

تحلیل الاستیک درام اسپول دوار FGM کمپرسور محوری در موتور توربین گاز هوایی

شهرام یوسفی^۱، بهروز شهریاری^۲، محمد سهیل صادقی نژاد^۳

۱ دانشیار، مجتمع دانشگاهی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، ایران، yousefi100@mut-es.ac.ir

۲ استادیار، مجتمع دانشگاهی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، ایران

۳ دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اصفهان، ایران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۱/۱۸

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۳/۱۳

چکیده

در این پژوهش حل تحلیلی دقیقی برای درام اسپول کمپرسور محوری یک موتور توربین گاز جهت محاسبه تنش‌ها، کرنش‌ها و جابجایی‌ها انجام شده است. تحلیل انجام شده در دو حالت مختلف یکی درام از جنس همگن و دیگری ماده هدفمند (FGM) تحت نیروی گریز از مرکز ناشی از دوران و بارگذاری یکنواخت شعاعی در سطوح داخلی و خارجی انجام گرفته است. در حالت FGM خواص ماده شامل مدول یانگ و چگالی در راستای شعاع اسپول متغیر هستند. تنش‌ها و جابجایی‌های حاصل برای ماده همگن و ماده FGM با ضرایب غیرهمگن مختلف محاسبه شده است. نتایج نشان می‌دهند استفاده از ماده FGM با ضریب مناسب نسبت به همگن، می‌تواند منجر به بهبود قابل توجه ضریب اطمینان و کاهش جابجایی‌ها، کرنش‌ها و تنش‌های اسپول مدنظر گردد. از سوی دیگر انتخاب ضریب FGM نامناسب می‌تواند باعث کاهش ضریب اطمینان و حتی شکست در سازه گردد. برای اسپول خاص بررسی شده، تنش‌های ایجاد شده در اسپول FGM برای حالتی که ضرایب غیرهمگن منفی در نظر گرفته شده است، کمتر از حالت همگن بوده و باعث شکست سازه می‌شود، در حالی که ضریب اطمینان هنگام استفاده از ضرایب مثبت نسبت به حالت همگن بهبود و جابجایی‌ها کاهش یافته است.

واژگان کلیدی

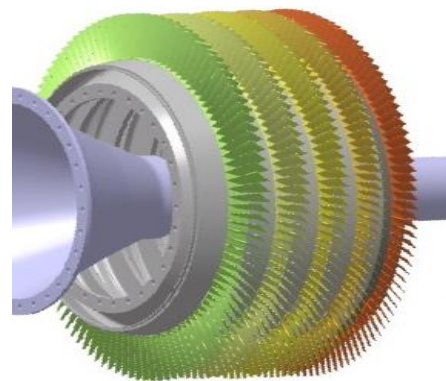
موتور توربین گاز هوایی، کمپرسور محوری، درام اسپول دوار، ماده FGM، تحلیل الاستیک.

۱. مقدمه

توجه قرار دارد. موتورهای هوافضایی به عنوان یک سیستم پیچیده، مانند سایر سازه‌های هوایی نیازمند سازه‌ای با وزن کمینه هستند. در این راستا طراحان سازه موتور به دنبال استفاده از سازه‌های با نسبت استحکام به وزن بالا هستند. بخش دوار این

امروزه با رشد روزافزون و شتابان صنایع هوایی و با پیشرفت علوم در حوزه‌های مختلف مهندسی، استفاده از طرح‌های جدید و ابتکاری به منظور افزایش بازده و کاهش هزینه سیستم‌ها مورد

موتورها که به عنوان روتور شناخته می‌شود، مهم‌ترین بخش موتور است که تحت انواع بارهای مکانیکی و حرارتی قرار دارد و طراحی آن حایز اهمیت است. در موتورهای توربین گاز هوایی جهت کاهش وزن و افزایش عملکرد موتور، به جای طراحی روتور شامل چندین ردیف دیسک که وزن زیادی را به سیستم تحمیل می‌کنند، از یک استوانه دوار جهت نگهداری پره‌ها در موقعیت مورد نظر استفاده می‌شود. در این طرح پره‌ها روی محیط خارجی استوانه نصب می‌شوند. این استوانه درام نام دارد. مجموعه درام دوار به همراه چندین ردیف پره در محیط خارجی آن اسپول نامیده می‌شود. درام تحت بار ناشی از دوران پره‌ها در محیط خارجی و بارهای ناشی از فشار هوای متراکم قرار دارد. به طور مثال در موتور توربوجت J85-21-GE ردیف اول تا چهارم کمپرسور با استفاده از اسپول جلو و ردیف پنجم تا هشتم آن با استفاده از اسپول عقب، قدرت را از شفت دریافت می‌کنند و ردیف نهم کمپرسور نیز توسط پیچ به اسپول عقب وصل شده و دریافت قدرت می‌کند. شکل ۱ اسپول عقب کمپرسور این موتور را نشان می‌دهد.



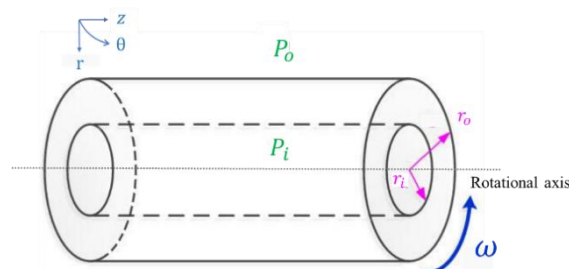
شکل ۱. اسپول عقب کمپرسور موتور توربوجت J85-21-GE

با توجه به هندسه اسپول مدنظر، جهت تحلیل تنش، کرنش و جابجایی‌های اعمالی، سازه اسپول بصورت یک استوانه دوار جدار ضخیم با شرایط مرزی یکسر گیردار مدل می‌شود. پاسخ تحلیلی مسئله استوانه دوار جدار ضخیم توخالی با استفاده از فرض کرنش صفحه‌ای در اغلب کتب استاندارد الاستیسته نظیر لاو^۱ [۱]، لنداو^۲ و لیفشیتز^۳ [۲]، نادای^۴ [۳]، سچلر^۵ [۴]، تیموشکو^۶ و گودیر^۷ [۵] و ولترا^۸ و گینز^۹ [۶] مورد بررسی قرار گرفته است. همروک^{۱۰} و همکاران [۷] نیز به اختصار مطالبی را در این خصوص بیان کردند. هرن^{۱۱} [۸] نیز رینگ‌ها و استوانه‌های جدار نازک دوار را مورد

مطالعه قرار دادند. زمانی نژاد و فاتحی [۹] تحلیل الاستوپلاستیک یک مخزن استوانه‌ای تحت فشار جدار ضخیم دوار ساخته شده از مواد FGM را مورد بررسی قرار داده و تنش‌های پلاستیک و جابجایی‌ها را با استفاده از شرایط تسلیم ترسکا محاسبه کردند. هاگ^{۱۲} و همکاران [۱۰] تحلیل الاستیک - پلاستیک یک استوانه‌ای دوار را با این فرض که سرعت زاویه‌ای به آرامی افزایش یابد مورد بررسی قرار دادند.

رونی^{۱۳} و فراری^{۱۴} [۱۱] کشش و خمش استوانه‌های FGM را به روش تحلیلی مورد بررسی قرار دادند و به این نتیجه رسیدند که با تغییر مدول الاستیسته به صورت پیوسته می‌توان باعث بهبود رفتار استوانه در کشش و خمش شد. توتونکو^{۱۵} و ازتوک^{۱۶} [۱۲] حل تحلیلی تنش‌ها در مخازن FGM تحت فشار را ارائه دادند. سختی ماده در این مقاله از یک قانون ساده طبیعت می‌کند که در آن در طول ضخامت دیواره تغییر می‌کند و نسبت پواسون ثابت فرض می‌شود. همچنین در این مقاله توزیع تنش با ثابت‌های غیر همگن با حالتی که ثابت‌ها همگن هستند مقایسه می‌شود. تارن^{۱۷} [۱۳] حل تحلیلی استوانه‌های غیرایزوتروپ FGM تحت اثر بارهای حرارتی و مکانیکی را ارائه کرد. چنگ^{۱۸} [۱۴] صفحات ناهمگنی را که از مواد FGM تشکیل شده بود را بررسی کرد و با استفاده از تئوری تغییر شکل مرتبه اول دستگاه معادلات غیرخطی را در راستای تئوری فون کارمن ارائه داد و با استفاده از سری فوریه معادلات را حل کرد. جباری [۱۵] تحلیل مسائل پایای تنش حرارتی و مقارن محوری را برای سیلندرهای FGM جدار ضخیم مورد بررسی قرار داد. وی در کارش شرایط مرزی گرمایی مکانیکی در سطوح داخلی و خارجی را در نظر گرفت و تنش‌های مکانیکی و حرارتی با معادلات مستقیم حل شد. مک^{۱۹} [۱۶] مسئله دوران لوله‌های توخالی الاستوپلاستیک با یک انتهای آزاد را مورد بررسی قرار داد. عنانی و رحیمی [۱۷] به بررسی پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم توخالی که از FGM ساخته شده است را با استفاده از تئوری هایپر الاستیک مورد بررسی قرار دادند. این تحلیل با فرض تراکم ناپذیر بودن ماده و این که خواص ماده تابع شعاع استوانه می‌باشد، صورت گرفت. نتایج این مقاله نشان می‌دهد که پارامتر غیریکنواختی ماده (n) و پارامتر ساختار (β) تأثیر قابل توجهی روی رفتار مکانیکی این استوانه دارد. عارفی و همکاران [۱۸] تحلیل ترموالاستیک را بر روی یک استوانه مدور تو خالی برای یک ماده FGM دلخواه انجام دادند. در این مقاله

حال دوران است. با توجه به هندسه مسئله از سیستم مختصات قطبی (r, θ, z) که به ترتیب نشان‌دهنده راستاهای شعاعی، محیطی و محوری می‌باشد، استفاده می‌شود.



شکل ۲. نمایی سه‌بعدی از اسپول در حال دوران تحت فشارهای داخلی و خارجی

با نوشتن معادله تعادل حاکم بر استوانه در راستای شعاعی و با فرض ثابت بودن ضخامت استوانه در تمامی راستای طولی، معادله تعادل به صورت رابطه ۱ بدست می‌آید:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho r \omega^2 = 0 \quad (1)$$

که در رابطه ۱، σ_r و σ_θ به ترتیب نشان دهنده تنش‌های شعاعی و محیطی و ρ برابر با چگالی ماده می‌باشد. در روابط ۲ مجموعه معادلات سازگاری که نشان دهنده روابط بین کرنش و جابجایی‌ها در حالت کلی است نشان داده شده است:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2)$$

در $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$ و $\gamma_{r\theta}$ به ترتیب برابر با کرنش‌های عمودی در راستای شعاعی، محیطی و محوری و کرنش برشی در صفحه $r\theta$ می‌باشد. u و v به ترتیب برابر با جابجایی‌های شعاعی و محیطی می‌باشد. روابط ۲ با توجه به فرضیات مربوط به تقارن هندسه سازه و رفتار ماده به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{dw}{dz} = 0, \quad \gamma_{r\theta} = 0 \quad (3)$$

معادلات ساختاری طبق مجموعه روابط ۴ عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu e}{1-2\nu} + \varepsilon_r \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu e}{1-2\nu} + \varepsilon_\theta \right] \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu e}{1-2\nu} + \varepsilon_\theta \right] \end{aligned} \quad (4)$$

ν ضریب پواسون، E مدول یانگ و e کرنش حجمی است و از جمع کرنش‌های عمودی بدست می‌آید.

$$e = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z \quad (5)$$

با جایگذاری روابط ۳ در ۴ روابط تنش‌های شعاعی و محیطی برحسب جابجایی به صورت رابطه ۶ بدست می‌آیند.

پاسخ‌های سیستم برای توزیع دما، جابه‌جایی شعاعی و تنش‌های شعاعی و محیطی در حالت کلی بدست آورده شده است. زمانی نژاد و همکاران [۱۹] پاسخ گذرای ترموالاستیک یک پوسته استوانه‌ای دوار تحت شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار دادند. در این مقاله روش جداسازی متغیرها برای مسئله حرارتی اعمال شده است. هورگان^{۲۰} و چان^{۲۱} [۲۰] یک سیلندر توخالی تحت فشار را در حالت کرنش صفحه‌ای و با فرض متغیر بودن مدول الاستیسیته و ثابت بودن ضریب پواسون مورد بررسی قرار دادند. خوشگفتار، رحیمی و عارفی [۲۱] تحلیل الاستیک مخزن فشار استوانه‌ای جدار ضخیم FGM را به صورت تحلیلی انجام دادند. قناد و همکاران [۲۲] یک راه‌حل تحلیلی برای تنش‌ها و جابجایی شعاعی یک پوسته استوانه‌ای FGM ضخیم تحت فشار با ضخامت متغیر را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی ارائه دادند. زمانی نژاد، جباری و قناد [۲۳] یک حل نیمه‌تحلیلی برای تعیین تنش و جابجایی در پوسته‌های استوانه‌ای دوار با ضخامت متغیر تحت فشار یکنواخت ارائه کردند. جلالی و شهریاری [۲۴] با استفاده از روش تفاضل محدود، تحلیل الاستیک یک دیسک دوار حلقوی FGM را مورد بررسی قرار دادند. شهریاری و همکاران [۲۵] تحلیل ارتعاشاتی دیسک دوار یک توربین گاز موتور هوایی با پروفیل ضخامت متغیر را با استفاده از روش مربعات ديفرانسیلی مورد بررسی قرار دادند. شهریاری و همکاران [۲۶] طراحی بهینه وزنی یک دیسک پره‌دار یکپارچه را با استفاده از روش‌های عددی مورد بررسی قرار دادند.

در این تحقیق حل تحلیلی دقیقی برای درام اسپول کمپرسور محوری یک موتور توربین‌گاز هوایی انجام می‌شود. بار گریز از مرکز ناشی از حضور پرها روی محیط خارجی درام در نظر گرفته می‌شود. تنش‌ها و جابجایی‌ها در دو حالت مختلف یکی اسپول از جنس همگن و دیگری ساخته شده از ماده هدفمند محاسبه می‌شوند.

۲. فرمول‌بندی و استخراج روابط برای حالت همگن

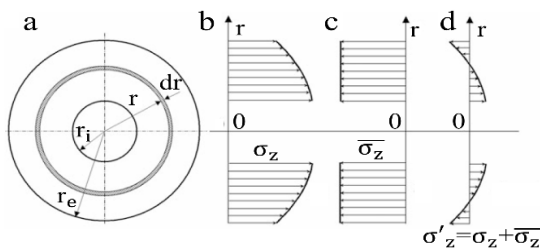
شکل ۲ نمایی سه‌بعدی از اسپول دوار جدار ضخیم یک سر گیردار متشکل از ماده‌ای همگن را نشان می‌دهد، که دارای شعاع داخلی r_i و شعاع خارجی r_o بوده و تحت بارگذاری‌های شعاعی یکنواخت داخلی و خارجی است که به ترتیب با P_i و P_o نشان داده شده است و با سرعت زاویه‌ای یکنواخت ω حول راستای محوری در

$$\left(\frac{r}{r_o}\right)^2 \left(\frac{1+2\nu}{3-2\nu}\right) + \frac{(P_o - P_i) \left(\left(\frac{r}{r_o}\right)^2 + \Delta^2\right)}{(1-\beta^2) \left(\frac{r}{r_o}\right)^2} + P_i$$

$$\sigma_z = \frac{\rho r_o^2 \omega^2 \nu (3-2\nu)}{8(1-\nu)} \times \left(2 + 2\Delta^2 - \left(\frac{4\left(\frac{r}{r_o}\right)^2}{3-2\nu}\right) \right) + 2P_i \nu + \frac{2\nu(P_o - P_i)}{(1-\Delta^2)}$$

که در این جا $\Delta = \frac{r_i}{r_o}$ و مقداری ثابت و بدون بعد است. برای محاسبه تنش محوری مؤثر در حالت یک سر گیردار از آن جا که هیچ نیروی محوری خارجی برای به تعادل رساندن تنش محوری σ_z که توسط سومین رابطه ۱۳ داده شده وجود ندارد و با توجه به توزیع نشان داده شده در شکل ۳، رابطه ۱۳ نمی‌تواند حالت تنش واقعی محوری را نشان دهد. بنابراین تنش محوری مؤثر σ'_z باید توزیع نیرویی مشابه F'_z حاصل بر روی هر بخش عمود بر محور داشته باشد و در فاصله به اندازه کافی دور از انتهای گیردار، صفر باشد [۲۷]. بنابراین شرط ذکر شده در بالا برای تعادل کلی در جهت محور دوران برآورده می‌شود. بنابراین تساوی رابطه ۱۴ باید برقرار شود و انتگرال تنش محور مؤثر σ'_z بر روی مساحت درام، یعنی نیروی خالص در سراسر مقطع باید برابر با صفر باشد. طبق رابطه ۱۴ برای المان سطح نشان داده شده در شکل ۳ می‌توان نوشت:

$$F'_z = \int \sigma'_z dA = 2\pi \int \sigma'_z r dr \quad (14)$$



شکل ۳. تنش محوری در یک استوانه دوار یک سر گیردار: (a) المان سطح مقطع در فاصله به اندازه کافی دور از انتها. (b) تنش محوری σ_z با انتهای گیردار. (c) تنش یکنواخت σ_z در اثر وجود سر آزاد. (d) تنش محوری مؤثر σ'_z با شرط یک سر آزاد

برای ارضای این شرط تعادل، یک سیستم جدید از تنش باید به جای سیستم تنشی که قبلاً محاسبه شد جایگزین شود. این سیستم جدید تنش، باید شرایط ۱۵ را برآورده سازد:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right] \quad (6)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\nu \frac{du}{dr} + (1-\nu) \frac{u}{r} \right]$$

با جایگذاری روابط ۶ در رابطه ۱، معادله ناویر^{۲۲} حاکم بر حرکت درام دوار همگن به صورت رابطه ۷ بدست می‌آید:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{rdr} - \frac{u}{r^2} + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)\rho r\omega^2}{E(1-\nu)} = 0 \quad (7)$$

رابطه ۷ یک معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم غیرخطی و غیرهمگن می‌باشد که به صورت رابطه ۸ قابل بازنویسی است.

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru(r)) \right] = - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)\rho r\omega^2}{E(1-\nu)} \quad (8)$$

پاسخ این معادله مطابق رابطه ۹ محاسبه می‌گردد:

$$u(r) = - \frac{\rho r^3 \omega^2 (1+\nu)(1-2\nu)}{8E(1-\nu)} + C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r} \quad (9)$$

با جایگذاری رابطه ۹ در روابط ۶، تنش‌های شعاعی و محیطی مطابق رابطه ۱۰ بدست می‌آیند.

$$\sigma_r = - \frac{(3-2\nu)\rho r^2 \omega^2}{8(1-\nu)} + \frac{EC_1}{2(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{EC_2}{(1+\nu)r^2} \quad (10)$$

$$\sigma_\theta = - \frac{(1+2\nu)\rho r^2 \omega^2}{8(1-\nu)} + \frac{EC_1}{2(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{EC_2}{(1+\nu)r^2}$$

شرایط مرزی مطابق رابطه ۱۱ هستند.

$$r = r_i \rightarrow \sigma_r = P_i \quad (11)$$

$$r = r_o \rightarrow \sigma_r = P_o$$

با اعمال شرایط مرزی ثوابت محاسبه می‌شوند.

$$C_1 = \left(\frac{2(2\nu-1)(\nu+1)}{E} \right) \times \left[\frac{\rho(2\nu-3)\omega^2(r_i^2+r_o^2)}{8(1-\nu)} + \frac{P_o r_o^2 - P_i r_i^2}{(r_i^2 - r_o^2)} \right] \quad (12)$$

$$C_2 = \frac{r_i^2 r_o^2 (\nu+1)}{E(r_i^2 - r_o^2)} \times \left[\frac{\rho(2\nu-3)\omega^2(r_i^2+r_o^2)}{8(1-\nu)} + P_i - P_o \right]$$

با جایگذاری رابطه ۱۲ در رابطه ۱۰ تنش‌های شعاعی و محیطی و محوری وارد بر درام دوار طبق روابط ۱۳ به دست می‌آیند.

$$\sigma_r = \frac{\rho r_o^2 \omega^2 (3-2\nu)}{8(1-\nu)} \times \left(1 + \Delta^2 - \left(\frac{r}{r_o}\right)^2 \right) -$$

$$\left(\frac{\Delta r_o}{r}\right)^2 + \frac{(P_o - P_i) \left(\left(\frac{r}{r_o}\right)^2 - \Delta^2\right)}{(1-\Delta^2) \left(\frac{r}{r_o}\right)^2} + P_i$$

$$\sigma_\theta =$$

$$\frac{\rho r_o^2 \omega^2 (3-2\nu)}{8(1-\nu)} \times \left(1 + \Delta^2 \left(\frac{r}{r_o}\right)^2 + 1 \right) - \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 W = & \frac{\rho\omega^2\nu z}{4(1-\nu)}(r_i^2 + r_o^2 - 2r^2) + \\
 & \left(\frac{(P_o - P_i)\left(\frac{r}{r_o}\right)^2 + \Delta^2}{\left(\frac{r}{r_o}\right)^2} \right) \times \left(\frac{1}{(1-\beta^2)} + \frac{1}{(1-\Delta^2)} \right) + P_i - \\
 & \frac{\nu\rho r_o^2\omega^2(3-2\nu)z}{8(1-\nu)} \times \left(2 + \Delta^2 \left(\frac{2\left(\frac{r}{r_o}\right)^2 + 1}{\left(\frac{r}{r_o}\right)^2} \right) - \right. \\
 & \left. \left(\frac{r}{r_o} \right)^2 \left(\frac{4}{3-2\nu} \right) - \left(\Delta \frac{r_o}{r} \right)^2 \right)
 \end{aligned}$$

بنابراین در تحلیل درام مدنظر تنش‌های شعاعی و محیطی طبق رابطه ۱۳ و تنش محوری مؤثر طبق رابطه ۲۰ و جابجایی‌ها طبق رابطه ۲۱ محاسبه شدند. بدیهی است با جایگذاری تنش‌های بدست آمده از روابط ۱۳ و ۲۰ در روابط ۴ کرنش‌های اعمالی بر درام مورد بحث نیز محاسبه می‌شوند.

۳. فرمول‌بندی و استخراج روابط برای حالت FGM

با در نظر گرفتن تابع خواص ماده FGM به صورت رابطه ۲۲ مدول الاستیسیته، چگالی و استحکام تسلیم به صورت متغیر در راستای شعاعی تعریف می‌شوند.

$$Pr(r) = Pr_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^X \quad (22)$$

که در رابطه فوق Pr نشانگر خاصیت ماده FGM و X مقداری ثابت است که با جایگذاری تک به تک خواص متغیر در این رابطه تابع توزیع خواص آن‌ها به صورت رابطه ۲۳ تبدیل می‌شوند.

$$E(r) = E_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^{m1}, \rho(r) = \rho_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^{m2}, \quad (23)$$

که در اینجا E_i, ρ_i, σ_{yi} به ترتیب مقادیر مدول الاستیسیته، چگالی و استحکام تسلیم در شعاع داخلی و $m1, m2, m3$ ثابت‌های غیرهمگن و مقادیری ثابت هستند. از آنجایی که دامنه تغییرات ضریب پواسون برای مواد مهندسی بسیار کوچک است ν در طول شعاع ثابت فرض شده است.

با جایگذاری رابطه توابع تغییر خواص ۲۳ در مجموعه معادلات ۶ روابط تنش - کرنش برای ماده FGM با تابع خواص مدنظر به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{E_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^{m1}}{(2\nu-1)(\nu+1)} \times \left[(\nu-1) \frac{du}{dr} - \frac{\nu u(r)}{r} \right] \\
 \sigma_\theta &= \frac{E_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^{m1}}{(2\nu-1)(\nu+1)} \times \left[(-\nu) \frac{du}{dr} + \frac{(1-\nu)u(r)}{r} \right]
 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_r = 0, \bar{\sigma}_z = \text{ثابت} \quad (15)$$

تنش محوری مؤثر σ'_z با حاصل جمع تنش‌های σ_z و $\bar{\sigma}_z$ برابر خواهد شد، که σ_z در این مقطع با توجه به تابع غیرخطی با شعاع مشخص، توزیع شده و فرض حالت کرنش صفحه‌ای $\varepsilon_z = 0$ را برآورده می‌کند و تنش $\bar{\sigma}_z$ به‌طور یکنواخت در همان مقطع توزیع شده، به‌طوری‌که دومی می‌تواند صفحه‌ای و عمود بر محور باقی بماند که با جابجایی محوری یکنواخت سطح مقطع انطباق دارد. این فرض منجر به رابطه ۱۶ می‌شود:

$$\sigma'_z = \varepsilon_z + \bar{\varepsilon}_z = \bar{\sigma}_z \quad (16)$$

برای تعیین $\bar{\sigma}_z$ می‌توان از رابطه ۱۴ استفاده کرد، با قرار دادن:

$$\sigma'_z = \sigma_z + \bar{\sigma}_z \quad (17)$$

و با جایگذاری رابطه ۱۷ در رابطه ۱۴ رابطه ۱۸ بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 \int_{r_i}^{r_o} (\sigma_z + \bar{\sigma}_z) r dr = 0 \xrightarrow{\text{yields}} \\
 \int_{r_i}^{r_o} \left(\frac{\rho r_o^2 \omega^2 \nu (3-2\nu)}{8(1-\nu)} \left(2 + 2\Delta^2 - \left(\frac{4\left(\frac{r}{r_o}\right)^2}{3-2\nu} \right) \right) + \right. \\
 \left. 2P_i \nu + \frac{2\nu P_o - P_i}{1-\Delta^2} + \bar{\sigma}_z \right) r dr = 0
 \end{aligned} \quad (18)$$

با حل انتگرال رابطه ۱۸، $\bar{\sigma}_z$ طبق رابطه ۱۹ بدست می‌آید:

$$\bar{\sigma}_z = \frac{-\rho r_o^2 \omega^2 \nu (r_i^2 + r_o^2)}{2r_o^2} = \text{ثابت} \quad (19)$$

با جایگذاری رابطه ۱۹ و ۱۳ در رابطه ۱۷ تنش محوری مؤثر اعمالی بر درام در حالت یک سر گیردار به صورت رابطه ۲۰ بدست می‌آید:

$$\sigma'_z = \frac{\rho\omega^2\nu}{4(1-\nu)}(r_i^2 + r_o^2 - 2r^2) \quad (20)$$

طبق رابطه ۲؛ $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ ؛ در نتیجه، $w = z\varepsilon_z$ ، و با توجه به اینکه ε_z ثابت است و ثابت انتگرال‌گیری، با $w = 0$ برای $z = 0$ ، صفر است، با جایگزینی رابطه ۲۰ و ۱۳ در رابطه ۴ تغییر شکل محوری $w = w(z)$ و همچنین با جایگذاری ثابت‌های C_1 و C_2 در رابطه ۹ جابجایی شعاعی طبق رابطه ۲۱ بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
 u(r) &= -\frac{\rho r^3 \omega^2 (1+\nu)(1-2\nu)}{8E(1-\nu)} + \frac{r(2\nu-1)(\nu+1)}{E} \times \\
 & \left[\frac{\rho(2\nu-3)\omega^2(r_i^2+r_o^2)}{8(1-\nu)} + \frac{P_o r_o^2 - P_i r_i^2}{(r_i^2 - r_o^2)} \right] + \frac{r_i^2 r_o^2 (\nu+1)}{Er(r_i^2 - r_o^2)} \times \\
 & \left[\frac{\rho(2\nu-3)\omega^2(r_i^2+r_o^2)}{8(1-\nu)} + P_i - P_o \right] \\
 w &= z \varepsilon_z = \frac{z}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)]
 \end{aligned} \quad (21)$$

که در رابطه فوق پارامترهای B_1 تا B_9 موجود عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{m1-H}{2} \\ B_2 &= r^{B_1-1} \\ B_3 &= r^{B_1} \\ B_4 &= \frac{E_i(1-\nu)\left(\frac{r}{r_i}\right)^{m1}}{(2\nu-1)(\nu+1)} \\ B_5 &= HB_4\sqrt{r^H} \\ B_6 &= A_1 \\ B_7 &= \int_{r_i}^r \frac{A_1(1+\nu)r^{\frac{m1}{2}}}{B_5} dr \\ B_8 &= \int_{r_i}^{r_e} \frac{A_1(1+\nu)r^{\frac{m1+H}{2}}}{B_4} dr \\ B_9 &= \frac{E_i\nu\left(\frac{r}{r_i}\right)^{m1}}{(2\nu-1)(\nu+1)} \end{aligned} \quad (29)$$

همچون حالت همگن با توجه به اینکه درام دوار مدنظر در شعاع داخلی و خارجی به ترتیب تحت بارگذاری‌های شعاعی و یکنواختی برابر با P_i و P_o هستند از شرایط مرزی موجود در رابطه ۱۱ در شعاع‌های داخلی و خارجی برای یافتن ثابت‌های انتگرال‌گیری استفاده می‌شود. با جایگذاری این شرایط مرزی در قسمت اول رابطه ۲۸ و ساده‌سازی آن‌ها دو معادله برحسب ثابت‌های انتگرال‌گیری به‌عنوان مجهولات این دو معادله بدست می‌آید که با حل دو معادله ایجاد شده، ثابت‌های انتگرال‌گیری به‌صورت زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{2(2\nu-1)(\nu+1)}{E_i D_2 D_5} \left[D_3 r_i^{\frac{H+m1+2}{2}} - \frac{D_1 r_o^{\frac{H+m1+2}{2}}}{\beta m1} \right] \\ C_2 &= \frac{2H(2\nu-1)(\nu+1)}{E_i D_2 D_4} \left[D_3 r_o^H r_i^{\frac{H+m1+2}{2}} - \frac{D_1 r_i^H r_o^{\frac{H+m1+2}{2}}}{\beta m1} \right] \end{aligned} \quad (30)$$

که ثابت‌های A_i ، B_i و D_i به ترتیب از با استفاده از روابط

۲۷، ۲۹ و ۳۱ عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{\beta m1 E_i}{(2\nu-1)(\nu+1)} \left\{ r_o^{\frac{H-m1-2}{2}} D_8 \left[(\nu + \right. \right. \\ &\left. \left. (\nu - 1) \left(\frac{m1-H}{2} \right) \right] - \frac{D_9(2\nu+(m1+H)(\nu-1))}{2Hr_o \frac{H+m1+2}{2}} \right\} + P_o \\ D_2 &= r_o^H - r_i^H \\ D_3 &= \frac{P_i}{(2\nu-1)} \\ D_4 &= 2\nu - m1 - H + H\nu + m1\nu \\ D_5 &= 2\nu - m1 + H - H\nu + m1\nu \\ D_6 &= E_i(1-\nu)\left(\frac{r}{r_i}\right)^{m1} \\ D_7 &= r^{\frac{H}{2}} D_6 H \\ D_8 &= \int_{r_i}^{r_o} \frac{A_1(1+\nu)r^{\frac{m1}{2}}}{D_7} dr \end{aligned} \quad (31)$$

$$\sigma_z = \frac{\nu E_i \left(\frac{r}{r_i}\right)^{m1}}{(2\nu-1)(\nu+1)} \left[\frac{du}{dr} + \frac{u(r)}{r} \right]$$

با جایگذاری روابط ۲۴ در رابطه ۱ و پس از ساده‌سازی رابطه

حاصل، معادله دیفرانسیل ناویر حاکم بر حرکت درام دوار FGM مدنظر طبق رابطه ۲۵ بدست می‌آید:

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r(1+m1) \frac{du}{dr} - \frac{(1-\nu(m1+1))}{1-\nu} u(r) + \frac{\rho_i r^{-m1+m2+3} \omega^2 (\nu+1)(1-2\nu)}{E_i(1-\nu)r_i^{m2-m1}} = 0 \quad (25)$$

معادله دیفرانسیلی فوق، یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم و غیرهمگن به فرم کوشی - اوپلر بوده که با حل دقیق آن به وسیله محیط تحلیل پارامتریک نرم افزار متلب جابجایی شعاعی به‌صورت رابطه ۲۶ به دست می‌آید:

$$u(r) = C_1 A_3 + \frac{A_3}{H} \int_{r_i}^r \frac{r^{\frac{m1}{2}} (\nu+1) A_1}{r^{\frac{H}{2}} A_2} dr - \frac{A_3}{r^H H} \int_{r_i}^r \frac{r^{\frac{H+m1}{2}} (\nu+1) A_1}{A_2} dr - \frac{C_2 A_3}{r^H H} \quad (26)$$

که در این رابطه پارامترهای A_1 ، A_2 و A_3 و ثابت H

عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} A_1 &= (2\nu - 1) \rho_i r^2 \omega^2 \left(\frac{r}{r_i}\right)^{m2} \\ A_2 &= E_i \left(\frac{r}{r_i}\right)^{m1} (1 - \nu) \\ A_3 &= r^{\frac{H-m1}{2}} \\ H &= \sqrt{\frac{4\nu+4m1\nu+m1^2\nu-m1^2-4}{\nu-1}} \end{aligned} \quad (27)$$

در رابطه ۲۶ C_1 و C_2 ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند که با

استفاده از شرایط مرزی حاکم بر مسئله همانند حل همگن بدست می‌آیند. با جایگذاری روابط ۲۵، ۲۶ و ۲۷ در رابطه ۲۴ تنش‌های شعاعی، محیطی و محوری به‌صورت زیر برای ماده FGM مفروض بدست می‌آید.

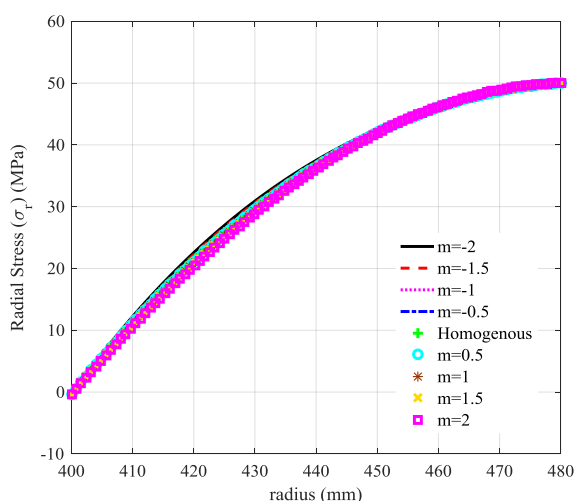
$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{(-B_4)(B_8+C_2)(B_3H+B_1B_2r)}{Hr^{H+1}} + \\ &\frac{(B_4)(B_1B_2)(B_7+C_1) - (B_9)}{r} \left\{ \frac{B_3[Hr^H(B_7+C_1)-(B_8+C_2)]}{Hr^H} \right\} \\ \sigma_\theta &= \frac{(B_9)(B_8+C_2)(B_3H+B_1B_2r)}{Hr^{H+1}} - \\ &\frac{(B_9)(B_1B_2)(B_7+C_1) + (B_4)}{r} \left\{ \frac{B_3[Hr^H(B_7+C_1)-(B_8+C_2)]}{Hr^H} \right\} \\ \sigma_z &= \frac{B_9(B_8+C_2)(B_3H+B_1B_2r)}{Hr^{H+1}} + \\ &\frac{B_9B_3r[Hr^H(B_7+C_1)-(B_8+C_2)]}{Hr^{H+1}} - \\ &HB_9r^H (B_1B_2)(B_7+C_1) \end{aligned} \quad (28)$$

جدول ۱. مشخصات اسپول عقب کمپرسور

مقدار	واحد	
۴۰	cm	شعاع داخلی (r_i)
۴۸	cm	شعاع خارجی (r_o)
۴۰	cm	طول روتور
۱۶۲۰۰	rpm	سرعت زاویه‌ای (ω)
۱۱۹	GPa	مدول الاستیسیته (E)
۴۴۲۹	Kg/m ³	چگالی
۷۸۶	MPa	استحکام تسلیم (σ_y)
۰/۳۱	-	ضریب پواسون (ν)

بارگذاری یکنواخت وارد بر اسپول در سطح داخلی برابر با ۴ بار بصورت فشاری و بارگذاری یکنواخت خارجی ناشی از دوران پره‌های اسپول برابر با ۵۰ مگاپاسکال در نظر گرفته شده است. جنس ماده در حالت همگن Ti6Al4V-Annealed فرض شده است. همچنین در تحلیل FGM ضرایب ثابت غیرهمگن به صورت $m_1 = m_2 = m_3 = m$ فرض شده است و بازه تغییرات این ثابت‌ها مطابق با آن چه در منابع آمده مابین ۲- تا ۲+ در نظر گرفته می‌شود.

در شکل ۴ که نمودار تنش شعاعی برحسب شعاع می‌باشد، با توجه به ثابت بودن بارگذاری در سطوح داخلی و خارجی مشاهده می‌شود، با تغییر جنس ماده از حالت همگن به FGM تأثیر چندانی در تنش شعاعی وارد بر اسپول ایجاد نمی‌شود.



شکل ۴. نمودار تنش شعاعی برحسب شعاع برای حالت همگن و FGM با ضرایب مختلف

$$D_9 = \int_{r_i}^{r_o} \frac{A_1(1+\nu)r^{\frac{m+H}{2}}}{D_6} dr$$

بدیهی است برای بدست آوردن تنش محوری مؤثر مشابه با حالت همگن با جایگذاری تنش محوری در حالت گیردار از رابطه ۲۸ در تساوی ۲۰ و پس از محاسبه و ساده‌سازی انتگرال حاصل تنش محوری مؤثر بدست می‌آید. همچنین با جایگذاری تنش‌های محاسبه شده در رابطه ۳ کرنش‌ها بدست می‌آید. از طرفی با جایگذاری ثابت‌های انتگرالی رابطه ۲۹ در رابطه ۲۶ جابجایی شعاعی و با جایگذاری کرنش محوری محاسبه شده در رابطه $w = z \varepsilon_z$ بدین ترتیب همچون حالت همگن میدان جابجایی‌ها و مؤلفه‌های تانسور تنش و کرنش بدست آمد. همچنین لازم به ذکر است برای بررسی شکست استوانه مدنظر در هر دو حالت همگن و FGM از معیار تسلیم وون میز ۳۳ استفاده شده است. تنش معادل در این معیار نیز با استفاده از رابطه تنش معادل وون میز ۳۴ طبق رابطه ۳۲ عبارت است از:

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\theta)^2]} \quad (32)$$

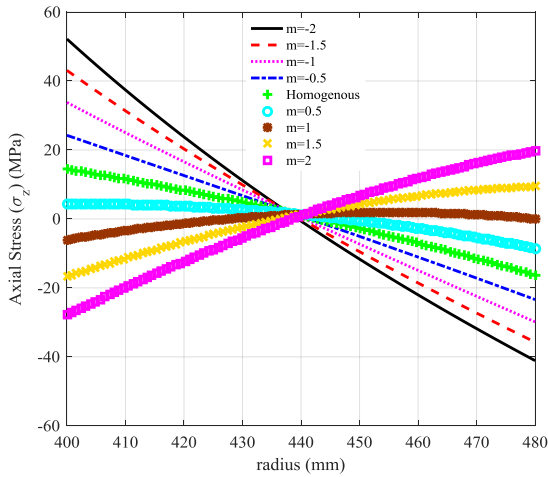
و ضریب اطمینان سازه مورد تحلیل طبق رابطه ۳۳ بدست می‌آید:

$$S_f = \frac{\sigma_y}{\sigma_v} \quad (33)$$

که در رابطه فوق S_f ضریب اطمینان ماده است و بایستی حداقل برابر با یک باشد تا سازه تحت بارگذاری اعمالی دچار شکست نشود. σ_v تنش معادل وون میز بوده و طبق رابطه ۳۲ محاسبه شده و σ_y تنش تسلیم ماده بوده که برای مواد همگن مقداری ثابت و مشخص است و برای ماده FGM مورد بحث طبق سومین رابطه ۲۳ محاسبه می‌شود.

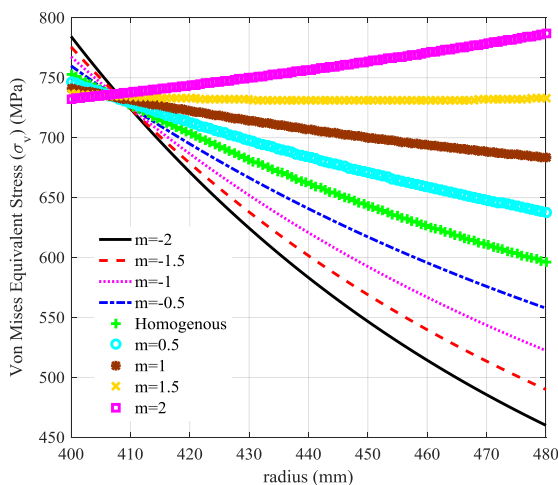
۴. تحلیل اسپول عقب کمپرسور محوری

برای تحلیل اسپول عقب کمپرسور محوری، ساختار آن مشابه با یک استوانه دوار جدار ضخیم یک سر گیر دار مدل‌سازی شده است. حل تحلیلی تنش‌ها، کرنش‌ها و جابجایی‌ها برای هر دو حالت همگن و FGM در بخش‌های ۲ و ۳ استخراج شد. برای تحلیل، یک استوانه با مشخصات داده شده در جدول ۱ در نظر گرفته شده است.



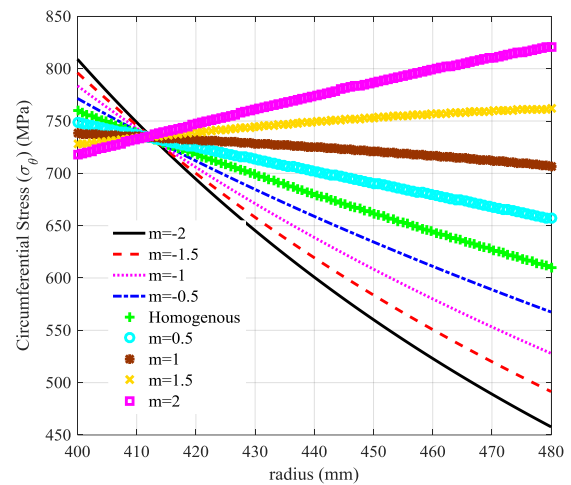
شکل ۶. نمودار تنش محوری برحسب شعاع برای حالت همگن و FGM با ضرایب مختلف

شکل ۷ نمودار توزیع تنش معادل وون میزز برحسب شعاع را نشان می‌دهد. در این شکل مشاهده می‌شود زمانی که ضریب ماده FGM منفی و برابر با کمترین مقدار خود (برابر با -۲) باشد، کمترین مقادیر تنش نسبت به سایر حالات را نتیجه می‌دهد، اما در حالتی که این ضریب مثبت و مقدار بیشینه خود (برابر با ۲) باشد، سبب افزایش تنش در راستای شعاع اسپول می‌شود که از این نظر حالت همگن نسبت به ضرایب مثبت نتایج بهتری دارد. همچنین لازم به ذکر است با انتخاب ضرایب مثبت و منفی به ترتیب سطوح خارجی و داخلی اسپول از نظر تنش وارد شده به عنوان سطوح بحرانی شناخته خواهند شد.



شکل ۷. نمودار تنش وون میزز برحسب شعاع برای حالت همگن و FGM با ضرایب مختلف

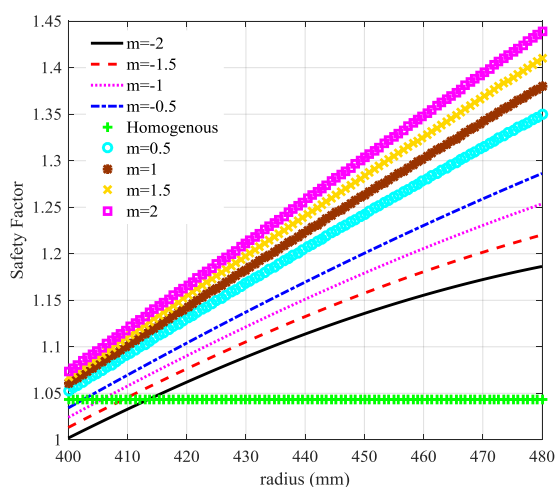
مطابق با شکل ۵، مشاهده می‌شود که با انتخاب ماده FGM با ضریب منفی، تنش محیطی وارد بر اسپول در سطح داخلی بسیار بیشتر از سطح خارجی می‌باشد. با افزایش این ضریب تنش‌های سطح داخلی کاهش و سطح خارجی افزایش می‌یابد که این نرخ تغییرات در سطح خارجی بسیار بیش از سطح داخلی می‌باشد. هنگام استفاده از مواد FGM با ضرایب مثبت نسبت به حالت همگن محدوده تنش‌ها در سطح داخلی کاهش و در سطح خارجی افزایش یافته و با استفاده از مواد FGM با ضرایب منفی تنش‌ها رفتاری متضاد با ضرایب مثبت را از خود نشان می‌دهند.



شکل ۵. نمودار تنش محیطی برحسب شعاع برای حالت همگن و FGM با ضرایب مختلف

در شکل ۶ که مربوط به توزیع تنش محوری برحسب شعاع می‌باشد، مشاهده می‌شود، رفتار توزیع تنش محوری بسیار نزدیک به تنش محیطی است. با این تفاوت که دامنه تغییرات تنش محوری چه در حالت همگن و چه در حالت FGM زیاد نیست، هرچند در این تنش، حالت همگن تنش‌هایی نزدیک به بهترین حالت FGM ارائه می‌دهد که در تحلیل انجام شده بهترین نتیجه مربوط به ضریب غیرهمگن ۰/۵- می‌باشد. همچنین با دور شدن رفتار تابع خواص از حالت همگن دامنه‌ی تغییرات تنش افزایش چشمگیری پیدا می‌کند. از سوی دیگر بطور کلی اختلاف بین مقادیر تنش در سطوح داخلی و خارجی در ضرایب منفی نسبت به ضرایب مثبت بیشتر است.

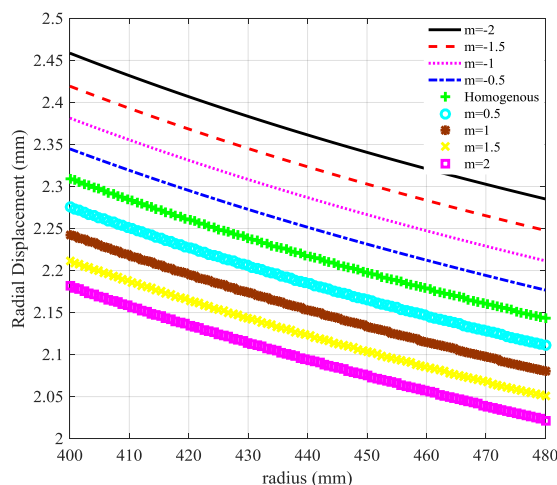
طبق شکل ۱۰ استفاده از مواد FGM با ضرایب مثبت نسبت به مواد همگن، منجر به بهبود ضریب اطمینان اسپول شده است. استفاده از ضرایب منفی منجر به کاهش ضریب اطمینان نسبت به حالت همگن شده و این کاهش به حدی است که سازه دچار شکست خواهد شد. در بین ضرایب مثبت، ضرایب با مقادیر بیشتر نتایج بهتری را نشان می‌دهند. لذا زمانی که ضریب FGM برابر $+2$ باشد، سازه بالاترین ضریب اطمینان را خواهد داشت. با توجه به رابطه ۲۳، هرچه ضریب تابع خواص مربوط به استحکام تسلیم ماده بیشتر باشد، ماده دارای استحکام بالاتری در سطوح خارجی خواهد بود. طبق شکل ۷ با وجود این که توان $+2$ تنش‌های بیشتری نسبت به توان -2 در سازه ایجاد می‌کند، اما چون نسبت استحکام تسلیم آن به تنش معادلی که به آن وارد می‌شود، بیشتر است، دارای ضریب اطمینان بیشتری نسبت به توان -2 می‌باشد. اگر ضریب اطمینان بیشتر مورد نظر باشد، در اینجا بهترین انتخاب مربوط به حالتی است که ضریب تابع خواص برابر $+2$ در نظر گرفته شود. همچنین مشخص است در اسپول مدنظر در تمامی حالات FGM مفروض، سطح داخلی، سطح بحرانی است.



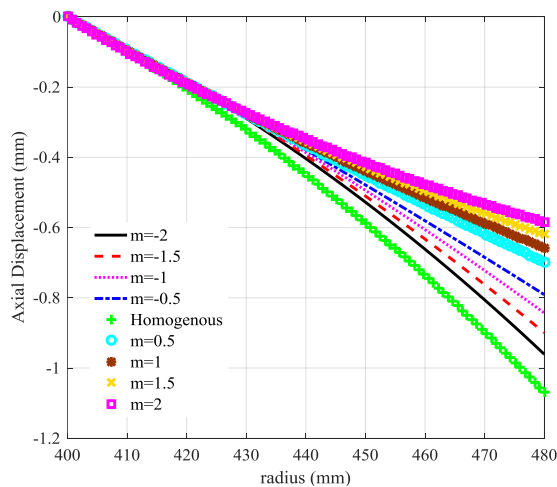
شکل ۱۰. نمودار ضریب اطمینان برحسب شعاع برای حالت همگن و FGM با ضرایب مختلف

در شکل‌های ۱۱ تا ۱۳ به ترتیب توزیع کرنش‌های شعاعی، محیطی و محوری اسپول مدنظر در طول شعاع نشان داده شده است. محدوده کرنش‌ها در دو راستای شعاعی و محوری منفی و در راستای محیطی مثبت است. با وجود ناچیز بودن بازه کرنش‌ها در هر سه راستا، در تمامی حالات کاهش قابل توجه مقدار کرنش‌ها در صورت استفاده از ماده FGM با ضریب $+2$ نسبت به حالت همگن قابل مشاهده است.

نتایج بررسی جابجایی شعاعی و محوری برحسب شعاع در شکل‌های ۸ و ۹، قابل مشاهده است. به طور کلی میزان جابجایی شعاعی در سطح داخلی بیش از سطح خارجی بوده و با انتخاب ضرایب مثبت محدوده جابجایی‌ها کاهش می‌یابد. بنابراین ضرایب مثبت رفتار بهتری نسبت به ضرایب منفی داشته و حالت همگن نتایجی بین ضرایب مثبت و منفی را ارائه می‌دهد. همچنین با توجه به یکسر گیردار بودن اسپول، جابجایی محوری در سطح داخلی برابر با صفر است و برای تمامی حالات سطح خارجی دارای جابجایی محوری بیشینه است. واضح است بدترین نتایج مربوط به حالت همگن بوده و انتخاب ضرایب مثبت منجر به بیشترین میزان کاهش در جابجایی محیطی اسپول می‌گردد. از سوی دیگر لازم به ذکر است بازه جابجایی‌های محوری در قیاس با جابجایی‌های شعاعی بسیار ناچیز می‌باشد.



شکل ۸. نمودار جابجایی شعاعی برحسب شعاع برای حالت همگن و FGM با ضرایب مختلف



شکل ۹. نمودار جابجایی محوری برحسب شعاع برای حالت همگن و FGM با ضرایب مختلف

۵. نتیجه گیری

در این تحقیق یک حل دقیق جهت تحلیل سازه درام کمپرسور موتور توربین گاز هوایی ارائه گردید. روش ارائه شده قابلیت کاربرد جهت تحلیل و طراحی درام موتورهای توربینی هوایی را دارد. مهمترین نتایج حاصل از این تحقیق عبارتند از:

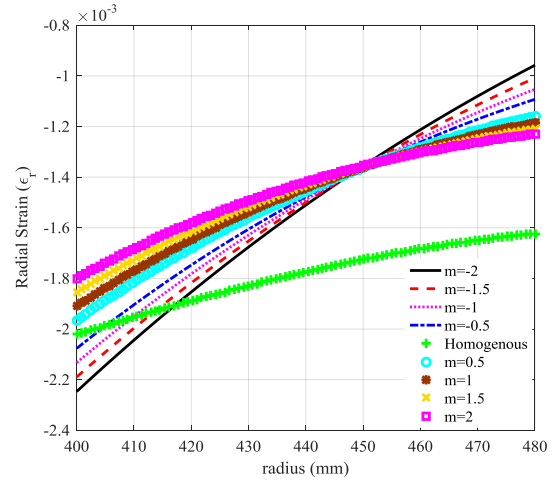
- مؤلفه تنش محیطی از سایر تنش‌ها بحرانی‌تر بوده و بیشترین تأثیرگذاری را بر تسلیم اسپول خواهد داشت.
- تنش‌های به وجود آمده در سازه در حالتی که توان تابع خواص $+2$ است کمتر از زمانی است که مقدار آن $+2$ می‌باشد.
- جابجایی شعاعی و محوری در سازه برای حالتی که توان تابع خواص $+2$ است، نسبت به حالت همگن و سایر حالات توان تابع خواص کمتر است.

- به‌طور کلی استفاده از ماده همگن و FGM تفاوت چشمگیری در جابجایی‌های شعاعی نداشته و کمترین آن‌ها مربوط به توان $+2$ و بیشترین آن مربوط به توان 2 می‌باشد و جابجایی همگن در بین آن‌ها قرار دارد و اختلاف نتایج از $4/6$ درصد فراتر نرفته است.

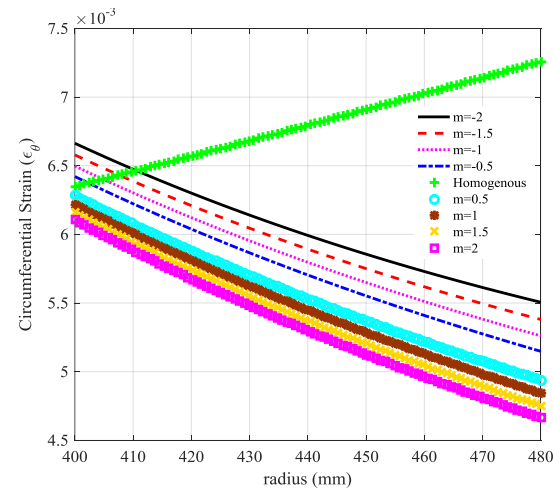
- در تمامی حالات بررسی شده، جابجایی‌های شعاعی سطح داخلی بیشتر از سطح خارجی می‌باشد.

- در مورد جابجایی محوری، استفاده از ماده FGM باعث کاهش جابجایی می‌شود و برای توان $+2$ که بالاترین ضریب اطمینان مربوط به آن می‌باشد، تا $45/46$ درصد کاهش جابجایی نسبت به حالت همگن مشاهده شده است.

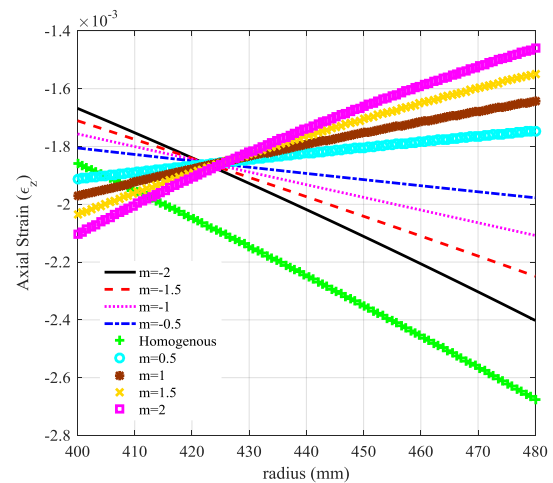
- ضریب اطمینان برای حالتی که ضریب تابع خواص $+2$ است نسبت به سایر حالات بیشتر بوده و چون برای سازه‌های هوایی ضریب اطمینان عامل مهم و تعیین کننده‌ای می‌باشد، ضریب ماده FGM برابر با $+2$ به عنوان ماده مناسب برای اسپول خاص بررسی شده انتخاب می‌شود.



شکل ۱۱. نمودار کرنش شعاعی برحسب شعاع برای حالت همگن و FGM با ضرایب مختلف



شکل ۱۲. نمودار کرنش محیطی برحسب شعاع برای حالت همگن و FGM با ضرایب مختلف



شکل ۱۳. نمودار کرنش محوری برحسب شعاع برای حالت همگن و FGM با ضرایب مختلف

- [1] A. E. H. Love, *Mathematical Theory of Elasticity*, pp. 489-504, Dover Publication, 1994.
- [2] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, J. B. Sykes, W. H. Reid, E. H. Dill, *Theory of elasticity*, pp. 44-50, PhT, 1960.
- [3] A. Nadai, *Theory of flow and fracture of solids*, McGraw-Hill Book Co., 1950.
- [4] E. E. Sechler, *Elasticity in engineering*, Dover Publications Inc., 1969.
- [5] S. Timoshenko, J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, Third Edition, McGraw-Hill, 1970.
- [6] E. Volterra, J. H. Gaines, *Advanced strength of materials*, Prentice-Hall, 1971.
- [7] S. R. Schmid, B. J. Hamrock, B. O. Jacobson, *Fundamentals of machine elements: SI version*, CRC Press, 2014.
- [8] E. J. Hearn, *Mechanics of Materials 2: The mechanics of elastic and plastic deformation of solids and structural materials*, Elsevier, 1997.
- [9] M. Z. Nejad, P. Fatehi, Exact elasto-plastic analysis of rotating thick-walled cylindrical pressure vessels made of functionally graded materials, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 86, No.1, pp. 26-43, 2015.
- [10] Jr. P. G. Hodge, M. A. Balaban, Elastic—plastic analysis of a rotating cylinder, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 4, No. 6, pp. 465-476, 1962.
- [11] F. Rooney, M. Ferrari, Tension, bending, and flexure of functionally graded cylinders, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, No. 3, pp. 413-421, 2001.
- [12] N. Tutuncu, M. Ozturk, Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 32, No. 8, pp. 683-686, 2001.
- [13] J. Q. Tarn, Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, No. 46, pp. 8189-8206, 2001.
- [14] Z. Q. Cheng, S. Kitipornchai, Exact bending solution of inhomogeneous plates from homogeneous thin-plate deflection, *AIAA journal*, Vol. 38, No. 7, pp. 1289-1291, 2000.
- [15] M. Jabbari, S. Sohrabpour, M. R. Eslami, Mechanical and Thermal Stresses in a Functionally Graded Hollow Cylinder Due to Radially Symmetric Loads, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 79, No. 7, pp. 493-493, 2002.
- [16] W. Mack, Rotating Elastic-Plastic Tube with Free Ends, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 27, No. 11, pp. 1461-1476, 1991.
- [17] Y. Anani, G. H. Rahimi, Stress Analysis of Rotating Cylindrical Shell Composed of Functionally Graded Incompressible Hyperelastic Materials, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 108, No. 1, pp. 122-128, 2016.
- [18] Z. Q. Cheng, S. Kitipornchai, Exact bending solution of inhomogeneous plates from homogeneous thin-plate deflection, *AIAA journal*, Vol. 38, No. 7, pp. 1289-1291, 2000.
- [19] M. Z. Nejad, A. Afshin, Thermoelastic transient response of rotating thick cylindrical shells under general boundary conditions, *International Research Journal of Applied and Basic Sciences*, Vol. 4, No. 9, pp. 2796-2809, 2013.
- [20] C. O. Horgan, A. M. Chan, The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials, *Journal of Elasticity*, Vol. 55, No. 1, pp. 43-59, 1999.
- [21] M. J. Khoshgoftar, G. H. Rahimi, M. Arefi, Exact solution of functionally graded thick cylinder with finite length under longitudinally non-uniform pressure, *Mechanics Research Communications*, Vol. 51, No. 1, pp. 61-66, 2013.
- [22] M. Ghannad, G. H. Rahimi, M. Z. Nejad, Elastic analysis of pressurized thick cylindrical shells with variable thickness made of functionally graded materials, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 45, No. 1, pp. 388-396, 2013.
- [23] M. Z. Nejad, M. Jabbari, M. Ghannad, A semi-analytical solution for elastic analysis of rotating thick cylindrical shells with variable thickness using disk form multilayers, *The Scientific World Journal*, 2014.

- [24] M. H. Jalali, B. Shahriari B, Elastic Stress Analysis of Rotating Functionally Graded Annular Disk of Variable Thickness Using Finite Difference Method, *Mathematical Problems in Engineering*, 2018.
- [25] B. Shahriari, M. Jalali, M. R. Karamooz Ravari, Vibration analysis of a rotating variable thickness bladed disk for aircraft gas turbine engine using generalized differential quadrature method, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 23, No. 14, pp. 2739-2749, 2017.
- [26] B. Shahriari, Sh. Yousefi, M. Tajdari, M. R. Karamooz Ravari, Optimum design of the turbine blisk of a mini-turbojet engine, *Aerospace Knowledge and Technolog Journal*, Vol. 4, No. 1, pp. 83-98, 2015.
- [27] V. Vullo, F. Vivio, Rotors: *Stress analysis and design*, Springer Science & Business Media, 2013.

پي نوشت

-
1. Love
 2. Landau
 3. Lifshitz
 4. Nadai
 5. Sechler
 6. Timoshenko
 7. Goodier
 8. Volterra
 9. Gaines
 10. Hamrock
 11. Hearn
 12. Hodge
 13. Rooney
 14. Ferrari
 15. Tutunku
 16. Oztuk
 17. Tarn
 18. Cheng
 19. Mack
 20. Horgan
 21. Chan
 22. Navier's Equation of motion
 23. Von Mises' failure criteria
 24. Von Mises' equivalent stresses