

تعقیب و اجتناب از عوارض زمین در زمان کمینه بر مبنای همواری دیفرانسیلی

رضا جمیل نیا

استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت، jamilnia@guilan.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۲/۰۵

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۶/۲۰

چکیده

در مقاله حاضر، رویکرد جدیدی برای بهینه‌سازی مسیرهای پرواز وسایل هوافضایی به منظور تعقیب و اجتناب از عوارض زمین ارائه می‌گردد. در این رویکرد، مسئله بهینه‌سازی مسیر با استفاده از معادلات حرکت سه‌بعدی در دستگاه مختصات سرعت و در قالب یک مسئله کنترل بهینه کمینه زمان تعریف گردیده و با یک روش مستقیم ترکیبی حل می‌شود. روش حل استفاده شده، ترکیبی از روش‌های هم‌نشانی مستقیم، برنامه‌ریزی غیرخطی، همواری دیفرانسیلی و منحنی‌های بی‌اسپیلاین می‌باشد. در این روش، با استفاده از همواری دیفرانسیلی، معادلات دینامیکی حاکم بر مسئله در کمترین فضای ابعادی ممکن و با حداقل تعداد متغیرهای حالت بیان می‌گردند. همچنین، متغیرهای حالت با منحنی‌های بی‌اسپیلاین مناسب تقریب زده شده و نقاط کنترل این منحنی‌ها، به عنوان متغیرهای بهینه‌سازی گسسته مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی در نظر گرفته می‌شوند. با استفاده از رویکرد پیشنهادی، مسیرهای پرواز کمینه زمان بر مبنای دینامیک مسئله و قیود فیزیکی و عملیاتی بدست می‌آیند. به دلیل سرعت و دقت بالای حل، از این رویکرد می‌توان برای تولید مسیرهای بهینه بر خط در ساختارهای کنترل پیش‌بین مدل استفاده نمود. در این مقاله، برای نشان دادن ویژگی‌ها و قابلیت‌های رویکرد پیشنهادی، یک مثال عددی ارائه و حل می‌شود.

واژگان کلیدی

تعقیب و اجتناب از عوارض زمین، زمان کمینه، بهینه‌سازی مسیر، هم‌نشانی مستقیم، همواری دیفرانسیلی.

۱. مقدمه

عدم برخورد با عوارض زمین، پرهیز از نزدیکی به مناطق پرخطر و تعیین مسیرهای هموار مطابق با قابلیت‌های مانوری و سازه‌ای وسیله از جمله این چالش‌ها هستند. بر این اساس، تعیین مسیر بهینه پرواز با در نظر گرفتن شرایط مذکور، بسیار با اهمیت و مورد توجه می‌باشد.

پرواز هواپیماها، موشک‌ها، پهپادها و وسایل هوایی بدون سرنشین در ارتفاع کم و نزدیک به سطح زمین، ضمن ایجاد شرایط مطلوب برای پنهان شدن این وسایل در میان عوارض زمین و عدم رهگیری توسط دشمن، با چالش‌های گوناگونی مواجه می‌باشد.

به طور کلی، در مواجهه وسایل با عوارض زمین، دو رویکرد کلی مطرح می‌شود: تعقیب عوارض^۱ و اجتناب از عوارض^۲. در تعقیب عوارض (TF) وسیله تلاش می‌کند با حداقل ارتفاع مشخصی از روی عوارض عبور کرده و پروفیل عوارض را تعقیب نماید که این فرآیند عموماً در صفحه عمودی حرکت وسیله رخ می‌دهد. در اجتناب از عوارض (TA) وسیله تلاش می‌کند تا با تغییر مسیر از برخورد با عوارض اجتناب کرده و عوارض را دور بزند که این فرآیند عموماً در صفحه افقی حرکت وسیله رخ می‌دهد. حال اگر وسیله بتواند با مانوری مشخص در فضای سه بعدی، از عوارض زمین عبور نماید، عملاً ترکیبی از دو رویکرد مذکور (TF/TA) را تجربه خواهد کرد.

با بهینه‌سازی مسیر عبور وسایل از عوارض زمین، می‌توان این عبور را با رخدادهای بهینه‌ای (نظیر کمینه‌کردن زمان، سوخت مصرفی یا تلاش کنترلی) همراه نمود. تا کنون روش‌های گوناگونی برای تعیین مسیرهای بهینه برای عبور از عوارض زمین پیشنهاد شده است که از آن جمله می‌توان به روش‌های هندسی [۱]، روش‌های مبتنی بر نقشه جاده [۲]، روش‌های مبتنی بر تجزیه سلولی [۳] و روش‌های مبتنی بر کنترل بهینه [۴] اشاره نمود. در روش‌هایی که مبتنی بر کنترل بهینه نیستند، روال کار عموماً به این صورت می‌باشد که ابتدا، مسیرهای ممکن متناسب با موانع و عوارض زمین شناسایی می‌گردند. سپس، با بهره‌گیری از الگوریتم‌های بهینه‌سازی نظیر برنامه‌ریزی پویا و دایجسترا^۳، مسیر بهینه از میان مسیرهای شناسایی شده تعیین می‌شود. در نهایت، با هموارسازی مسیر با استفاده از منحنی‌های مختلف به منظور تأمین پرواز ایمن و ممکن برای وسیله، مسیر بهینه‌ای نهایی بدست می‌آید. در روش‌های مبتنی بر کنترل بهینه، تمامی فرآیندهای روش‌های پیشین نظیر تعیین مسیرهای ممکن، انتخاب مسیر بهینه و هموارسازی مسیر در قالب حل یک مسئله کنترل بهینه به بهترین شکل و به صورت یکجا انجام می‌پذیرد. روش‌های پیشین بیشتر بر هندسه و سینماتیک مسئله تکیه می‌کنند، اما در روش‌های مبتنی بر کنترل بهینه، سینماتیک و دینامیک مسئله بطور همزمان مدنظر قرار می‌گیرند و امکان اعمال قیود گوناگون، مرزبندی متغیرهای حالت و کنترل و بهینه‌سازی براساس توابع هدف متنوع و پیچیده فراهم می‌باشد.

برخی از محققان با تعریف مسئله کنترل بهینه عبور از عوارض در فضای سه‌بعدی و با معادلات حرکت شش درجه

آزادی، مسیرهای بهینه دقیقی را با روش‌های حل گوناگون تولید نموده‌اند [۵، ۶]. اما به واسطه دشواری فرآیند حل و نیز زمان بالای حل، نمی‌توان از چنین مسیرها و کنترل‌های بهینه‌ای در ساختارهای حلقه بسته برخط^۴ استفاده کرد. در واقع، اینگونه مسیرها به صورت حلقه باز قابل استفاده بوده و برای عوارض، مأموریت‌ها، اهداف و قیود از پیش تعیین‌شده قابل استفاده هستند.

در مقابل، گروهی از محققان با ساده‌سازی مدل دینامیکی توانسته‌اند زمان حل مسئله کنترل بهینه را کاهش داده و زمینه را برای بهره‌گیری برخط از مسیرهای بهینه تولیدی فراهم کنند. این ساده‌سازی عموماً با در نظر گرفتن حرکت دوبعدی (صفحه‌ای) وسایل صورت پذیرفته است [۷، ۸]. در شکل توسعه‌یافته این رویکرد، با تفکیک صفحات حرکت وسایل و تولید مسیرهای بهینه صفحه‌ای و تلفیق و ترکیب برخط آنها، مسیرهای بهینه سه‌بعدی بدست آمده‌اند [۹].

در مقاله حاضر، مسئله کنترل بهینه عبور از عوارض زمین در قالب معادلات دینامیکی سه‌بعدی تعریف می‌گردد و بدون هرگونه ساده‌سازی و تفکیک صفحات حرکت، حل می‌شود. به منظور فراهم‌نمودن شرایط لازم برای استفاده از مسیرها و کنترل‌های بهینه تولیدی در ساختارهای حلقه بسته، مسئله مذکور با یک رویکرد ترکیبی جدید با دقت و سرعت بالا حل می‌شود. این رویکرد ترکیبی مبتنی بر همواری دیفرانسیلی^۵ برای کاهش فضای ابعادی مسئله و منحنی‌های بی‌اسپیلاین^۶ برای تقریب مسیر پرواز می‌باشد. در این رویکرد، معادلات حالت و قیود مسیر در نقاط هم‌نشانی^۷ (گره‌های زمانی) مشخص اعمال می‌گردند و نقاط کنترل منحنی‌های بی‌اسپیلاین به عنوان متغیرهای گسسته بهینه‌سازی در نظر گرفته می‌شوند. با استفاده از این رویکرد، مسئله کنترل بهینه تبدیل به یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی^۸ شده و به صورت دقیق حل می‌گردد. این رویکرد، با کاهش شدید تعداد متغیرها و قیود بهینه‌سازی، امکان حل سریع مسائل بهینه‌سازی مسیر را به صورت برخط فراهم نموده و علیرغم گسستگی متغیرهای بهینه‌سازی، به مسیر پیوسته و همواری منجر می‌گردد.

به منظور تعریف مسئله و تشریح رویکرد جدید، مقاله حاضر به صورت زیر سازماندهی گردیده است: در بخش دوم، معادلات حاکم بر مسئله شامل معادلات حرکت وسیله و عوارض زمین ارائه می‌شود. در بخش سوم، براساس معادلات حاکم و مأموریت موردنظر، مسئله بهینه‌سازی مسیر عبور از عوارض زمین تعریف

در معادلات بیان شده، بردارهای حالت و کنترل به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\vec{x} = [V \ \gamma \ \psi \ x \ y \ z] \quad (11)$$

$$\vec{u} = [\alpha \ \beta] \quad (12)$$

اگر بخواهیم کنترل‌ها را در قالب فرامین شتاب عمودی (a_{vc}) و شتاب افقی (a_{hc}) بر وسیله اعمال نماییم، این فرامین را می‌توانیم از معادلات زیر بدست آوریم:

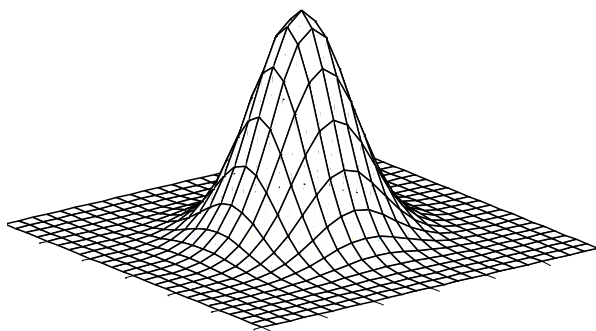
$$a_{vc} = \frac{L \cos \beta}{m} \quad (13)$$

$$a_{hc} = \frac{L \sin \beta}{m} \quad (14)$$

فرامین شتاب فوق، دربرگیرنده هر دو متغیر کنترل می‌باشند. برای مدل‌سازی عوارض زمین، می‌توان از تقریب نمایی زیر استفاده نمود [۴]:

$$Z_T(x, y) = A e^{-(x^2 + y^2)} \quad (15)$$

در معادله فوق، Z_T ارتفاع عارضه زمین در نقطه (x, y) و A بیشینه ارتفاع عارضه می‌باشد. در شکل ۱، نمای کلی عوارض تولیدی با معادله (۱۵) نشان داده شده است.



شکل ۱. مدل عمومی یک عارضه

۳. تعریف مسئله بهینه‌سازی مسیر

مسئله بهینه‌سازی مسیر عبور از عوارض زمین در فضای سه‌بعدی (با رویکرد ترکیبی TF/TA) را می‌توان براساس توابع هدف گوناگونی تعریف نمود. در مقاله حاضر، کمینه‌نمودن زمان عبور از موانع و عوارض زمین به عنوان تابع هدف مدنظر می‌باشد. براین اساس، تابع هدف به صورت زیر خواهد بود:

$$F = t_f \quad (16)$$

در رابطه فوق، t_f زمان نهایی مسئله می‌باشد که باید در طول فرآیند بهینه‌سازی، کمینه گردد.

می‌گردد. رویکرد ترکیبی جدید برای حل مسائل بهینه‌سازی مسیر در بخش چهارم شرح داده می‌شود. در بخش پنجم، فرآیند حل مسئله عبور از عوارض با رویکرد جدید بیان می‌گردد. به منظور نشان دادن ویژگی‌ها و قابلیت‌های رویکرد پیشنهادی، یک مثال عددی در بخش ششم مطرح و حل می‌شود. در نهایت، نتیجه‌گیری حاصل از این تحقیق در بخش هفتم ارائه می‌گردد.

۲. معادلات حاکم

در مقاله حاضر، برای بهینه‌سازی مسیر عبور وسایل هوافضایی از عوارض زمین، از معادلات حرکت سه‌درجه آزادی جرم نقطه‌ای در دستگاه مختصات سرعت استفاده می‌نماییم [۱۰]:

$$\dot{V} = \frac{T-D}{m} - g \sin \gamma \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{L \cos \beta}{mV} + \cos \gamma \left(\frac{V}{r} - \frac{g}{V} \right) \quad (2)$$

$$\dot{\psi} = \frac{L \sin \beta}{mV \cos \gamma} \quad (3)$$

$$\dot{x} = V \cos \gamma \cos \psi \quad (4)$$

$$\dot{y} = V \cos \gamma \sin \psi \quad (5)$$

$$\dot{z} = V \sin \gamma \quad (6)$$

در معادلات فوق، V سرعت وسیله، γ زاویه مسیر پرواز، ψ زاویه سمت، x برد طولی، y برد عرضی، z ارتفاع، r فاصله وسیله از مرکز زمین، m جرم وسیله، g شتاب جاذبه زمین، T نیروی تراست و β زاویه رول می‌باشد. در این معادلات، D و L به ترتیب بیانگر نیروهای درگ و لیفت وارده بر وسیله می‌باشند که مقادیر آنها در هر لحظه با معادلات زیر قابل محاسبه می‌باشند:

$$D = 0.5 C_D S \rho V^2 \quad (7)$$

$$L = 0.5 C_L S \rho V^2 \quad (8)$$

$$C_D = b_2 \alpha^2 + b_1 \alpha + b_0 \quad (9)$$

$$C_L = a_1 \alpha + a_0 \quad (10)$$

در معادلات فوق، S سطح مرجع آیرودینامیکی، ρ چگالی هوا، C_D ضریب درگ، C_L ضریب لیفت و α زاویه حمله می‌باشد. همچنین، ضرایب b_0, b_1, b_2, a_0, a_1 برای تعیین ضرایب درگ و لیفت مورد استفاده قرار می‌گیرند.

با توجه به پرواز وسایل در ارتفاع کم در این مقاله، لزومی به بهره‌گیری از مدل‌های جاذبه و اتمسفر برای محاسبه مقادیر شتاب جاذبه زمین و چگالی هوا وجود ندارد و می‌توان از مقادیر آنها در سطح زمین استفاده نمود.

حل به نوعی توسعه یافته یا زیرمجموعه این سه روش هستند. در روش غیرمستقیم، با تعریف تابع همبیلتونین^۹ و استفاده از اصل بیشینگی پونتریاگین^{۱۰}، معادلات شرایط لازم و کافی برای بهینگی بدست می آید. در این معادلات، متغیرهای کنترل با تعریف متغیرهای شبه حالت (الحاقی) حذف گردیده و مجموعه ای از معادلات دیفرانسیلی و جبری با دو یا چند نقطه شرط مرزی بدست می آید. این مجموعه معادلات را می توان با روش های مختلف عددی حل نمود.

طراحان مسیرهای بهینه در استفاده از روش غیرمستقیم عموماً با دو مشکل مواجه می شوند: یکی، دشواری فرآیند تولید معادلات شرایط لازم به دلیل ماهیت تحلیلی و دیگری، دشواری فرآیند تولید حدس های اولیه برای متغیرهای شبه حالت که معمولاً فاقد مفهوم فیزیکی هستند و حساسیت بسیار زیادی به حدس های اولیه دارند [۱۰]. در روش پرتاب مستقیم، با تقریب متغیرهای کنترل با منحنی های مختلف و در نظر گرفتن پارامترهای منحنی ها به عنوان متغیرهای بهینه سازی، یک مسئله برنامه ریزی غیرخطی بدست می آید که قابل حل با روش های عددی مختلف است. این روش، مشکلات روش غیرمستقیم را ندارد، اما به دلیل انجام مکرر فرآیند انتگرال گیری عددی معادلات حالت و انجام فرآیند پرتاب برای متغیرهای حالت فاقد مقدار اولیه، دارای سرعت حل و میل همگرایی بسیار پایینی است [۱۰].

در روش هم نشانی مستقیم، با گسسته سازی کامل مسئله و تبدیل معادلات دیفرانسیلی و انتگرالی به معادلات جبری ساده، امکان استفاده از روش های متنوع برنامه ریزی غیرخطی فراهم می شود [۱۱، ۱۲]. در این روش، با تقسیم بازه زمانی مسئله به زیربازه های زمانی کوچک تر، معادلات حالت برای هر زیربازه به صورت عبارات جبری ساده درمی آید. به نقاط ابتدا و انتهای هر زیربازه زمانی، گره های زمانی (نقاط هم نشانی) می گویند. در این روش، به جای توابع زمانی حالت و کنترل، مقادیر گسسته حالت و کنترل در گره های زمانی، به عنوان متغیرهای مسئله برنامه ریزی غیرخطی در نظر گرفته می شوند. در روش هم نشانی مستقیم، به منظور کاهش خطای گسسته سازی، باید گره های زمانی زیادی تعریف شوند که این امر، سبب ایجاد تعداد زیادی متغیر و قید بهینه سازی می گردد. همچنین، پاسخ بهینه حاصله از این روش، گسسته می باشد که با ماهیت پیوسته مسئله مغایرت دارد.

معادلات حالت برای این مسئله، همان معادلات حرکت بیان شده در بخش دوم (معادلات (۱) تا (۶)) می باشند و متغیرهای حالت و کنترل این مسئله، بردارهای بیان شده در معادلات (۱۱) و (۱۲) می باشند.

در مسئله حاضر، می توان متغیرهای حالت و کنترل را در محدوده های عملیاتی و قابل قبول به صورت زیر مرزبندی نمود:

$$lb_i \leq x_i, u_i \leq ub_i \quad (17)$$

در رابطه فوق، lb_i مرز پایین و ub_i مرز بالای متغیرهای حالت و کنترل می باشد.

برای مسئله بهینه سازی مسیر مورد نظر، می توان قیود نقطه ای و مسیری گوناگونی تعریف نمود. در مقاله حاضر، شرایط مرزی مسئله در قالب قیود نقطه ای به صورت زیر اعمال می گردند:

$$\begin{aligned} C_1 : x(t_0) = x_0 & & C_5 : x(t_f) = x_f \\ C_2 : y(t_0) = y_0 & & C_6 : y(t_f) = y_f \\ C_3 : z(t_0) = z_0 & & C_7 : z(t_f) = z_f \\ C_4 : V(t_0) = V_0 & & \end{aligned} \quad (18)$$

میزان مجاز فاصله وسیله از عوارض زمین را می توان در قالب یک قید مسیری نامساوی بر مسئله اعمال نمود:

$$CP_1 : z - Z_T \geq h_{all} \quad (19)$$

که در آن، h_{all} کمینه ارتفاع مجاز از عوارض زمین می باشد. برای اعمال محدودیت های سازه ای وسیله، می توان برای فرامین شتاب های عمودی و افقی نیز قیود مسیری در نظر گرفت:

$$CP_2 : a_{vc} \leq a_{vall} \quad (20)$$

$$CP_3 : a_{nc} \leq a_{hall} \quad (21)$$

با تعریف تابع هدف (F)، قیود نقطه ای (C_i) و مسیری (CP_i)، معادلات حالت (معادلات (۱) تا (۶))، بازه زمانی $[0, t_f]$ ، متغیرهای حالت و کنترل (معادلات (۱۱) و (۱۲)) و مرزبندی آنها، عملاً اجزای مختلف مسئله بهینه سازی مسیر مشخص شده است.

۴. بهینه سازی مسیر بر مبنای همواری دیفرانسیلی

در بخش پیشین، مسئله بهینه سازی مسیر عبور از عوارض زمین در زمان کمینه تعریف گردید. در این بخش، با ارائه یک رویکرد جدید، این مسئله حل خواهد شد.

به طور کلی، سه روش متداول برای حل مسائل بهینه سازی مسیر (کنترل بهینه) وجود دارد که عبارتند از: روش غیرمستقیم، روش پرتاب مستقیم و روش هم نشانی مستقیم. سایر روش های

معکوس، ابتدا با استفاده از معادلات حالت، رابطه‌های موجود میان متغیرهای کنترل و متغیرهای حالت و مشتقات زمانی مرتبه اول آنها بدست می‌آید. سپس، باقیمانده معادلات حالت برحسب روابط بدست‌آمده بازنویسی می‌شود. در این روش، برای محاسبه مشتقات متغیرهای حالت از روش تفاضل محدود استفاده می‌شود. مزیت روش معکوس، حذف متغیرهای کنترل از فرآیند هم‌نشانی، همگرایی و حل می‌باشد. همچنین در این روش، معادلات حالتی که در بدست‌آوردن روابط میان متغیرهای حالت و کنترل مورد استفاده قرار گرفته‌اند نیز حذف می‌شوند.

اما در سال‌های اخیر، گروه دیگری از محققان نشان داده‌اند که می‌توان علاوه بر متغیرهای کنترل، برخی از متغیرهای حالت را نیز از مسئله حذف نمود و فرآیند هم‌نشانی را تنها بر متغیرهای حالت باقیمانده اعمال کرد. پس از حل، می‌توان با بهره‌گیری از روابط موجود، مقادیر بهینه متغیرهای حالت و کنترل حذف‌شده را محاسبه نمود. رویکرد اخیر تنها در سیستم‌های غیرخطی هموار از لحاظ دیفرانسیلی امکان‌پذیر می‌باشد.

یک سیستم دینامیکی غیرخطی هنگامی از لحاظ دیفرانسیلی هموار می‌باشد که تغییر متغیری به صورت زیر برای آن وجود داشته باشد [۱۷]:

$$\vec{q} = \vec{h}(\vec{x}, \vec{u}, \dot{\vec{u}}, \ddot{\vec{u}}, \dots) \quad (22)$$

بگونه‌ای که بتوان به کمک آن، متغیرهای حالت (\vec{x}) و کنترل (\vec{u}) را به صورت زیر بدست آورد:

$$(\vec{x}, \vec{u}) = \vec{w}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}, \dots) \quad (23)$$

متغیرهای \vec{q} می‌توانند معادل با برخی از متغیرهای حالت یا ترکیبی از آنها باشند. این متغیرها لزوماً متغیرهای قابل قرائت از طریق حسگرها نمی‌باشند و تحت عنوان خروجی‌های هموار شناخته می‌شوند.

ویژگی بارز سیستم‌های هموار دیفرانسیلی این است که می‌توان کل رفتار سیستم را بدون انتگرال‌گیری و تنها با استفاده از خروجی‌های هموار و تعداد محدودی از مشتقات زمانی آنها بیان نمود. البته باید توجه داشت که به دلیل استفاده از مشتقات مراتب بالای خروجی‌های هموار، استفاده از روش تفاضل محدود برای محاسبات مشتقات، دیگر معقول نخواهد بود. اگر از مفهوم همواری دیفرانسیلی در کنترل بهینه استفاده شود، می‌توان فرآیند هم‌نشانی و تقریب را به جای کل متغیرهای حالت و کنترل، تنها بر خروجی‌های هموار اعمال نمود. با این کار، کاهش شدیدی در

با توجه به مشکلاتی که روش‌های متعارف حل مسائل بهینه‌سازی مسیر دارند، در این مقاله می‌خواهیم از یک رویکرد ترکیبی جدید استفاده نماییم. این رویکرد قادر است مسائل بهینه‌سازی مسیر را با دقت و سرعت بالایی حل کرده و پاسخ بهینه پیوسته‌ای را ارائه نماید.

رویکرد ترکیبی بر مبنای استفاده همزمان از مفاهیم همواری دیفرانسیلی، منحنی‌های بی‌اسپیلاین، هم‌نشانی مستقیم و برنامه‌ریزی غیرخطی پایه‌ریزی شده است. در این رویکرد، با بهره‌گیری از مفهوم همواری دیفرانسیلی، فضای ابعادی مسئله کنترل بهینه کاهش یافته و مسئله با حداقل تعداد متغیرها و معادلات حالت بیان می‌شود. همچنین، با استفاده از منحنی‌های بی‌اسپیلاین، علیرغم حفظ ماهیت گسسته متغیرهای بهینه‌سازی، مفهوم پیوسته‌ای از حل بدست می‌آید و نقش گره‌های زمانی در تقریب عبارات دیفرانسیلی و انتگرالی مسئله از بین می‌رود. در این رویکرد، با بهره‌گیری از مفهوم هم‌نشانی و گره‌های زمانی، معادلات حالت و قیود مسیری در گره‌های زمانی اعمال گردیده و در نهایت، نقاط کنترل منحنی‌های بی‌اسپیلاین به عنوان متغیرهای بهینه‌سازی مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی در نظر گرفته می‌شوند [۱۰].

در کارهای تحقیقاتی پیشین، عملکرد این رویکرد ترکیبی در تولید سریع و دقیق مسیرهای بهینه برای وسایل مختلفی نظیر موشک‌های بازگشتی به جو [۱۳]، ربات‌های فضایی انعطاف‌پذیر [۱۴] و فضاپیماهای ماه‌نشین [۱۵] مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. در ادامه، پیرامون هر یک از اجزای رویکرد ترکیبی به تفصیل بحث خواهد شد.

۱-۴. همواری دیفرانسیلی

در روش هم‌نشانی مستقیم کلاسیک، فرآیند هم‌نشانی بر روی کلیه متغیرهای حالت و کنترل اعمال می‌شود. این امر، سبب تولید تعداد زیادی متغیر و قید بهینه‌سازی می‌گردد.

در سال‌های اخیر، گروهی از محققان نشان داده‌اند که می‌توان با حذف متغیرهای کنترل از معادلات حالت، فرآیند هم‌نشانی را تنها بر متغیرهای حالت اعمال کرد و پس از همگرایی و حل مسئله، با بهره‌گیری از مقادیر بهینه محاسبه‌شده برای متغیرهای حالت، مقادیر بهینه متغیرهای کنترل را محاسبه نمود [۱۶]. به این رویکرد، روش معکوس گفته می‌شود. در روش

تعداد متغیرهای بهینه‌سازی رخ می‌دهد. همچنین، با توجه به بهره‌گیری از معادلات حالت برای بدست‌آوردن روابط موجود میان خروجی‌های هموار و سایر متغیرهای حالت و کنترل مسئله، عملاً تعدادی از معادلات حالت نیز حذف می‌شوند که این کار سبب کاهش شدید تعداد قیود بهینه‌سازی می‌شود. مزیت جالب‌توجه استفاده از مفهوم همواری ديفرانسیلی در کنترل بهینه این است که تعداد متغیرها و معادلات با هم کاهش می‌یابند. این کاهش همزمان، سبب کوچک‌شدن قابل‌توجه ماتریس ژاکوبین^{۱۱} و ماتریس هسیان لاگرانژین^{۱۲} می‌گردد. محاسبه این ماتریس‌ها، بخش قابل‌توجهی از زمان حل مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی را به خود صرف می‌کند. در نتیجه، کوچک‌شدن آنها تأثیر بسیار زیادی در افزایش سرعت حل دارد.

عدم وجود یک روش نظام‌مند برای تشخیص همواری یا ناهمواری ديفرانسیلی و نیز عدم وجود یک الگوریتم مناسب برای تعیین کمینه خروجی‌های هموار، دشواری‌هایی را در استفاده از همواری ديفرانسیلی برای کنترل بهینه در ذهن متبادر می‌سازد. باید به این نکته بسیار مهم اشاره نماییم که ما در رویکرد ترکیبی، صرفاً از مفهوم همواری ديفرانسیلی استفاده می‌نماییم. در این رویکرد، هموار بودن سیستم از لحاظ ديفرانسیلی ضرورت ندارد. یعنی حتی اگر سیستم ناهموار بود، باز هم خروجی‌های هموار را شناسایی می‌کنیم و سایر متغیرهای حالت و کنترل را براساس خروجی‌های هموار بدست می‌آوریم و فضای ابعادی مسئله را کاهش می‌دهیم. تنها تفاوت در اینجا خواهد بود که اگر سیستم از لحاظ ديفرانسیلی هموار باشد، دیگر معادله حالتی برای آن در فضای کاهش‌یافته باقی نخواهد ماند، اما اگر سیستم ناهموار باشد، در فضای کاهش‌یافته مسئله نیز معادلات حالت خواهیم داشت. بنابراین، برای استفاده از مفهوم همواری ديفرانسیلی برای کنترل بهینه، نیازی به تشخیص همواری یا ناهمواری ديفرانسیلی نیست. در سیستم‌های دینامیکی متعارف، تعیین خروجی‌های هموار از طریق آزمون و خطا چندان پیچیده نمی‌باشد. متغیرهای موقعیتی، معمولاً بهترین انتخاب برای خروجی‌های هموار در سیستم‌های دینامیکی متعارف می‌باشند. زیرا با دراختیارداشتن تابع زمانی متغیرهای موقعیتی، می‌توان مقادیر سایر متغیرهای حالت و کنترل را در زمان‌های مختلف بدست آورد. در واقع، اگر مسیر فیزیکی طی شده توسط یک وسیله معلوم باشد، متغیرهای حالت و کنترل آن قابل محاسبه خواهد بود. بنابراین، برای استفاده از مفهوم

همواری ديفرانسیلی، نیازی به تدوین یک الگوریتم خاص برای تعیین خروجی‌های هموار نیست و انتخاب متغیرهای موقعیتی به عنوان خروجی‌های هموار در غالب مسائل کنترل بهینه راهگشاست.

۲-۴. منحنی بی‌اسپیلاین

در روش هم‌نشانی مستقیم، متغیرهای حالت و کنترل به صورت مجموعه‌ای از نقاط گسسته تقریب زده می‌شوند. این امر سبب می‌گردد تا ماهیت حل، گسسته شود و امکان محاسبه مشتق و انتگرال توابع به صورت دقیق وجود نداشته باشد. این مشکل در صورت استفاده از مفهوم همواری ديفرانسیلی حادتر نیز می‌شود، زیرا در آن حالت، امکان محاسبه دقیق مشتقات مراتب بالا با دراختیارداشتن نقاط گسسته وجود ندارد. این درحالیست که گسستگی نقاط، سبب تبدیل‌شدن مسئله کنترل بهینه به مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی می‌شود و صرف‌نظرکردن از آن امکان‌پذیر نیست. یکی از راه‌های حل این مشکل، استفاده از منحنی‌هاست. در منحنی‌ها، اگرچه ضرایب یا نقاط کنترل، مقادیری گسسته هستند، اما یک مفهوم پیوسته را تولید می‌نمایند. در صورت تقریب متغیرهای حالت و کنترل با منحنی‌ها، هم گسستگی مسئله به دلیل گسستگی ضرایب یا نقاط کنترل حفظ می‌شود و هم امکان محاسبه دقیق مشتقات و انتگرال‌ها به دلیل دراختیارداشتن توابع منحنی‌ها وجود دارد.

در رویکرد ترکیبی، از منحنی‌های بی‌اسپیلاین برای تقریب متغیرهای مسئله کنترل بهینه استفاده می‌نماییم. این منحنی‌ها، مجموعه به‌هم‌پیوسته‌ای از منحنی‌های بی‌زیه می‌باشند [۱۸]:

$$x(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,k}(t) C_i \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (24)$$

معادلات منحنی‌های بی‌اسپیلاین از دو قسمت توابع پایه $(B_{i,k}(t))$ و نقاط کنترل (C_i) تشکیل شده‌اند. برای محاسبه توابع پایه یک منحنی بی‌اسپیلاین، باید ابتدا تعداد منحنی‌های بی‌زیه و درجات آنها متناسب با پیچیدگی مسیر موردانتظار برای متغیر تقریب‌زده‌شده، مشخص گردد. سپس، بازه زمانی با توجه به تعداد منحنی‌های بی‌زیه، تقسیم‌بندی گردد. به نقاط زمانی این تقسیم‌بندی، گره می‌گویند. با کنار هم قراردادن مقادیر زمانی گره‌ها در یک بردار، بردار گره (\vec{T}) تشکیل می‌شود:

$$\vec{T} = [t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n] \quad (25)$$

در بردارگره، ممکن است یک مقدار زمانی چندبار پشت سرهم تکرار گردد که به میزان دفعات تکرار، تعدد می‌گویند. تفاضل مرتبه منحنی (k_i) و تعدد گره مربوطه (m_i)، میزان همواری (s_i) را مشخص می‌نماید. همانطور که گفته شد، این مساله در رابطه ۲۶ نشان داده شده است

$$s_i = k_i - m_i \quad (26)$$

مقدار همواری، بیانگر سطح پیوستگی در گره می‌باشد که برابر با مرتبه مشتق‌پذیری است. بنابراین، سطح پیوستگی در گره‌ها را می‌توان در تعریف بردار گره و با تکرار مقادیر زمانی گره‌ها اعمال نمود. لازم به ذکر است که مرتبه منحنی، برابر با مقدار درجه منحنی بعلاوه یک می‌باشد. با در اختیار داشتن مرتبه منحنی‌ها (k)، تعداد منحنی‌ها (l) و همواری گره‌ها (s)، می‌توان تعداد نقاط کنترل (P) را مشخص نمود:

$$P = l(k - s) + s \quad (27)$$

با مشخص بودن موارد مذکور، می‌توان با بهره‌گیری از روابط بازگشتی زیر، توابع پایه را محاسبه نمود:

$$B_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0 & t < t_i, t > t_{i+1} \end{cases} \quad (28)$$

$$B_{i,k}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+k+1}-t_i} B_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(t) \quad (29)$$

نقاط کنترل در یک منحنی بی‌اسپیلاین، نقاطی در اطراف منحنی هستند که به آن منحنی شکل می‌دهند و به معنای واقعی کلمه، کنترل‌کننده منحنی می‌باشند. نقاط کنترل در منحنی‌های بی‌اسپیلاین مثل ضرایب چندجمله‌ای‌ها، مقادیری گسسته هستند که مفهوم پیوسته‌ای را تولید می‌نمایند. در تقریب متغیرهای حالت و کنترل، می‌توان این نقاط کنترل را به عنوان متغیرهای بهینه‌سازی در نظر گرفت.

منحنی‌های بی‌اسپیلاین رفتاری کاملاً محلی دارند. با تغییر یکی از نقاط کنترل، بسته به درجه منحنی، تنها شکل منحنی در همسایگی نقطه کنترل مزبور تغییر می‌کند و باقی منحنی، بدون تغییر باقی می‌ماند. همچنین، محدوده تغییرات نقاط کنترل در منحنی‌های بی‌اسپیلاین یکسان بوده و تقریباً برابر با محدوده تغییرات متغیر تقریب‌زده شده می‌باشد. در صورت استفاده از منحنی‌های بی‌اسپیلاین برای تقریب متغیرهای مسئله بهینه‌سازی مسیر، امکان محاسبه دقیق مشتقات زمانی متغیرها با توجه به مشخص بودن مشتقات زمانی توابع منحنی‌های بی‌اسپیلاین به سادگی فراهم می‌باشد.

۳-۴. هم‌نشانی مستقیم و برنامه‌ریزی غیرخطی

در روش هم‌نشانی مستقیم، از گره‌های زمانی برای دو منظور استفاده می‌شود. یکی از کارکردهای گره‌های زمانی در تقریب عبارات دیفرانسیلی و انتگرالی می‌باشد. از اینرو، برای دستیابی به تقریب‌های بهتر، باید تعداد گره‌های زمانی زیادی انتخاب شود. کارکرد دیگر گره‌های زمانی در اعمال قیود مسئله کنترل بهینه می‌باشد. معادلات حالت و قیود مسیری در روش هم‌نشانی مستقیم، در گره‌های زمانی اعمال می‌گردند [۱۹]. در صورت استفاده از منحنی‌های بی‌اسپیلاین، نقش گره‌های زمانی در تقریب عبارات دیفرانسیلی و انتگرالی از بین می‌رود و از گره‌های زمانی تنها برای اعمال قیود مسئله استفاده می‌شود. این امر سبب می‌گردد تا ضرورت استفاده از گره‌های زمانی زیاد تا حدود زیادی از بین برود.

برای حل مسئله کنترل بهینه با رویکرد ترکیبی، خروجی‌های هموار تعیین‌شده از همواری دیفرانسیلی، با منحنی‌های بی‌اسپیلاین تقریب زده می‌شوند. با این کار، نقاط کنترل منحنی‌های مذکور به عنوان متغیرهای بهینه‌سازی مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی در نظر گرفته می‌شوند. در طول فرآیند حل، بسته به مقدار متغیرهای بهینه‌سازی در هر تکرار، نقاط کنترل منحنی‌های بی‌اسپیلاین مشخص می‌گردند. با مشخص بودن این نقاط و به تبع آن توابع منحنی‌ها، می‌توان مقادیر سایر متغیرهای حالت و کنترل را محاسبه نمود.

با اعمال معادلات حالت باقیمانده در گره‌های زمانی (نقاط هم‌نشانی)، عملاً کلیه معادلات حالت بر مسئله اعمال می‌شوند. افزون بر معادلات حالت باقیمانده، قیود مسیری نیز در گره‌های زمانی اعمال می‌شوند. پس از همگرایی و حل مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی، مقادیر بهینه نقاط کنترل خروجی‌های هموار بگونه‌ای بدست می‌آیند که ضمن برقراری معادلات حالت و ارضای قیود مسیری در گره‌های زمانی، تابع هدف نیز کمینه باشد.

برای مقیاس‌بندی، مرزبندی و تولید حدس‌های اولیه برای متغیرهای بهینه‌سازی (نقاط کنترل منحنی‌های بی‌اسپیلاین)، می‌توان از همان سازوکارهای روش کلاسیک هم‌نشانی مستقیم استفاده نمود، زیرا نقاط کنترل مذکور با خروجی‌های هموار، تقریباً هم‌اندازه می‌باشند. مقیاس‌بندی صحیح متغیرها و قیود بهینه‌سازی، تأثیر بسزایی در سرعت حل و همگرایی مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی دارند. عموماً توصیه می‌شود که به منظور

$$\gamma = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{z} \sin \psi}{\dot{y}} \right) \quad (31)$$

$$V = \frac{\dot{z}}{\sin \gamma} \quad (32)$$

با مشتق‌گیری از معادلات فوق بر حسب زمان، می‌توان مقادیر $\dot{\psi}$ ، $\dot{\gamma}$ و \dot{V} را به صورت زیر تعیین نمود:

$$\dot{\psi} = \frac{1}{1 + \tan^2 \psi} \left(\frac{\dot{y}\dot{x} - \dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2} \right) \quad (33)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{1 + \tan^2 \gamma} \left(\frac{\dot{z}\dot{y} - \dot{y}\dot{z}}{\dot{y}^2} \sin \psi + \dot{\psi} \cos \psi \frac{\dot{z}}{\dot{y}} \right) \quad (34)$$

$$\dot{V} = \frac{1}{\sin^2 \gamma} (\dot{z} \sin \gamma - \dot{z} \dot{y} \cos \gamma) \quad (35)$$

با بدست آوردن مقادیر فوق، می‌توان مقدار نیروی لیفت را از معادلات (۲) و (۳) محاسبه کرد:

$$L = mV \sqrt{(\dot{\psi} \cos \gamma)^2 + \left(\dot{\gamma} - \cos \gamma \left(\frac{V}{r} - \frac{g}{V} \right) \right)^2} \quad (36)$$

با استفاده از نیروی لیفت محاسبه شده و معادله (۲)، می‌توان مقدار β را بدست آورد:

$$\beta = \cos^{-1} \left(\left(\dot{\gamma} - \cos \gamma \left(\frac{V}{r} - \frac{g}{V} \right) \right) \frac{mV}{L} \right) \quad (37)$$

با استفاده از نیروی لیفت محاسبه شده و معادلات (۸) و (۱۰)، می‌توان مقادیر C_L و α را محاسبه کرد:

$$C_L = \frac{L}{0.5S\rho V^2} \quad (38)$$

$$\alpha = \frac{C_L - a_0}{a_1} \quad (39)$$

همانگونه که ملاحظه می‌شود، تمامی متغیرهای حالت و کنترل برحسب خروجی‌های هموار و مشتقات زمانی آنها قابل محاسبه می‌باشند.

با توجه به اینکه از معادلات حالت (۲) تا (۶) برای محاسبه متغیرهای حالت و کنترل استفاده شده است، دیگر نیازی به اعمال آنها در مسئله بهینه‌سازی مسیر نمی‌باشد و به جای همه آنها، می‌توان تنها معادله حالت (۱) را در نظر گرفت. با جایگذاری معادله متغیرهای حالت و کنترل برحسب خروجی‌های هموار و مشتقات زمانی آنها در معادله (۱) و اعمال آن به صورت قید تساوی در مسئله بهینه‌سازی، هم معادله حالت (۱) برقرار می‌گردد و هم معادلات حالت (۲) تا (۶) ارضاء می‌شوند، چون این معادلات نیز با جایگذاری مذکور در معادله (۱) مستتر می‌باشند. برای بدست آوردن مقدار نیروی درگ موجود در معادله (۱)، می‌توان از مقدار زاویه حمله محاسبه شده و معادلات (۷) و (۹) استفاده نمود.

دستیابی به بهترین و سریع‌ترین پاسخ‌های بهینه، محدوده تغییرات تمامی متغیرها و قيود به بازه‌های [0,1] یا [-0.5,0.5] نگاشت گردند.

در رویکرد ترکیبی، دقت حل فدای سرعت حل نشده است و این دو توأمان ارتقاء یافته‌اند. در این رویکرد، به دلیل بهره‌مندی از مفهوم همواری دیفرانسیلی، ارتباط میان متغیرها، با مشتقات زمانی و براساس روابط تحلیلی برقرار می‌گردد، درحالی‌که در روش هم‌نشانی مستقیم کلاسیک، ارتباط میان متغیرها با اعمال معادلات حالت گسسته در گره‌های زمانی متوالی برقرار می‌شود. در نتیجه، دقت حل در رویکرد ترکیبی بسیار بالاتر است. سرعت حل نیز به دلیل کاهش همزمان تعداد متغیرها و قيود بهینه‌سازی، بسیار بیشتر از روش هم‌نشانی مستقیم کلاسیک می‌باشد.

در مقاله حاضر، برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی از نرم‌افزار حل‌کننده IPOPT^{۱۳} استفاده می‌شود. این نرم‌افزار با بهره‌گیری از روش نقطه درونی اولیه دوگان^{۱۴} می‌تواند مسائل بزرگ‌مقیاس برنامه‌ریزی غیرخطی را با دقت و سرعت بالایی حل نماید [۲۰].

۵. حل مسئله عبور از عوارض با رویکرد ترکیبی

در بخش ۲، معادلات حاکم بر مسئله عبور از عوارض زمین ارائه گردید. معادلات حالت این مسئله دربرگیرنده شش متغیر حالت $(\bar{x} = [V \ \gamma \ \psi \ x \ y \ z])$ و دو متغیر کنترل $(\bar{u} = [\alpha \ \beta])$ می‌باشند. اگر بخواهیم از رویکرد ترکیبی بیان شده در بخش ۴ برای حل این مسئله استفاده کنیم، لازم است تا ابتدا خروجی‌های هموار را بر مبنای همواری دیفرانسیلی شناسایی نماییم و کل مسئله را براساس خروجی‌های هموار و مشتقات زمانی آنها بازتعریف کنیم.

همانگونه که پیشتر اشاره شد، بهترین انتخاب برای خروجی‌های هموار، متغیرهای موقعیتی می‌باشند. در معادلات حالت ذکر شده، سه متغیر موقعیتی وجود دارند که عبارتند از: برد طولی (x) ، برد عرضی (y) و ارتفاع وسیله (z) . براین اساس باید تلاش کرد تا کل مسئله را با همین سه متغیر موقعیتی و مشتقات زمانی آنها بیان نمود.

با استفاده از سه معادله حالت (۴) تا (۶) می‌توان مقادیر ψ ، γ و V را به صورت زیر بدست آورد:

$$\psi = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) \quad (30)$$

مسئله بدست می‌آید. در این حالت، رابطه میان تغییرات زمان نرمال (τ) و زمان اصلی (t) به صورت زیر خواهد بود:

$$t = t_f \tau \quad t \in [0, t_f], \tau \in [0, 1] \quad (40)$$

براین اساس، باید تمامی مشتقات موجود در مسئله، به جای مشتق‌گیری برحسب زمان اصلی، برحسب زمان نرمال مشتق‌گیری و محاسبه شوند.

همانگونه که اشاره شد، در صورت استفاده از همواری دیفرانسیلی، باید تمامی مسئله کنترل بهینه براساس خروجی‌های هموار و مشتقات زمانی آنها بیان شود. در نتیجه، باید شرایط مرزی (اولیه و نهایی) مسئله نیز بر همین مبنا و با استفاده از روابط موجود بازتعریف گردند.

با بهره‌گیری از رویکرد ترکیبی برای حل مسئله کنترل بهینه عبور از عوارض، به تعداد نقاط کنترل منحنی‌های بی‌اسپیلاین خروجی‌های هموار، متغیر بهینه‌سازی وجود خواهد داشت که متغیر زمان نهایی نیز به این مجموعه اضافه می‌شود. همچنین، با توجه به اعمال تنها یک معادله دینامیکی در نقاط هم‌نشانی، به تعداد نقاط هم‌نشانی، قید وجود خواهد داشت که قیود مرزی (شرایط اولیه و نهایی) و مسیری نیز به این مجموعه اضافه می‌شوند.

۶. حل یک مثال عددی

در این بخش، به منظور نشان دادن ویژگی‌ها و قابلیت‌های رویکرد ارائه‌شده برای بهینه‌سازی مسیر عبور از عوارض زمین، یک مثال عددی مطرح و حل می‌نماییم. در این مثال، می‌خواهیم مسیر بهینه یک موشک را برای عبور از یک عارضه زمینی در زمان کمینه بدست آوریم. در جدول ۱، مقادیر ثابت لازم برای حل عددی مسئله ارائه شده است.

جدول ۱. مقادیر ثابت برای مثال عددی

عنوان	مقدار ثابت (واحد)
شعاع متوسط زمین (R_E)	6371 km
شتاب جاذبه زمین (g)	9.807 m/s ²
چگالی هوا (ρ)	1.225 kg/m ³
جرم موشک (m)	100 kg
نیروی تراست موشک (T)	200 N
سطح مرجع آیرودینامیکی (S)	2 m ²

با بهره‌گیری از همواری دیفرانسیلی، تعداد متغیرهای حالت و کنترل مسئله موردنظر از ۸ متغیر (۶ متغیر حالت و ۲ متغیر کنترل) به ۳ متغیر (خروجی‌های هموار) و تعداد معادلات حالت از ۶ معادله به ۱ معادله کاهش یافته است. کاهش تعداد متغیرها و معادلات حالت، سبب کاهش شدید تعداد متغیرها و قیود بهینه‌سازی می‌گردد که به معنای افزایش قابل‌توجه سرعت حل و همگرایی مسئله بهینه‌سازی می‌باشد.

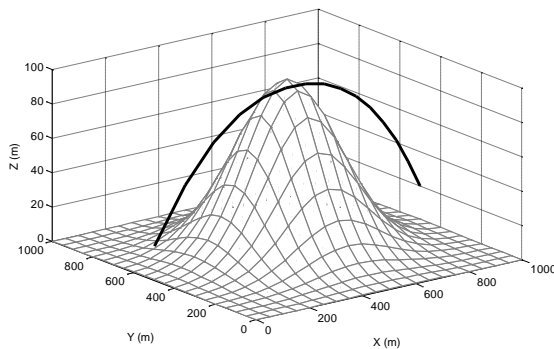
در رویکرد ترکیبی، از منحنی‌های بی‌اسپیلاین برای تقریب خروجی‌های هموار استفاده می‌شود. با توجه به انتخاب متغیرهای موقعیتی به عنوان خروجی‌های هموار (که عموماً هموار و کم پیچ و خم می‌باشند)، دیگر نیازی به استفاده از منحنی‌های بسیار منعطف (با مرتبه بالا) نیست. اما باید توجه داشت که متغیر کنترل مسئله با مشتقات دوم خروجی‌های هموار در ارتباط است. یعنی اگر از منحنی‌های مرتبه چهارم برای تقریب خروجی‌های هموار استفاده شود، متغیر کنترل به صورت خطی بدست خواهد آمد. همچنین، باید به سطح پیوستگی میان منحنی‌های به هم چسبیده بیزیه (که منحنی بی‌اسپیلاین را تشکیل می‌دهند) نیز توجه نمود تا سطح پیوستگی در متغیر کنترل نیز پس از دوبار مشتق‌گیری در حد مطلوب حفظ شود. براین اساس، برای تضمین همواری و سطح پیوستگی کافی برای متغیر کنترل، مرتبه منحنی‌های بی‌اسپیلاین باید حداقل ۶ و سطح پیوستگی آنها حداقل ۵ باشد. همچنین، با توجه به خروجی‌های هموار انتخابی، استفاده از ۱۰ منحنی به هم پیوسته بیزیه در هر منحنی بی‌اسپیلاین کفایت خواهد کرد. البته می‌توان از تعداد منحنی‌ها کاست و به مرتبه منحنی‌ها افزود. مقادیر مطلوب پارامترهای منحنی‌های بی‌اسپیلاین را می‌توان پس از چندین بار حل مسئله، اصلاح و تنظیم نمود. همچنین، لازم نیست که پارامترهای منحنی‌های بی‌اسپیلاین خروجی‌های هموار با یکدیگر یکسان باشند.

در مسئله عبور از عوارض، تعریف بردار گره به دلیل آزادبودن زمان نهایی قدری دشوار خواهد بود. آزادبودن زمان نهایی سبب تغییر مقاطع زمانی در بردار گره در طول بهینه‌سازی می‌شود که این امر، ناپایداری شدیدی در فرآیند حل ایجاد کرده و همگرایی مسئله را دچار مشکل می‌نماید. راهکار رفع این مشکل، نرمال کردن بازه زمانی مسئله است. برای این کار، لازم است که بازه زمانی مسئله به محدوده [0,1] نگاشت گردد. اگر این محدوده را در مقدار زمان نهایی مسئله (t_f) ضرب کنیم، بازه زمانی اصلی

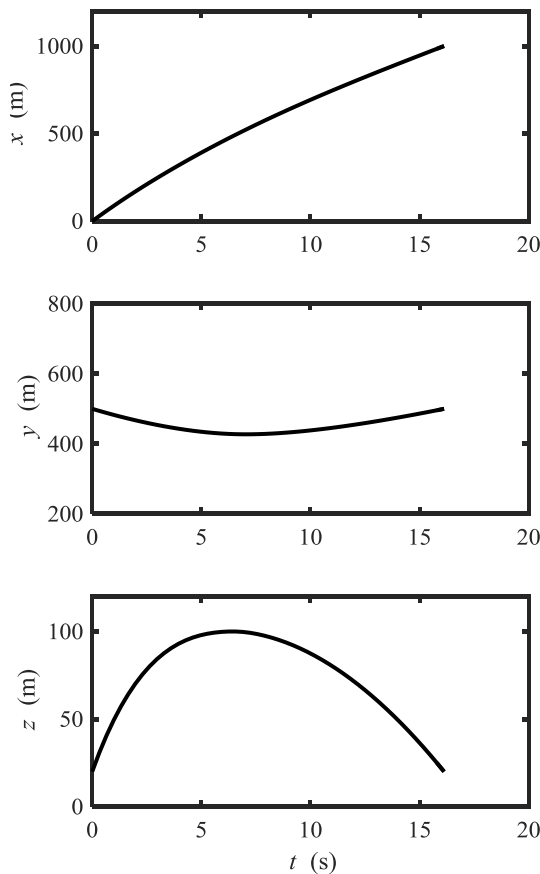
هر دو متغیر کنترل می‌باشند. همچنین، در شکل ۷، ارتفاع وسیله از سطح عارضه زمینی در طول پرواز نشان داده شده است.

باید توجه داشت که خروجی‌های اصلی فرآیند بهینه‌سازی، نمودارهای خروجی‌های هموار (شکل ۳) می‌باشند و سایر نمودارها بر پایه روابط تحلیلی سایر متغیرهای حالت و کنترل با خروجی‌های هموار ترسیم شده‌اند.

مطابق با پاسخ‌های بدست‌آمده برای مثال حاضر، زمان کمینه برای عبور از عارضه موردنظر برابر با ۱۶/۱۲ ثانیه می‌باشد.



شکل ۲. مسیر بهینه در فضای سه‌بعدی



شکل ۳. تاریخچه زمانی خروجی‌های هموار

برای وسیله موردنظر، ضرایب درگ و لیفت از معادلات زیر قابل محاسبه می‌باشند:

$$C_D = 1.2779\alpha^2 - 0.0497\alpha + 0.0771 \quad (41)$$

$$C_L = 1.0783\alpha - 0.0122 \quad (42)$$

در روابط فوق، α باید برحسب رادیان جایگذاری شود.

در این مثال، معادله عارضه به صورت زیر فرض می‌گردد:

$$Z_T(x,y) = 100e^{-\frac{((x-500)^2+(y-500)^2)}{50000}} \quad (43)$$

در مثال حاضر، شرایط مرزی در قالب قیود نقطه‌ای زیر بر

مسئله اعمال می‌گردند:

$$\begin{aligned} C_1 : x(t_0) &= 0 & C_5 : x(t_f) &= 1000 \text{ m} \\ C_2 : y(t_0) &= 500 \text{ m} & C_6 : y(t_f) &= 500 \text{ m} \\ C_3 : z(t_0) &= 20 \text{ m} & C_7 : z(t_f) &= 20 \text{ m} \\ C_4 : V(t_0) &= 100 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (44)$$

در این مثال، سرعت نهایی وسیله، آزاد در نظر گرفته می‌شود.

قیود مسیری برای عدم برخورد با عوارض زمین و

محدود نمودن شتاب عمودی نیز به صورت زیر اعمال می‌شوند:

$$CP_1 : z - Z_T \geq 10 \text{ m} \quad (45)$$

$$CP_2 : a_{vc} \leq 8 \text{ m/s}^2 \quad (46)$$

با مشخص شدن مقادیر ثابت و قیود نقطه‌ای و مسیری

مسئله، می‌توانیم فرآیند حل مسئله بهینه‌سازی مسیر را با رویکرد

ترکیبی به انجام رسانیم. برای این منظور، از روابط کاهش‌یافته

حاصل از همواری دیفرانسیلی استفاده می‌نماییم. برای تقریب هر

یک از خروجی‌های هموار با منحنی‌های بی‌اسپیلاین، از ۱۰

منحنی بیزیه مرتبه ۶ با سطح پیوستگی ۵ استفاده می‌کنیم. تعداد

نقاط کنترل هر کدام این منحنی‌های بی‌اسپیلاین براساس رابطه

(۲۷)، ۱۵ عدد می‌باشد. بنابراین، مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی

حاصله دارای ۴۵+۱ متغیر بهینه‌سازی گسسته خواهد بود. با

لحاظ نمودن ۱۰ نقطه هم‌نشانی برای اعمال معادله حالت باقیمانده

و دو قید مسیری و نیز شرایط مرزی مسئله، ۳۰+۷ قید بهینه‌سازی

ایجاد خواهد شد.

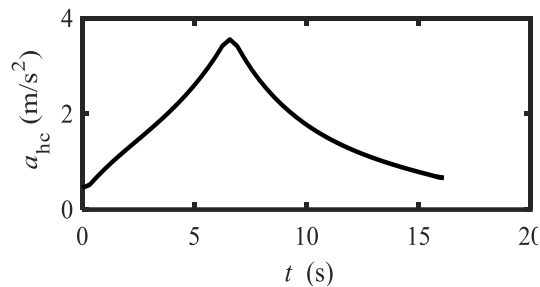
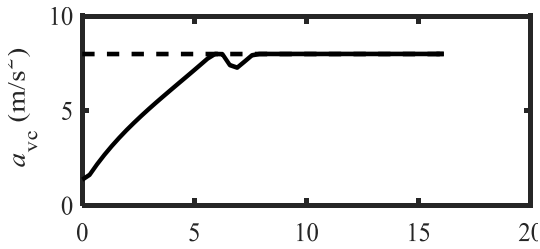
در شکل ۲، مسیر بهینه بدست‌آمده در فضای سه‌بعدی و در

شکل ۳، تغییرات خروجی‌های هموار نسبت به زمان نشان داده

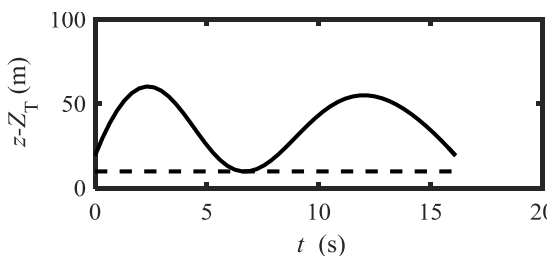
شده‌اند. در شکل‌های ۴ و ۵، تغییرات متغیرهای کنترل و سایر

متغیرهای حالت نسبت به زمان رسم گردیده‌اند. در شکل ۶،

فرامین شتاب عمودی و افقی ارائه شده‌اند. این فرامین، دربرگیرنده



شکل ۶. تاریخچه زمانی شتاب‌های عمودی و افقی

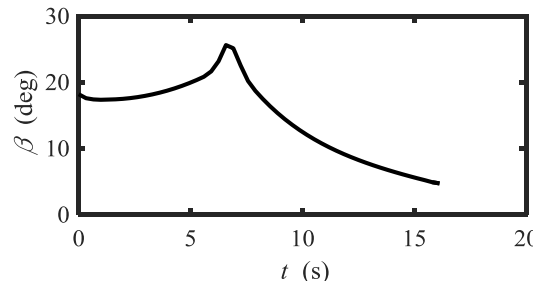
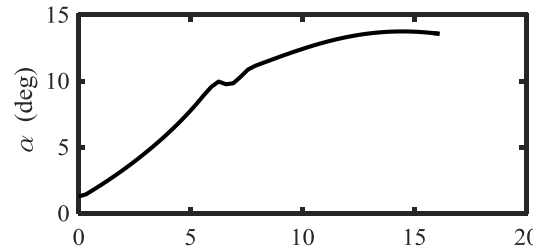


شکل ۷. فاصله عمودی وسیله از عارضه زمینی

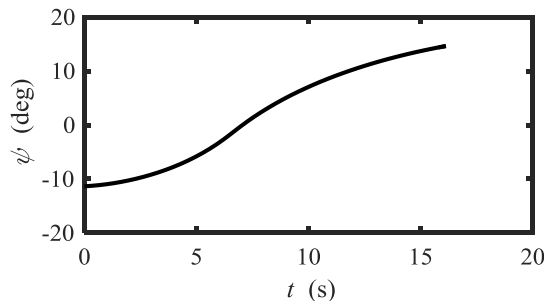
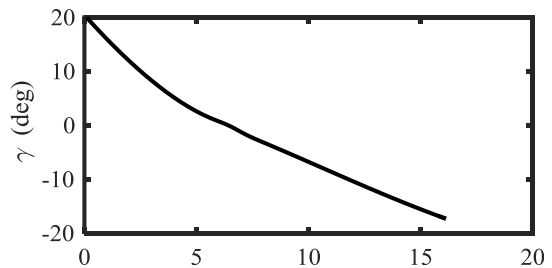
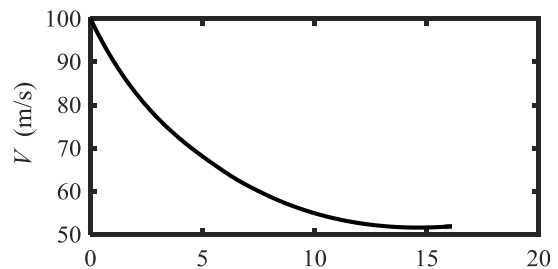
مطابق با پاسخ‌های بدست‌آمده، راهبرد وسیله برای عبور بهینه از عارضه در نظر گرفته شده، ترکیبی از اوج‌گیری و انحراف عرضی می‌باشد. این امر هم در شکل ۳ (نمودارهای γ و Z) و هم در شکل ۵ (نمودارهای γ و ψ) قابل مشاهده می‌باشد. مطابق با شکل ۵ (نمودار V)، وسیله در طول مأموریت در نظر گرفته شده برای عبور از عارضه، دچار افت سرعت گردیده، ولی روند کاهش سرعت در انتهای مسیر تقریباً متوقف شده است.

زمان حل این مثال با استفاده از رویکرد مطرح شده، به ازای حدس‌های اولیه مختلف برای متغیرهای بهینه‌سازی، در محدوده 0.2 تا 0.4 ثانیه می‌باشد. این زمان‌ها در رایانه‌ای با پردازشگر اینتل $2/4$ گیگاهرتزی و سیستم عامل ویندوز ۱۰ (۶۴ بیتی) بدست آمده‌اند.

در مثال عددی مطرح شده، عبور بهینه وسیله از یک عارضه واحد مورد توجه قرار گرفت. زیرا در این حالت، تغییرات متغیرهای حالت و کنترل براساس رویکرد پیشنهادی را می‌توان بهتر مشاهده نمود. همچنین با توجه به هدف غایی رویکرد پیشنهادی برای



شکل ۴. تاریخچه زمانی متغیرهای کنترل



شکل ۵. تاریخچه زمانی سایر متغیرهای حالت

همانگونه که در شکل‌های ۶ و ۷ مشخص می‌باشد، قیود مسیری مربوط به بیشینه شتاب عمودی و کمینه ارتفاع از سطح زمین، کاملاً ارضاء شده‌اند. همچنین، براساس شکل‌های ۳ و ۵، قیود نقطه‌ای مربوط به شرایط مرزی نیز ارضاء گردیده‌اند.

۷. نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، مسئله عبور بهینه وسایل هوافضایی از عوارض زمین در زمان کمینه در قالب یک مسئله کنترل بهینه تعریف گردید و رویکرد جدیدی برای حل سریع و دقیق آن پیشنهاد شد. در تعریف مسئله، از معادلات حرکت وسایل در فضای سه‌بعدی استفاده گردید و از تفکیک صفحات، خطی‌سازی مدل و سایر ساده‌سازی‌های متعارف برای تسریع و تسهیل حل پرهیز شد.

براساس نتایج حاصل از این تحقیق، می‌توان مسئله عبور از عوارض زمین را با بهره‌گیری از رویکرد حل پیشنهادی با سرعت و دقت بالایی حل نمود. سرعت بالای حل این امکان را فراهم می‌سازد تا بتوان فرآیند بهینه‌سازی مسیر را در قالب ساختارهای حلقه بسته کنترل پیش‌بین مدل پیاده‌سازی کرد و مسیرهای بهینه را مطابق با شرایط لحظه‌ای وسیله و در مواجهه با اغتشاشات و عدم قطعیت‌های مدل به صورت برخط تولید نمود. در این صورت، می‌توان توابع هدف و قیود مسئله را متناسب با شرایط پروازی وسیله و مأموریت مدنظر، در حین پرواز وسیله اصلاح و تنظیم کرد. در کارهای آتی، با توجه به تحقق حل سریع و دقیق مسئله در این مقاله، تمرکز بر پیاده‌سازی برخط مسئله خواهد بود.

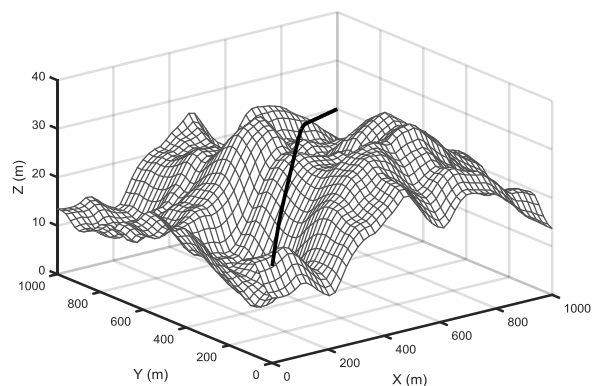
با بهره‌مندی از همواری دیفرانسیلی می‌توان مسئله را با کمترین تعداد متغیرهای ممکن بازتعریف نمود و معادلات حالت مؤثر را به نحو چشمگیری کاهش داد. همچنین، با بکارگیری منحنی‌های بی‌اسپیلاین می‌توان تقریب منعطف و پیوسته‌ای از متغیرهای مذکور را با متغیرهای بهینه‌سازی گسسته تولید نمود. ترکیب مفاهیم همواری دیفرانسیلی و منحنی‌های بی‌اسپیلاین با روش هم‌نشانی مستقیم می‌تواند ضمن برطرف کردن مشکلات این روش، منجر به پاسخی به مراتب دقیق‌تر و سریع‌تر شود.

تعریف مسئله عبور از عوارض زمین در قالب مسئله کنترل بهینه و در فضای سه‌بعدی، منجر به تولید مسیری تلفیقی از تعقیب و اجتناب از عوارض (TF/TA) می‌شود که ضمن عبور، می‌تواند منجر به رخداد بهینه‌ای نیز گردد. در این مقاله، تمرکز بر کمینه‌کردن زمان عبور بود. در همین قالب می‌توان اهداف بهینه دیگری را نیز مدنظر قرار داد و مسیرهای بهینه مربوطه را تولید نمود. همچنین، می‌توان قیود متنوعی را برای رعایت ایمنی پرواز، محدودیت‌های سازه‌ای و کنترلی وسیله و نظایر آنها در نظر گرفت.

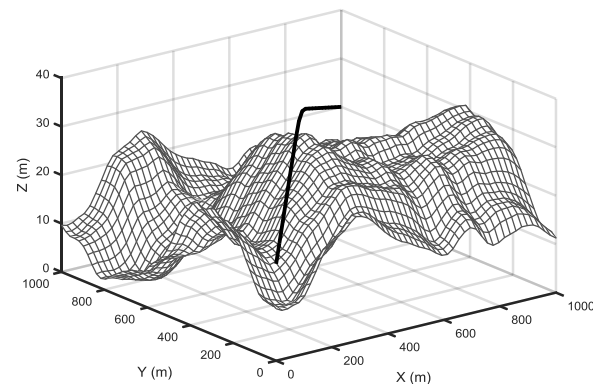
دستیابی به یک روش هدایت برخط در ساختار حلقه بسته کنترل افق پسین، بهینه‌سازی عبور از یک عارضه واحد در نظر گرفته شد. زیرا در ساختار برخط، عبور بهینه وسیله از عارضه یا مانع پیش رو مدنظر خواهد بود.

به منظور نشان‌دادن قابلیت‌های رویکرد پیشنهادی در عبور از مجموعه عوارض پیچیده‌تر، مسیرهای بهینه حاصل از این رویکرد برای عبور از دو مجموعه مختلف عوارض در شکل‌های ۸ و ۹ نشان داده شده‌اند. عوارض هموار در نظر گرفته شده به صورت تصادفی و با استفاده از تابع توزیع ارتفاع گاوسی^{۱۵} تولید شده‌اند.

مطابق با مسیرهای بهینه بدست‌آمده، راهبرد رویکرد پیشنهادی برای عبور از مجموعه عوارض در زمان کمینه، انتخاب صفحه مناسب عبور و اوج‌گیری بر فراز مرتفع‌ترین عارضه در صفحه انتخابی است.



شکل ۸. مسیر بهینه عبور از مجموعه عوارض اول



شکل ۹. مسیر بهینه عبور از مجموعه عوارض دوم

- [1] D. W. Gu, W. Kamal, I. Postletwaite, A UAV waypoint generator, AIAA 1st Intelligent Systems Technical Conference, Illinois, 2004.
- [2] K. B. Judd, T. W. McLain, Spline based path planning for unmanned air vehicles, AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, Montreal, Canada, 2001.
- [3] M. A. Gill, A. Y. Zomaya, A cell decomposition based collision avoidance algorithm for robot manipulators, Journal of Cybernetics and Systems, Vol. 29, No. 2, pp. 113-135, 1998.
- [4] S. Twigg, A. Calise, E. Johnson, 3D Trajectory optimization for terrain following and terrain masking, AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, Colorado, 2006.
- [5] I. Khademi, B. Maleki, A. N. Mood, Optimal three dimensional Terrain Following/Terrain Avoidance for aircraft using direct transcription method, Proceedings of the 19th Mediterranean Conference on Control & Automation, Corfu, Greece, IEEE, pp. 254-258, 2011.
- [6] R. Kamyar, E. Taheri, Aircraft optimal terrain/threat-based trajectory planning and control, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 37, No. 2, pp. 466-483, 2014.
- [7] S. I. Kassaei, A. R. Kosari, Aircraft trajectory planning with an altitude-bound in terrain-following flight, Modares Mechanical Engineering, Vol. 17, No. 12, pp. 135-144, 2018. (in Persian)
- [8] A. Kosari, H. Maghsoudi, A. Lavaei, Optimal online trajectory generation for a flying robot for terrain following purposes using neural network, Journal of Aerospace Engineering, Vol. 0, No. 3, pp. 1-18, 2015.
- [9] S. J. Asseo, Terrain following/terrain avoidance path optimization using the method of steepest descent, Proceedings of the Aerospace and Electronics Conference, Dayton OHIO, IEEE, pp. 1128-1136, 1988.
- [10] R. Jamilnia, Development of an Online Combined Method for Trajectory Optimization, PhD Thesis, Department of Aerospace Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, 2012. (in Persian)
- [11] O. VonStryk, Numerical Solution of Optimal Control Problems by Direct Collocation, R. Bulirsch, A. Miele, J. Stoer, K. H. Well (Eds.), Optimal Control - Calculus of Variations, pp. 129-143, Basel: Birkhauser, 1993.
- [12] J. T. Betts, Survey of numerical methods for trajectory optimization, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 21, No. 2, pp. 193-207, 1998.
- [13] R. Esmaelzadeh, R. Jamilnia, A. Adami, Optimal guidance of a reentry vehicle using a combinational method, Journal of Aerospace Mechanics, Imam Hossein University, Vol. 12, No. 4, pp. 35-48, 2016. (in Persian)
- [14] M. Bahrami, R. Jamilnia, A. Naghash, Trajectory optimization of space manipulators with flexible links using a new approach, International Journal of Robotics, K. N. Toosi University of Technology, Vol. 1, No. 1, pp. 48-55, 2009.
- [15] R. Jamilnia, Optimal trajectory design for soft landing on the Moon by using differential flatness, Modares Mechanical Engineering, Vol. 17, No. 10, pp. 9-19, 2017. (in Persian)
- [16] H. Seywald, Trajectory optimization based on differential inclusion, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 17, No. 3, pp. 480-487, 1994.
- [17] M. Fliess, J. Levine, P. Martin, P. Rouchon, Flatness and defect of nonlinear systems, International Journal of Control, Vol. 61, No. 6, pp. 1327-1361, 1995.
- [18] C. De Boor, A Practical Guide to Splines, pp. 131-170, New York: Springer-Verlag, 2001.
- [19] J. T. Betts, Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming, Second Edition, pp. 91-218, Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2010.
- [20] A. Wächter, An Interior Point Algorithm for Large Scale Nonlinear Optimization with Applications in Process Engineering, PhD thesis, Carnegie Mellon University, Pennsylvania, 2002.

¹ Terrain Following (TF)² Terrain Avoidance (TA)³ Dijkstra⁴ Online⁵ Differential Flatness⁶ B-spline curves⁷ Collocation Points⁸ Non-Linear Programming (NLP)⁹ Hamiltonian¹⁰ Pontryagin's Maximum Principle

-
- ¹¹ Jacobian Matrix
 - ¹² Hessian of the Lagrangian Matrix
 - ¹³ Interior Point OPTimization (IPOPT)
 - ¹⁴ Primal-Dual Interior Point
 - ¹⁵ Gaussian Height Distribution Function