مدل شتاب ثابت را بهتر از باقی روش‌ها ارزیابی کرد. سرعت‌های استخراج شده از روش فیلتر کالمن با دو مدل شتاب ثابت و جرک ثابت را به‌عنوان بهترین الگوریتم‌ها انتخاب کرده و به‌منظور بهتر کردن نتایج لحظات ابتدایی آن از روش تطبیقی استفاده می‌کنیم. چون این دو مدل همزمان مشتق اول و دوم را می‌توانند محاسبه کنند، لذا از این نظر نیز دارای اهمیت هستند. مجموع مربعات نسبی خطا در کل مسیر به‌صورت جدول ۱۲ است. بهبود نتایج فیلتر کالمن تطبیقی در شکل ۱۳ مشهود است. همچنین گفتنی است با روش تطبیقی حساسیت الگوریتم به مقدار R و Q کم می‌شود.

جدول ۱۱. مجموع مربعات خطا برای الگوریتم‌های لانکزس و میانگین‌گیر متحرک تطبیقی و مدل‌های مختلف در نظر گرفته شده برای فیلتر کالمن برای مشتق عرض جغرافیایی و طول جغرافیایی

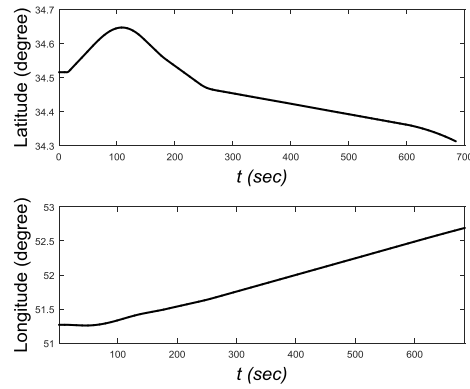
روش	عرض جغرافیایی	طول جغرافیایی
لانکزس با $N = 11$	۰/۲۴۱۹	۰/۲۴۵۲
میانگین‌گیر متحرک تطبیقی	۰/۶۹۶۵	۰/۶۵۳۹
کالمن با مدل سرعت ثابت و $q = 10^{-1}$	۰/۲۹۷۱	۰/۳۱۵۹
کالمن با مدل جرک ثابت و $q = 10^{-2}$	۰/۰۷۹۰	۰/۱۵۳۲

جدول ۱۲. مجموع مربعات خطا برای مشتق عرض جغرافیایی و طول جغرافیایی در کل حرکت برای روش فیلتر کالمن معمولی و تطبیقی با دو مدل شتاب ثابت و جرک ثابت

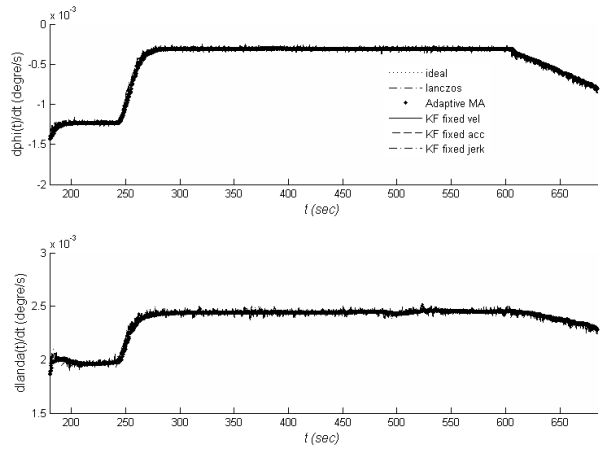
روش فیلتر کالمن	عرض جغرافیایی	طول جغرافیایی
تطبیقی شتاب ثابت	۰/۸۸۳۱	۰/۱۳۹۶
تطبیقی جرک ثابت	۰/۲۹۴۱	۰/۲۱۶۴
معمولی شتاب ثابت	۱/۵۸۴۰	۰/۱۷۲۱
معمولی جرک ثابت	۴/۱۸۹۰	۰/۳۸۱۹



شکل ۱۳. مقایسهٔ ۱۰ دقیقهٔ ابتدایی فیلتر کالمن معمولی و تطبیقی



شکل ۱۴. داده‌های دریافتی از جی. پی. اس. (طول جغرافیایی و عرض جغرافیایی) برای یک جسم در حال حرکت



شکل ۱۵. مشتق‌های طول و عرض جغرافیایی یک جسم در حال حرکت

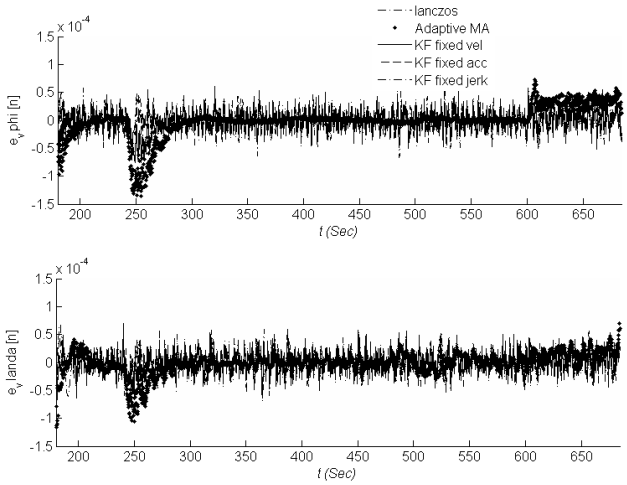
با استفاده از الگوریتم‌های لانکزس و میانگین‌گیر متحرک تطبیقی و مدل‌های مختلف در نظر گرفته شده برای فیلتر کالمن

۵-۲. اعمال روش فیلتر کالمن معمولی و تطبیقی به‌عنوان بهترین روش‌ها با معیار درنظر گرفته شده روی مجموعهٔ دوم داده‌ها

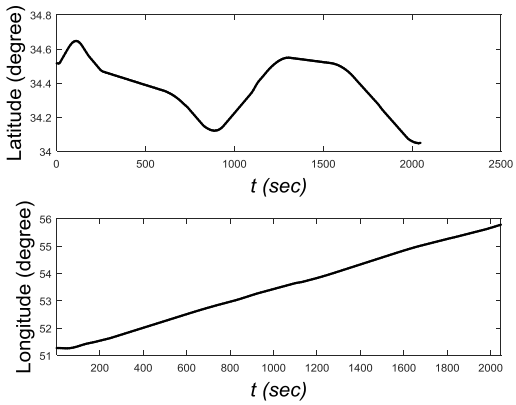
حال نتایج اعمال روش‌های فیلتر کالمن معمولی و تطبیقی با همان R و Q روی داده‌های دریافتی از همان گیرنده‌ی جی. پی. اس. قبلی روی حرکتی که دارای مانورهای بیشتری است را در نظر می‌گیریم. داده‌های طول و عرض جغرافیایی به‌صورت شکل ۱۷ دریافت شده‌اند. شکل مشتق حاصل از اعمال روش‌های فیلتر کالمن معمولی و تطبیقی و خطای آنها به‌ترتیب در شکل‌های ۱۸ و ۱۹ آورده شده است. همان‌طور که مشخص است، مرتبهٔ خطا تغییری نکرده است و در همان حدود است. در واقع پس از اعمال فیلتر کالمن و تنظیم R و Q این الگوریتم برای هر نوع آزمایش دیگری با همین R و Q تنظیم شده مناسب خواهد بود. جهت تنظیم، ابتدا R و Q چنان تعیین می‌شود که پاسخ آفلاین مناسب باشد. چون در تمام آزمایش‌هایی که به‌نوعی شامل همین نوع خطا هستند، نتایج قابل تکرار است، لذا در فیلتر کالمن معمولی ابتدا $R=1$ قرار داده شد و برای تنظیم Q با امتحان مقادیر مختلف q، آن مقداری که منجر به جواب مناسب گردد استخراج شده است. برای فیلتر کالمن تطبیقی نیز با همان Q قبلی، این‌بار با تغییر در R، آن مقداری که دارای جواب مناسبی بود استخراج گردیده است. لازم به ذکر است که در صورت استفاده از روش تطبیقی، حساسیت الگوریتم به مقدار R و Q کاهش می‌یابد.

۶. نتیجه‌گیری

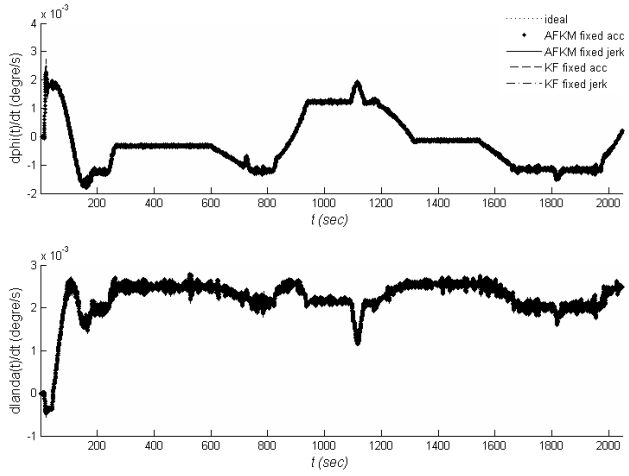
در این مطالعه مشخص شد که روش فیلتر کالمن تطبیقی دارای عملکرد مناسب با معیار مجموع مربعات خطا نسبت به سایر روش‌های مشتق‌گیری است. در الگوریتم‌های مبتنی بر اویلر و درویابی وقتی اطمینان داشته باشیم مشتق مراتب بالای یک مجموع داده‌هایی صفر باشند و داده‌ها شامل خطا و نویز نیستند می‌توانند مشتق را به‌صورت دقیق اعلام نمایند.



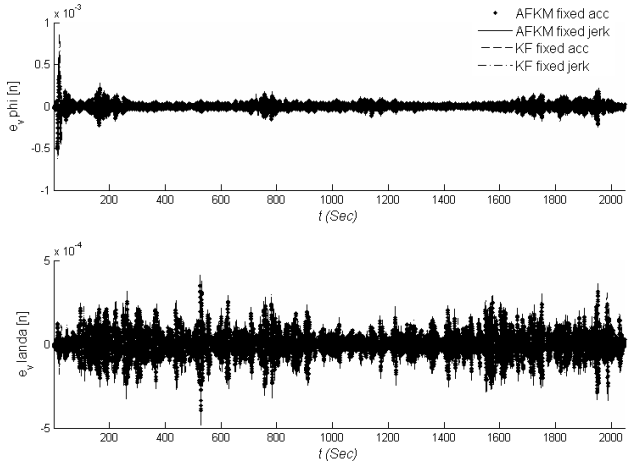
شکل ۱۶. خطای حاصل از مشتق‌های طول و عرض جغرافیایی یک جسم در حال حرکت
با استفاده از الگوریتم‌های لانکزس و میانگین‌گیر متحرک تطبیقی و مدل‌های مختلف در نظر گرفته شده برای فیلتر کالمن



شکل ۱۷. داده‌های دریافتی از جی. پی. اس. (طول و عرض جغرافیایی) برای یک جسم در حال حرکت دارای مانورهای بیشتر با گیرندهٔ قبلی



شکل ۱۸. مشتق‌های طول و عرض جغرافیایی یک جسم در حال حرکت
با استفاده از فیلتر کالمن معمولی و تطبیقی با دو مدل شتاب ثابت و جرک ثابت در همهٔ زمان‌ها



شکل ۱۹. خطای مشتق‌های طول و عرض جغرافیایی یک جسم در حال حرکت
با استفاده از فیلتر کالمن معمولی و تطبیقی با دو مدل شتاب ثابت و جرک ثابت در همهٔ زمان‌ها

این روش‌ها وقتی که داده‌ها دارای خطا و نویز باشند سبب افزایش شدید خطا و نویز می‌شوند. عیب دیگر این روش‌ها آفلاین بودن آنها (به‌جز الگوریتم دوم اویلر) است که در صورت پیاده‌سازی آنلاین شامل تأخیر می‌باشند به‌نوعی سبب افزایش بیشتر خطا می‌شوند. همان‌طور که دیده شد، می‌توان در صورت وجود نویز در سیستم، عملکرد آنها را با طراحی فیلترهایی بهبود بخشید، اما باز شامل نتایج مطلوب نیستند. در این الگوریتم‌ها پیاده‌سازی راحت و محاسبات اندک است و برای کاربردهای واقعی در زمان‌هایی که نیاز به دقت بالای مشتق‌گیری نیست و از پردازنده با قابلیت محدود استفاده می‌شود گزینه مناسبی است. روش‌های مبتنی بر طراحی فیلتر دیجیتال مشتق‌گیر در صورتی که اطلاعات مناسبی در مورد رنج فرکانس سیگنال در اختیار باشد می‌تواند گزینهٔ مناسبی باشد. تمامی الگوریتم‌های این گروه پاسخ ضربهٔ محدود[۸] هستند، لذا به‌راحتی در هر لحظهٔ مستقل از خروجی لحظات گذشته مشتق اعلام می‌گردد. این روش‌ها نیز در صورت پیاده‌سازی آنلاین شامل یک تأخیر ذاتی هستند. این روش‌ها نیز دارای محاسبات کم شامل تعداد محدود جمع و ضرب هستند. روش استخراج مشتق از طریق طراحی کنترل‌کنندهٔ برای سیستم انتگرال‌گیر دیجیتال تنها با یک بهرهٔ ساده روش خوبی برای فیلترکردن و محاسبهٔ مشتق در حالت کلی نیست و وقتی تعداد فرکانس محدودی در سیگنال وجود داشته باشد؛ یعنی مثلاً فقط شامل یک سینوس همراه با نویز باشد می‌تواند به‌خوبی منجر به

حذف نویز و محاسبهٔ مشتق گردد. این روش نیز دارای محاسبات اندک است و جهت پیاده‌سازی به‌صورت آنلاین مناسب است. مشتق‌گیری با اعمال روش میانگین‌گیر متحرک تطبیقی نیز می‌تواند با اعمال یک الگوریتم تطبیقی طول پنجره را طوری تنظیم کند که منجر به حداکثر تأخیر قابل قبول و در نتیجه حداکثر دقت ممکن شود. این روش نیز به سادگی قابل درک و پیاده‌سازی است. همچنین محاسبات آن نیز وابسته به حداکثر طول پنجرهٔ تنظیم شده است. از بین روش‌های بررسی شده در قضایای تخمین و پیش‌بینی، روش پیاده‌سازی آنلاین روش تخمین حداقل مربعات، به‌علت محاسبات بالا و نتیجهٔ نامناسب نسبت به حجم محاسبات روش خوبی ارزیابی نمی‌گردد. همچنین چون روش تخمین مینیمم واریانس بازگشتی به‌نوعی زیرمجموعهٔ روش فیلتر کالمن است، لذا به‌جای این روش می‌توان از فیلتر کالمن که دارای قابلیت‌های بیشتری است، استفاده کرد. روش فیلتر کالمن معمولی دارای بهینه‌ترین روش با معیار مجموع مربعات خطا است. هزینهٔ این بهینه‌سازی محاسبات بیشتر است. لذا باید توجه داشت که پردازندهٔ مورد استفاده توانایی حجم محاسبات مورد نظر را داشته باشد. روش فیلتر کالمن معمولی دارای حالت گذرای مناسب نیست، لذا با طراحی فیلتر کالمن به‌صورت تطبیقی می‌توان حالت گذرای آن را اصلاح نمود.

۷. مآخذ

[1] D. Murio, Automatic numerical differentiation by discrete mollification, *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 13, pp. 381-386, 1987.

[2] I. Knowles, R. J. Renka, Methods for numerical differentiation of noisy data, *Electronic Journal of Differential Equations Conference*, 2014, pp. 235-246.

[3] R. Chartrand, Numerical differentiation of noisy, nonsmooth data, *ISRN Applied Mathematics*, vol. 2011, 2011.

[4] D. Petrinovic, Causal Cubic Splines: Formulations, Interpolation Properties and Implementations, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, pp. 5442-5453, 2008.

[5] S. Tingna, W. Zheng, X. Changliang, Speed Measurement Error Suppression for PMSM Control System Using Self-Adaption Kalman Observer, *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 62, pp. 2753-2763, 2015.

[6] R. Ronsse, S. De Rossi, N. Vitiello, T. Lenzi, M. C. Carrozza, A. J. Ijspeert, Real-Time Estimate of Velocity and Acceleration of Quasi-Periodic Signals Using Adaptive Oscillators, *Robotics, IEEE Transactions on*, vol. 29, pp. 783-791, 2013.

[7] David Eager, Ann-Marie Pendrill, and Nina Reistad. "Beyond velocity and acceleration: jerk, snap and higher derivatives, *European Journal of Physics*, vol. 37, no. 6, 2016, pp. 065008.

[8] Ye, Shirong, Yongwei Yan, Dezhong Chen, Performance Analysis of Velocity Estimation with BDS, *The Journal of Navigation*, vol. 70, no. 3, 2017, pp. 580-594.

[9] Jakob M. Hansen, et al. Nonlinear Observer for Tightly Coupled Integrated Inertial Navigation Aided by RTK-GNSS Measurements, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2018.

[10] C. F. Gerald, *Applied numerical analysis*, Pearson Education India, 2004.

[11] A. Antoniou, *Digital signal processing*, McGraw-Hill Toronto, Canada, 2006.

[12] P. Holoborodko, Smooth noise robust differentiators, *Consulted on*, vol. 7, p. 2015, 2008.

[13] A. V. Oppenheim, R. W. Schafer, *Discrete-time signal processing*, Pearson Higher Education, 2010.

[14] S. W. Smith, *The scientist and engineer's guide to digital signal processing*, 1997.

[15] R .G. Lyons, *Understanding digital signal processing*, Pearson Education, 2010.

[16] C. Groetsch, Lanczo's generalized derivative, *The American mathematical monthly*, vol. 105, pp. 320-326, 1998.

[17] L. Washburn, The Lanczos derivative, Dept. of Maths, Whitman College, USA, Senior Project Archive, 2006.

[18] F. Janabi-Sharifi, V. Hayward, C. S. J. Chen, Discrete-time adaptive windowing for velocity estimation, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 8, pp. 1003-1009, 2000.

[19] D. G .Luenberger, *Optimization by vector space methods*, John Wiley & Sons, 1969.

[20] M. Rao, Q .Xia, Y. Ying, *Modeling and advanced control for process industries: applications to paper making processes*, Springer Science & Business Media, 2013.

پی‌نوشت

1. Stirling
2. sinc
3. Blackman
4. Savitzky-Golay
5. Lanczos
6. IIR
7. Adaptive Fading Kalman Filter (AFKF)
8. FIR