

## تحلیل سه‌بعدی خمش صفحات ضخیم قطاع دایره‌ای مدرج تابعی چندجهته

مصطفی لیوانی<sup>۱</sup>

۱ استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، m.livani@ssau.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۸/۱۱/۱۳

تاریخ پذیرش: ۹۹/۰۵/۰۶

### چکیده

در این تحقیق به تحلیل سه بعدی خمش صفحات قطاع دایره‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی چند جهته پرداخته شده است. خواص ماده می‌توانند در هر سه جهت مختصاتی بر اساس تابع توانی معرفی شده تغییر کنند. معادلات حرکت و شرایط مرزی با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی بدست آمده است. سپس با استفاده از روش تعمیم‌یافته مربعات دیفرانسیلی، گسسته سازی و حل شده‌اند. نتایج عددی برای توان‌های گوناگون ماده مدرج تابعی چند جهته مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که تأثیر جهت تغییر ماده در ورق بر روی مقدار تغییر شکل صفحات ضخیم قطاع دایره‌ای، قابل توجه بوده و بنابراین می‌تواند به عنوان یکی از متغیرهای طراحی در بهینه‌سازی مورد استفاده قرار گیرد. با توجه به اینکه مسأله مورد بررسی جدید بوده و برای حل آن از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی استفاده شده است. نتایج بدست آمده در این تحقیق با نتایج حاصل از شبیه‌سازی با نرم افزار آباکوس راستی‌آزمایی شده است و تطابق خوبی را نشان می‌دهد.

### واژگان کلیدی

مواد مدرج تابعی چند جهته، الاستیسیته سه بعدی، روش مربعات دیفرانسیلی، خمش، صفحات قطاع دایره‌ای.

### ۱. مقدمه

رفتار مکانیکی سازه شود، تحلیل مواد مدرج تابعی به جهت بررسی نحوه تغییر رفتار سازه تحت تأثیر جهت تغییر خواص ماده و امکان استفاده از آن به عنوان پارامتری در طراحی سازه‌های مختلف حائز اهمیت است. در واقع هر چند معرفی مواد مدرج تابعی ابتدا به منظور افزایش مقاومت مواد در شرایط دمای بالا در یک سطح انجام گرفته است، اما بررسی مواد و سازه‌های طبیعی نشان‌دهنده آن است که مواد با تغییرات تدریجی خواص به طور عمده در

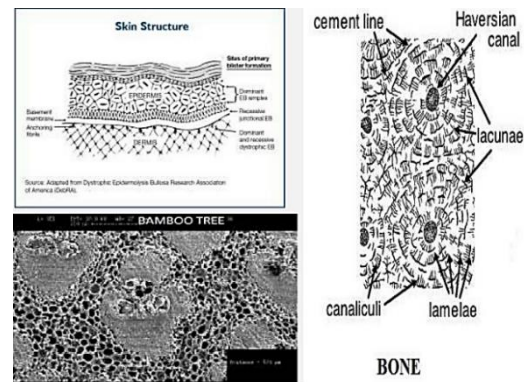
استفاده از مواد مدرج تابعی ( $FG^1$ ) که در آن‌ها خواص ماده به صورت تدریجی در یک یا چند جهت تغییر می‌کند، می‌تواند منجر به ساخت سازه‌هایی با مشکلات کمتر شود. کاربردهای جدید و سازه‌های در شرایط دمای بالا که دما در دو یا چند جهت تغییر می‌کند، مانند شاتل‌ها و فضاییماهای مدرن، نیاز به مواد جدیدی دارند که بتوانند آن شرایط را تحمل کند [۲۰۱]. همچنین، از آنجا که تغییرات تدریجی ماده در یک یا چند جهت می‌تواند سبب تغییر

(...) را بهبود دهد، بسیار مطلوب خواهد بود و در نتیجه می‌تواند دست طراح را در بهبود سایر پارامترها باز گذارد. به طور مثال بدنه و بال‌های هواپیما باید به گونه‌ای طراحی شود که نیروهای آیرودینامیکی مزاحم به حداقل رسیده و نیروی لیفت مورد نیاز تأمین گردد. از طرفی می‌بایست فضای کافی و مناسب برای سرنشینان تأمین شود. بنابراین طراحی بدنه و بال‌های هواپیما از لحاظ تحمل تنش و پاسخ دینامیکی تا حدود زیادی توسط هندسه محدود شده است و نمی‌توان هندسه را به نفع بهبود توزیع تنش یا پاسخ دینامیکی یا کاهش وزن و هزینه تغییر داد. در چنین مواردی تغییرات خواص مواد در جهت مختلف می‌تواند یک گزینه باشد.

همچنین به طور مثال هندسه چرخ‌دنده‌ها باید به گونه‌ای طراحی شود که حرکت آن‌ها بر روی هم تا حد ممکن یکنواخت و نرم باشد. بنابراین طراحی چرخ‌دنده‌ها از لحاظ تنش یا وزن، محدود به هندسه از پیش طراحی شده است. در چنین مواردی برای افزایش مقاومت قطعه و در عین حال، کاهش وزن و هزینه می‌توان از مواد مدرج تابعی چندجهته استفاده نمود. پره توربین‌های گازی و بخار که می‌بایست دماهای بالایی را تحمل نموده و در عین حال هندسه مناسبی از جهت آیرودینامیکی داشته باشد، نمونه دیگری است که می‌تواند مطرح شود. همچنین می‌توان دال‌های بتنی در کف‌ها، سقف ساختمان‌ها، باند فرودگاه‌ها، عرشه پل‌ها و ورق‌های کوچکی که در حسگرها و ابزار مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرند را نام برد که معمولاً با یک ورق مدل‌سازی می‌شوند. تغییر تدریجی خواص ماده در امتداد یک یا چند جهت، هر چند ممکن است تا به امروز متداول نبوده باشد، می‌تواند رفتار سازه را در مقابل نیروهای مختلف تغییر دهد. درک چگونگی ارتباط بین جهت تغییر خواص ماده و تغییر در رفتار مکانیکی ماده می‌تواند به طراح در بهبود طراحی سازه‌ها کمک کند. با نگاه به سازه‌های طبیعی مشاهده می‌شود که برخلاف سازه‌های مصنوعی ساخت بشر، یافتن سازه‌ای که از ماده همگن در تمام نقاط ساخته شده باشد، بسیار نادر است. این مورد با توجه به فعال بودن سیستم تکامل تدریجی در طبیعت قابل اعتنا است. در واقع می‌توان گفت اگر قرار بود طبیعت یک پل یا مخزن را بسازد، احتمالاً هیچ‌گاه آن‌ها را همگن نمی‌ساخت و تغییر خواص در قسمت‌های مختلف سازه وجود داشت. از این رو در این مقاله، تحلیل رفتار مواد مدرج تابعی چندجهته مدنظر قرار گرفته است. در شکل‌های ۲ الی ۴ کاربردهای مختلف مواد مدرج تابعی نشان داده

طبیعت (که قاعده تکامل و بهینه‌سازی تدریجی در آن برقرار است) یافت می‌شوند. در شکل ۱ نمونه‌های مختلف شبیه مواد مدرج تابعی در طبیعت شامل استخوان‌ها، پوست بدن و بافت‌های موجود در گیاهان که ساختاری مشابه مواد مدرج تابعی دارند، نشان داده شده است. در مورد کاربرد مواد مدرج تابعی چندجهته به طور کلی می‌توان دو مسأله کلی زیر را مطرح کرد:

۱. ساخت سازه‌هایی با تغییرات تدریجی خواص ماده در آن‌ها به گونه‌ای که هر نقطه از سازه، دارای خواصی متناسب با شرایط موجود در آن نقطه (شرایط دمایی، زیستی، خواص مربوط به سطح و ...) بوده و در عین حال کل سازه یک حالت پیوسته داشته باشد (لایه‌لایه و یا متشکل از اجزای مجزای به هم چسبیده نباشد).
۲. تغییر رفتار مکانیکی ماده (تنش، تغییرشکل، پاسخ دینامیکی و ...) با تغییر در جهت و مقدار تغییرات خواص مکانیکی در آن.



شکل ۱. نمونه‌های مختلف شبیه مواد مدرج تابعی در طبیعت [۳]

مشخص است که مواد مدرج تابعی ساخته شده از فلز و سرامیک برای شرایط دمایی بالا در یک سطح، تنها یک زیرمجموعه از مسأله شماره یک می‌باشد. همچنین در صورت شناخت مناسب از نحوه ارتباط رفتار مکانیکی با جهت تغییرات ماده و امکان تحلیل آن، ممکن است بتوان از این پارامتر به عنوان یکی از پارامترهای موثر در طراحی سازه‌ها استفاده نمود. به عنوان مثال هندسه بسیاری از قطعات مکانیکی به منظور برآوردن شرایط کاری آن از جمله مقدار فضای قابل اشغال، نحوه ارتباط با قطعات دیگر، کاهش نیروهای مزاحم آیرودینامیکی، هزینه، وزن و زیبایی کلی سازه طراحی می‌شوند.

از این رو معرفی یک پارامتر مؤثر دیگر که بتواند بدون اعمال تغییر در موارد فوق، رفتار مکانیکی ماده (استحکام، تغییرشکل و

سوامیناتان<sup>۲</sup> و همکاران پس از مرور و بررسی کارهای انجام شده در زمینه تحلیل تنش، ارتعاشات و کماتش صفحه‌های مدرج تابعی، مطالعه در زمینه حل‌های تحلیلی و عددی سه‌بعدی این صفحات در آینده را مورد نیاز دانسته‌اند [۸]. عاصمی و همکارانش به تحلیل استاتیکی صفحه مستطیلی مدرج تابعی دوجبهته پرداخته‌اند. معادلات آنها بر اساس تئوری الاستیسیته سه‌بعدی به دست آمده و با روش اجزای محدود مدرج حل شده‌اند [۹]. علیزاده و علی‌بیگلو به بررسی رفتار استاتیکی و ارتعاشات آزاد صفحات ساندویچی مستطیل‌شکل پرداخته‌اند. معادلات بر اساس تئوری الاستیسیته سه‌بعدی بدست آمده و با استفاده از روشی تحلیلی برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده حل شده‌اند [۱۰]. ظفرمند و کخدایان [۱۱] صفحه‌ای مستطیلی مدرج تابعی را با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی و با روش اجزای محدود مدرج مورد مطالعه قرار داده‌اند. صفحات بر روی بستر الاستیک معمولاً به عنوان مدلی مناسب برای بسیاری از سازه‌های صنعتی مورد تحلیل قرار می‌گیرند. از این رو تحقیقاتی در مورد صفحات مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک با استفاده از تئوری‌های مختلف و شرایط مرزی و بارگذاری‌های متفاوت انجام شده است. ملک‌زاده [۱۲] ارتعاشات آزاد صفحات مدرج تابعی را بر اساس تئوری الاستیسیته سه‌بعدی ارائه داده است. معادلات با روش نیمه‌تحلیلی حل شده‌اند به گونه‌ای که دو لبه روبروی هم دارای شرایط مرزی ساده بوده و اعمال شرایط مرزی دلخواه به سایر لبه‌ها امکان‌پذیر است. زنکور<sup>۳</sup> [۱۳] به تحلیل ترموالاستیک خمش صفحه‌ای مدرج تابعی روی بستر الاستیک پرداخته است. معادلات بر اساس تئوری تغییرشکل برشی سینوسی بدست آمده و حل دقیق آن برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده ارائه شده است. امینی و همکارانش [۱۴] به تحلیل سه‌بعدی ارتعاشات آزاد صفحات مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک با استفاده از چند جمله‌ای‌های چیشو و روش ریتز پرداخته‌اند. معادلات مورد استفاده بر اساس تئوری الاستیسیته سه‌بعدی نوشته شده و بستر الاستیک از نوع وینکلر<sup>۴</sup> بوده است. بن‌یوسف و همکارانش [۱۵] حل دقیقی را برای صفحه‌ای ضخیم مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک بدست آورده‌اند. معادلات بر اساس تئوری تغییرشکل برشی هایپربولیک<sup>۵</sup> نوشته شده و بستر الاستیک از نوع دو پارامتری پاسترناک<sup>۶</sup> بوده است. زنکور [۱۶] خمش هایگروترمال<sup>۷</sup> را برای یک صفحه مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک ارائه داده است. معادلات بر اساس

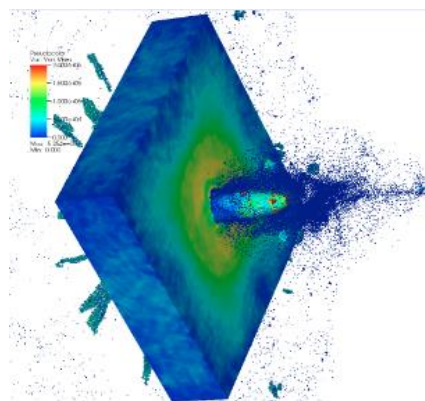
شده است. نحوه تأثیر تغییرات خواص مکانیکی ماده بر پاسخ‌های مکانیکی سازه‌های ساخته شده از این مواد، موضوع مقالات بسیاری در سال‌های اخیر بوده است. در این بین، صفحات به دلیل کاربرد فراوان آنها در صنایع مختلف مورد توجه بسیاری بوده‌اند. تئوری‌های مختلفی برای تحلیل ورق‌ها معرفی شده‌اند که البته هر کدام محدودیت‌هایی را به مسأله اعمال می‌کنند [۷]. از جمله اینکه اغلب این تئوری‌ها تنها برای ورق‌های با ضخامت کم معتبر بوده و در ضخامت‌های بالا دقت کمتری دارند. از این رو استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی برای حل دقیق‌تر مسایل مربوط به ورق‌ها اهمیت می‌یابد.



شکل ۲. امکان استفاده از مواد مدرج تابعی در بدنه فضاپیماها [۳ و ۴]



شکل ۳. کاربرد مواد مدرج تابعی در محفظه پیشران موشک [۵]



شکل ۴. کاربرد مواد مدرج تابعی (تیتانیوم و سرامیک) در پنل‌های ضد گلوله [۶]

تئوری تغییرشکل برشی سینوسی بدست آمده و حل دقیق برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده انجام شده است. تای و چوی<sup>۱</sup> [۱۷] خمش و ارتعاشات صفحات مدرج تابعی روی بستر الاستیک را مورد مطالعه قرار داده‌اند. آن‌ها از یک تئوری تغییرشکل برشی درجه صفر استفاده کرده و حل فرم بسته را برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده ارائه کرده‌اند. زنکور و صبحی [۱۸] تنش‌ها و تغییرشکل‌های ترموالاستیک دینامیکی صفحات مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک را با استفاده از تئوری صفحات مورد مطالعه قرار داده‌اند. طاحونه و نائی<sup>۹</sup> [۱۹] ارتعاشات آزاد صفحه‌ای مستطیلی مدرج تابعی دو جهته را مورد بررسی قرار داده‌اند. آن‌ها از تئوری الاستیسیته سببعدی برای بدست آوردن معادلات حرکت استفاده نموده و با استفاده از روشی نیمه‌تحلیلی به حل آن پرداخته‌اند. شرایط مرزی مختلفی مورد بررسی قرار گرفته‌اند، اما در تمام آن‌ها دو تا از لبه‌های روبروی هم از نوع تکیه‌گاه ساده می‌باشند. همچنین در روش ارائه شده توسط آن‌ها، تغییرات ماده و توزیع نیرو فقط در یکی از جهات داخل صفحه امکان‌پذیر است و در هر دو جهت به طور همزمان ممکن نیست. این مورد از محدودیت‌های روش مورد استفاده توسط آن‌ها است. دوی و نوح<sup>۱۰</sup> [۲۰] به حل تحلیلی ورق مستطیلی مدرج تابعی با شرایط تکیه‌گاه ساده بر روی بستر الاستیک پرداخته‌اند.

با بررسی مقالات ذکر شده در بالا مشخص می‌شود که تحلیل خمش یک صفحه مدرج تابعی (حتی یک جهته) روی بستر الاستیک از نوع پاسترناک با استفاده از تئوری الاستیسیته سببعدی مورد بررسی قرار نگرفته است. همچنین در اکثر مقالاتی که از روش‌های تحلیلی و یا نیمه تحلیلی برای حل معادلات الاستیسیته سببعدی استفاده نموده‌اند، شرایط مرزی محدود می‌باشد (عمدتاً فقط شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در چهار لبه و یا محدود بودن مسأله به طوری که دو لبه از چهار لبه باید دارای شرط مرزی تکیه‌گاه ساده باشند). همچنین نحوه فرمول‌بندی و حل برای بسیاری از روش‌های تحلیلی و نیمه تحلیلی مورد استفاده در مقالات به گونه‌ای است که تغییرات خواص مواد فقط در یک یا دو جهت خاص مثلاً تنها در راستای ضخامت و یا در راستای ضخامت و یکی از راستاهای درون صفحه‌ای امکان‌پذیر است. به این ترتیب، امکان تحلیل صفحات با تغییر خواص در دو راستای درون صفحه‌ای و یا در سه جهت مختصاتی وجود نداشته است. بنابراین توسعه روشی عددی مبتنی بر تئوری الاستیسیته

سببعدی برای تحلیل خمش ورق‌های مدرج تابعی از اهمیت بالایی برخوردار است. همچنین با وجود کارهای نسبتاً زیادی که در زمینه ورق‌های مدرج تابعی چندجهته انجام شده است، مانند [۹، ۱۹ و ۲۱-۲۴]؛ اغلب این موارد محدود به مواد مدرج تابعی دوجته می‌شود. آدینه و کدخدایان [۲۵] به بررسی استاتیکی ورق‌های مدرج تابعی سه‌جهته بر روی بستر الاستیک پرداخته‌اند. آن‌ها از روش تعمیم‌یافته مربع‌سازی مشتق سببعدی برای گسسته‌سازی معادلات تعادل استفاده کرده‌اند. از طرفی در مقالاتی که در زمینه ورق‌های دایروی منتشر شده‌اند، جهت تغییرات ماده به یک یا دو جهت محدود بوده و از تئوری‌های ورق که برای ورق‌های نازک یا نسبتاً ضخیم معتبر هستند، استفاده شده است؛ مانند [۲۶-۲۹]. در این مقاله به تحلیل خمش صفحات قطاع دایره‌ای مدرج تابعی چند جهته با استفاده از تئوری الاستیسیته سببعدی پرداخته می‌شود. به منظور گسسته‌سازی معادلات مربوطه از روش تعمیم‌یافته مربع‌سازی مشتق استفاده شده است. تغییر خواص مکانیکی در یک، دو یا هر سه جهت مختصاتی مطابق با روابط توانی امکان‌پذیر است. همچنین تأثیر پارامتر توان‌های مربوط به توابع توزیع ماده بر تغییرشکل‌های صفحه تحت یک بارگذاری فشاری مورد بررسی قرار گرفته است.

## ۲. تشریح مسأله

در این قسمت هندسه مسأله مورد مطالعه، نحوه توزیع ماده و همچنین معادلات حاکم به همراه شرایط مرزی معرفی می‌شود.

### ۲-۱. هندسه مسأله

در این مقاله ورق قطاع دایره‌ای شکل ضخیم ساخته شده از مواد مدرج تابعی چندجهته مورد مطالعه قرار گرفته است (شکل ۵). ابعاد این صفحه در جهات  $r$  و  $\theta$  به ترتیب  $a$  و  $\alpha$  بوده و ضخامت آن  $h$  می‌باشد. محل مرکز محورهای مختصات به گونه‌ای است که صفحات  $z = h$  و  $z = 0$  به ترتیب سطح پایینی و بالایی ورق می‌باشند. بارگذاری فشاری در سطح بالای ورق امکان‌پذیر است.

### ۲-۲. نحوه توزیع ماده مدرج تابعی چندجهته

در این مقاله ماده مدرج تابعی از دو فاز مختلف مانند فلز و سرامیک تشکیل شده است. نحوه توزیع ماده مدرج تابعی با استفاده از قانون ترکیب خطی مطابق رابطه ۱ است:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, 2\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \\ 2\varepsilon_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\ 2\varepsilon_{\theta z} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (6)$$

معادلات تعادل در غیاب نیروهای حجمی نیز به صورت رابطه

۷ می‌باشند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

با ترکیب روابط ۵ الی ۷، معادله تعادل بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial E}{\partial \theta} \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial E}{\partial z} \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial u}{\partial z} + \\ \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial \theta} \frac{1}{2(1+\nu)} \left[ \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right] + \frac{\partial E}{\partial z} \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial r} \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial \theta} \frac{1}{1+\nu} \frac{u}{r} + \\ \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial \theta} \frac{v}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right] + \frac{\partial E}{\partial r} \frac{1}{2(1+\nu)} \left[ \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right] + \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial E}{\partial \theta} \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial E}{\partial \theta} \frac{v}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \\ \frac{\partial E}{\partial z} \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial \theta} \frac{v}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial w}{\partial z} + \\ \frac{\partial E}{\partial z} \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial z} \frac{v}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right] + \frac{\partial E}{\partial r} \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial u}{\partial z} + \\ \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial \theta} \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial z} \frac{v}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial E}{\partial \theta} \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial E}{\partial z} \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial w}{\partial z} + \\ \frac{\partial E}{\partial z} \frac{v}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial E}{\partial r} \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

شرایط مرزی مورد استفاده در این مقاله بصورت رابطه ۹

است:

$$\begin{cases} r = r_0, r_0 + a \\ y = 0, \alpha \\ u = 0, v = 0, w = 0 \end{cases} \quad (9)$$

همچنین شرایط مرزی مورد استفاده در سطوح بالا و پایین

ورق به صورت رابطه ۱۰ است:

$$\begin{aligned} \sigma_z = P, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{at } z = h \\ \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{at } z = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

برای بررسی ورق روی بستر الاستیک، از نتایج خیز ورق

مستطیلی که در مقالات وجود دارد، استفاده شده است. بدین

منظور در این مقاله، از معادلات و شرایط مرزی یک ورق

مستطیلی استفاده شده است. شرایط مرزی مورد استفاده برای

تحلیل ورق روی بستر الاستیک به صورت رابطه ۱۱ است:

$$P = P_1 V_1 + P_2 V_2 \quad (1)$$

که در آن  $P$  یکی از خواص ماده مدرج تابعی مانند مدول الاستیسیته و یا ضریب پواسون است و  $V_1$  و  $V_2$  به ترتیب نسبت حجمی دو فاز تشکیل دهنده ماده مدرج تابعی هستند که مطابق رابطه ۲ به هم مرتبط می‌شوند:

$$V_1 + V_2 = 1 \quad (2)$$

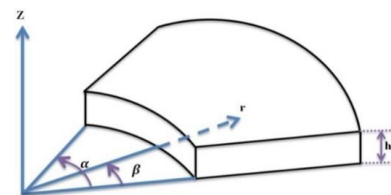
با ترکیب روابط ۱ و ۲ می‌توان نوشت:

$$P = (P_1 - P_2) V_1 + P_2 \quad (3)$$

که در آن  $V_1$  مطابق رابطه توانی ۴ معرفی می‌شود:

$$V_1 = \left[ \frac{r}{a} \left( 1 - \frac{r}{a} \right) \right]^{n_r} \left[ \frac{\theta}{\alpha} \left( 1 - \frac{\theta}{\alpha} \right) \right]^{n_\theta} \left( \frac{z}{h} \right)^{n_z} \quad (4)$$

که در آن  $n_r$ ،  $n_\theta$  و  $n_z$  مقادیر نامنفی می‌باشند. همانطور که رابطه ۴ نشان می‌دهد در صورت غیرصفر بودن تمام توان‌ها، نسبت حجمی فاز یک در سطح پایین ورق صفر است و این سطح و همچنین سطوح جانبی ورق تماماً از فاز دو تشکیل شده است. خواص ماده در هر سه جهت تغییر می‌کند تا جایی که در مرکز سطح بالایی، ماده تشکیل دهنده ورق کاملاً دارای خواص فاز یک است. با برابر صفر قرار دادن یک یا دو تا از توان‌ها، امکان تغییر ماده در جهت مختصاتی مربوطه از بین رفته و ماده به ترتیب تبدیل به ماده مدرج تابعی دو جهته و یک جهته می‌شود. همچنین اگر تمام توان‌ها برابر صفر باشند، به این معنی است که تمام ورق از فاز یک تشکیل شده است.



شکل ۵. صفحه مدرج تابعی چند جهته قطاع دایره‌ای شکل

## ۲-۳. معادلات و شرایط مرزی

روابط تنش-کرنش در تئوری الاستیسیته سه‌بعدی بصورت رابطه ۵ است:

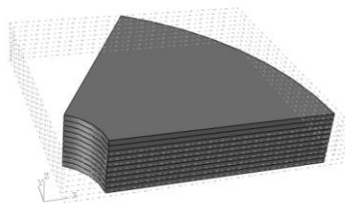
$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] \end{aligned} \quad (5)$$

$$\tau_{r\theta} = G\gamma_{r\theta}, \tau_{rz} = G\gamma_{rz}, \tau_{\theta z} = G\gamma_{\theta z}$$

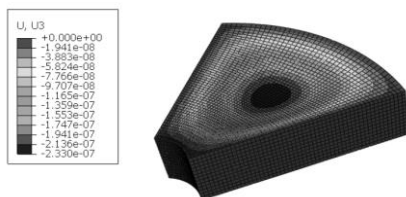
روابط کرنش-تغییر مکان خطی را می‌توان به صورت رابطه ۶

نوشت:

ماده مجزا به هر یک از قسمت‌ها به گونه‌ای که به تدریج در راستای ضخامت، تغییرات ماده به وجود آید، انجام شد. این ورق در هر چهار لبه دارای شرایط مرزی گیردار بوده و از دو ماده با مدول الاستیسیته  $E_1 = 207 \text{ GPa}$  و  $E_2 = 297 \text{ GPa}$  تشکیل شده است. فشار ثابت  $50 \text{ KPa}$  بر سطح بالایی آن وارد می‌شود.  $h = 0.2 \text{ m}$  و  $\alpha = \pi/6$  می‌باشد و  $r_o = 1 \text{ m}$  و  $r_i = 2 \text{ m}$  است. در شکل ۷ نتایج خمش مدل شبیه‌سازی شده در نرم‌افزار آباکوس نشان داده شده است.

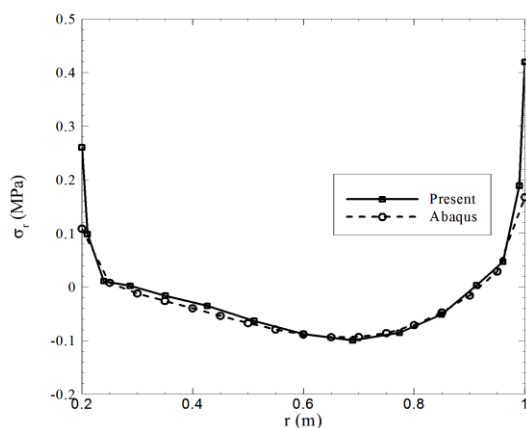


شکل ۶. مدل ورق مدرج تابعی یک جهته شبیه‌سازی شده در نرم‌افزار آباکوس



شکل ۷. نتایج خمش مدل شبیه‌سازی شده در نرم‌افزار آباکوس

در شکل‌های ۸ الی ۱۱ تنش‌های محوری و برشی ورق مدرج تابعی در امتداد خط  $(z = h \text{ و } \theta = \frac{\pi}{12})$  بدست آمده از روش حاضر و نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود نتایج دارای انطباق خوبی است.



شکل ۸. مقایسه تنش محوری شعاعی ورق مدرج تابعی بدست آمده از روش حاضر و نرم‌افزار آباکوس

$$\begin{aligned} \sigma_z = P, \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \text{ at } z = h \\ \sigma_z = K_w w - K_{sx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - K_{sy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \text{ at } z = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

### ۲-۴. روش مربع سازی مشتق

برای گسسته‌سازی معادلات از روش مربع‌سازی مشتق استفاده می‌شود. اگر دامنه تغییرات پارامتر فرضی  $l$  به  $N$  نقطه مجزا گسسته شود، مشتق مرتبه  $m$  تابع نسبت به  $l$  با ترکیب خطی مقدار تابع در تمام نقاط دامنه از رابطه ۱۲ بدست می‌آید:

$$\left. \frac{d^m f(x)}{dx^m} \right|_{x=l_i} = \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(m)} f(l_j), \quad (12)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

در این تحقیق با استفاده از تابع لژاندر، ضرایب وزنی  $C_{ij}^{(m)}$

برای مشتق مرتبه اول از رابطه ۱۳ محاسبه می‌شود:

$$C_{ij}^{(1)} = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^N (l_i - l_j)}{(l_i - l_k) \prod_{j=1, j \neq k}^N (l_k - l_j)}, \quad (13)$$

$$i, j, k = 1, 2, \dots, N$$

$$C_{ii}^{(1)} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N C_{ij}^{(1)}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

همچنین برای محاسبه ضرایب وزنی برای مشتقات مرتبه

بالاتر تا مرتبه  $N - 1$  از رابطه ۱۴ استفاده می‌شود:

$$C_{ij}^{(m)} = m \left[ C_{ii}^{(m-1)} C_{ij}^{(1)} - \frac{C_{ij}^{(m-1)}}{l_i - l_k} \right], \quad (14)$$

$$i, k = 1, 2, \dots, N$$

$$C_{ii}^{(m)} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N C_{ij}^{(m)}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

در این تحقیق توزیع نقاط دامنه با استفاده از چندجمله‌ای

چیشف<sup>۱۱</sup> و به صورت رابطه ۱۵ است:

$$l_i = 0.5L \left( 1 - \frac{\cos((i-1) \times \pi)}{N-1} \right) \quad (15)$$

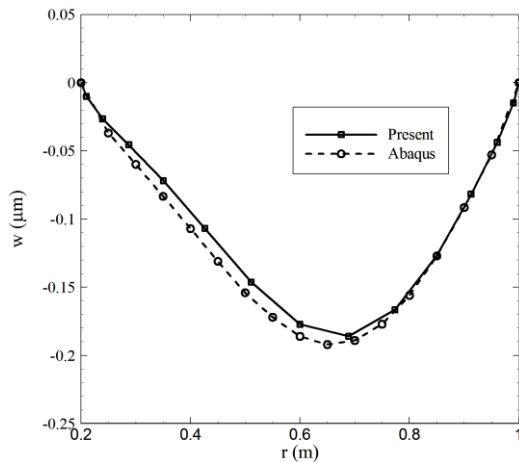
که در آن  $L$  طول دامنه است. برای حل معادلات، ابتدا باید

آن‌ها را گسسته‌سازی نمود.

### ۳. اعتبار سنجی

برای بررسی صحت و دقت نتایج، با توجه به جدید بودن مدل مورد مطالعه در این مقاله، نتایج عددی برای ورق ساخته شده از مواد مدرج تابعی با نتایج حاصل از شبیه‌سازی در نرم‌افزار آباکوس<sup>۱۲</sup> مقایسه شده است. همانطور که در شکل ۶ نشان داده شده است، ماده مدرج تابعی در نرم‌افزار آباکوس با تقسیم ورق در راستای ضخامت به ۱۰ قسمت مساوی و اختصاص خصوصیات

شده است. شکل ۱۲ نشان می‌دهد با افزایش مختصه شعاعی انطباق منحنی‌ها بهتر می‌شود.



شکل ۱۲. مقایسه خیز ورق مدرج تابعی بدست آمده از روش حاضر و نرم‌افزار آباکوس

نتایج عددی برای یک ورق ساخته شده از مواد مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک با نتایج گزارش شده در مرجع [۳۰] مقایسه شده است. این ورق در هر چهار لبه دارای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده بوده و از آلومینا با مدول الاستیسیته  $E_1 = 380 \text{ GPa}$  و آلومینیوم با مدول الاستیسیته  $E_2 = 70 \text{ GPa}$  تشکیل شده است. در جدول ۱ تنش و تغییرشکل بدون بعد ورق مستطیلی مدرج تابعی با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده بدست آمده از روش حاضر با نتایج مرجع [۳۰] برای  $b = 3a = 30h$  مقایسه شده است. همانطور که در جدول ۱ مشهود است، نتایج دارای تطابق خوبی می‌باشد.

پارامترهای مورد استفاده در جدول ۱ عبارتند از:

$$w^* = \frac{100D_0}{qa^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$$

$$\sigma_x^* = -\frac{h^2}{qa^2} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right),$$

$$\sigma_y^* = -\frac{h^2}{qa^2} \sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right)$$

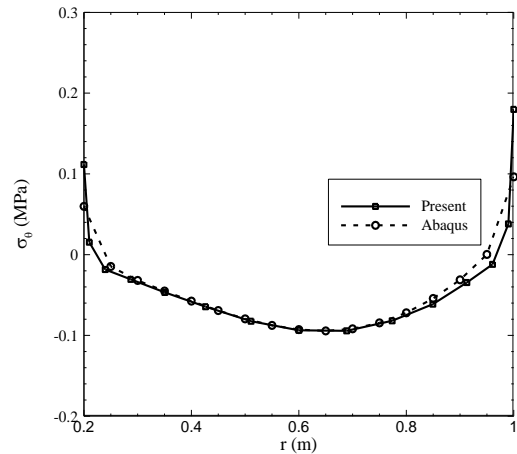
$$\sigma_{xy}^* = -\frac{h^2}{qa^2} \sigma_{xy}(0, 0, 0)$$

جایی‌که:

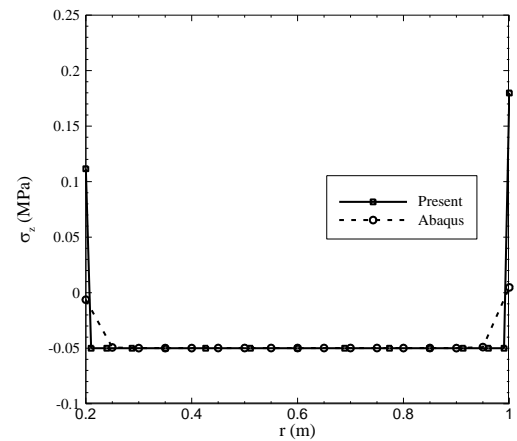
$$D_0 = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)}, K_0 = \frac{K_w a^4}{E_0 h^3},$$

$$J_0 = \frac{K_{sx} a^2 \nu}{E_0 h^3} = \frac{K_{sy} b^2 \nu}{E_0 h^3},$$

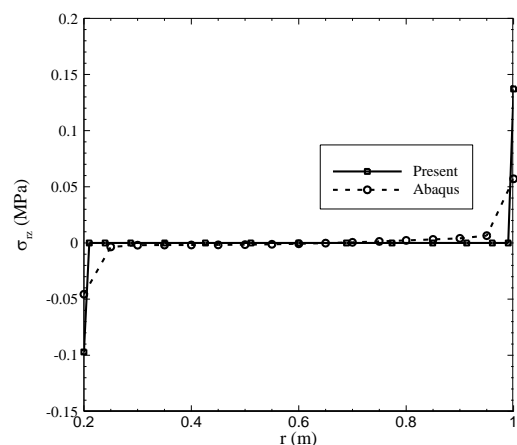
$$E_0 = 1.0 \text{ GPa}, \nu = 0.3$$



شکل ۹. مقایسه تنش مماسی ورق مدرج تابعی بدست آمده از روش حاضر و نرم‌افزار آباکوس



شکل ۱۰. مقایسه تنش محوری در راستای ضخامت ورق مدرج تابعی بدست آمده از روش حاضر و نرم‌افزار آباکوس



شکل ۱۱. مقایسه تنش برشی ورق مدرج تابعی بدست آمده از روش حاضر و نرم‌افزار آباکوس

در شکل ۱۲ خیز ورق مدرج تابعی در امتداد خط  $\theta = \frac{\pi}{12}$  و بدست آمده از روش حاضر و نرم‌افزار آباکوس مقایسه

جدول ۱. مقایسه نتایج بدست آمده از روش حاضر و مرجع [۳۰]

$\sigma_{xy}^*$	$\sigma_y^*$	$\sigma_x^*$	$w^*$	روش	$J_0$	$K_0$	$n_z$
۰/۲۸۶۰	۰/۲۴۴۵	۰/۷۱۵۳	۱/۲۵۴۵	حاضر	۰	۰	۰
۰/۲۸۹۰	۰/۲۴۴۷	۰/۷۱۶۰	۱/۲۵۸۳	[۳۰]	۰	۰	۰
۰/۲۸۱۱	۰/۲۳۷۲	۰/۶۹۶۳	۱/۲۲۲۶	حاضر	۰	۱۰۰	۰
۰/۲۸۴۰	۰/۲۳۷۵	۰/۶۹۶۹	۱/۲۲۶۰	[۳۰]	۰	۱۰۰	۰
۰/۲۶۷۴	۰/۲۱۷۹	۰/۶۴۵۱	۱/۱۳۵۸	حاضر	۱۰۰	۱۰۰	۰
۰/۲۷۰۰	۰/۲۱۸۳	۰/۶۴۵۲	۱/۱۳۸۲	[۳۰]	۱۰۰	۱۰۰	۰
۰/۱۲۹۱	۰/۱۱۰۹	۰/۳۲۴۴	۲/۵۱۰۶	حاضر	۰	۰	۱
۰/۱۳۰۶	۰/۱۱۱۱	۰/۳۲۵۰	۲/۵۱۳۴	[۳۰]	۰	۰	۱
۰/۱۲۴۸	۰/۱۰۴۴	۰/۳۰۷۵	۲/۳۸۶۶	حاضر	۰	۱۰۰	۱
۰/۱۲۶۲	۰/۱۰۴۷	۰/۳۰۸۰	۲/۳۸۷۵	[۳۰]	۰	۱۰۰	۱
۰/۱۱۷۰	۰/۰۹۳۴	۰/۲۷۸۶	۲/۱۷۲۲	حاضر	۱۰۰	۰	۱
۰/۱۱۸۲	۰/۰۹۴۰	۰/۲۷۹۱	۲/۱۷۰۳	[۳۰]	۱۰۰	۰	۱
۰/۱۱۳۶	۰/۰۸۸۵	۰/۲۶۵۸	۲/۰۷۷۷	حاضر	۱۰۰	۱۰۰	۱
۰/۱۱۴۸	۰/۰۸۹۳	۰/۲۶۶۳	۲/۰۷۴۶	[۳۰]	۱۰۰	۱۰۰	۱

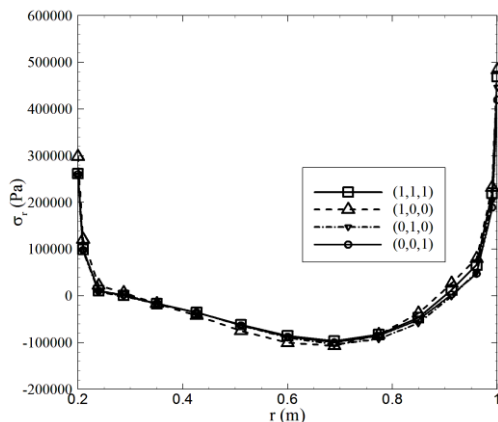
#### ۴. نتایج عددی

اکنون که دقت و صحت نتایج مشخص شد، خمش ورق قطاع دایره‌ای شکل مدرج تابعی سه جهته مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابعاد ورق و بار اعمالی به آن مطابق ورق مورد آزمایش در بخش ۳ می‌باشد.

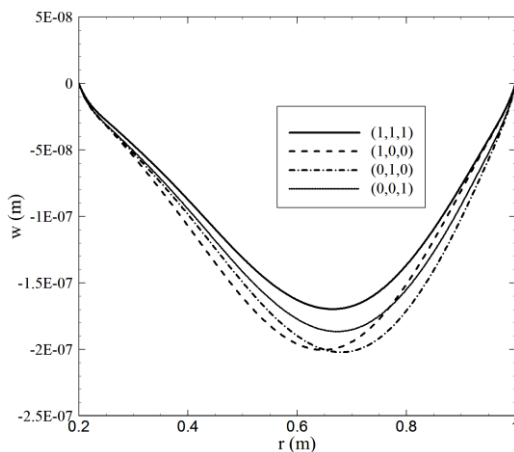
#### ۴-۱. خمش ورق قطاع دایره‌ای شکل مدرج تابعی سه‌جهته

در این بخش خمش ورق قطاع دایره‌ای شکل مدرج تابعی سه جهته مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در شکل ۱۳ تغییرات تنش محوری شعاعی ورق مدرج تابعی در امتداد خط  $(\theta = \frac{\pi}{12}, z = h)$  برای مقادیر مختلف  $(n_r, n_\theta, n_z)$  بررسی شده است. در شکل ۱۳ مشهود است که تأثیر مقادیر مختلف  $(n_r, n_\theta, n_z)$  روی تنش محوری شعاعی محسوس نیست. همچنین شکل ۱۱ نشان می‌دهد بیشینه مقدار تنش محوری شعاعی در نزدیکی قسمت داخلی و خارجی قطاع دایره‌ای است. در شکل ۱۴ خیز ورق مدرج تابعی در امتداد خط  $(\theta = \frac{\pi}{12}, z = h)$  برای مقادیر مختلف  $(n_r, n_\theta, n_z)$  نشان داده شده است. با افزایش توان‌های  $(n_r, n_\theta, n_z)$  مشخصات ماده سازنده ورق به مشخصات ماده ۲ که مدول الاستیسیته بالاتری دارد، نزدیک می‌شود. مطابق انتظار کمترین میزان خیز ورق مربوط به حالت  $(1, 1, 1)$  است، اما مشاهده می‌شود که در سه ترکیب دیگر توان‌های  $(n_r, n_\theta, n_z)$  در حالی که در تمام آن‌ها ماده تنها در یک جهت تغییر می‌یابد، مقدار

خمش متفاوت است. طبق آنچه در شکل ۱۴ مشاهده می‌شود، تغییر خواص ماده در جهت ضخامت ورق در برابر دو جهت دیگر تأثیر بیشتری بر روی خیز ورق دارد. همچنین مشاهده می‌شود که تأثیر جهت تغییرات ماده در تنش کمتر می‌باشد که ناشی از شکل خاص هندسی ورق قطاع دایره‌ای می‌باشد. همچنین شکل ۱۴ نشان می‌دهد که برای همه مقادیر  $(n_r, n_\theta, n_z)$  بیشینه مقدار خیز ورق برای مختصه  $r$  حدود  $0/65$  رخ می‌دهد.



شکل ۱۳. تغییرات تنش محوری شعاعی ورق مدرج تابعی در امتداد خط  $(\theta = \frac{\pi}{12}, z = h)$  برای مقادیر مختلف  $(n_r, n_\theta, n_z)$



شکل ۱۴. تغییرات خیز ورق مدرج تابعی در امتداد خط  $(\theta = \frac{\pi}{12}, z = h)$  برای مقادیر مختلف  $(n_r, n_\theta, n_z)$

در شکل‌های ۱۵ الی ۱۷ بترتیب تغییرات تنش مماسی  $(\sigma_\theta)$ ، تنش محوری عرضی  $(\sigma_z)$  و تنش برشی عرضی  $(\sigma_{rz})$ ، ورق مدرج تابعی در امتداد خط  $(\theta = \frac{\pi}{12}, z = h)$  برای مقادیر مختلف  $(n_r, n_\theta, n_z)$  بررسی شده است.

شکل‌های ۱۵ الی ۱۷ نشان می‌دهند که بیشینه تنش مماسی، تنش محوری عرضی و تنش برشی عرضی در ورق مدرج تابعی



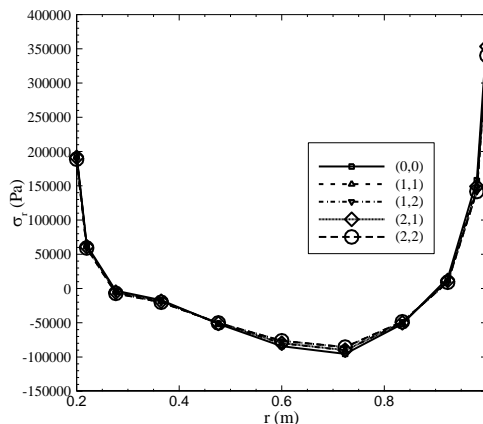
#### ۴-۲. خمش ورق قطاع دایره‌ای شکل مدرج تابعی سه جهته روی بستر الاستیک

در این بخش خمش ورق قطاع دایره‌ای شکل مدرج تابعی سه جهته روی بستر الاستیک مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

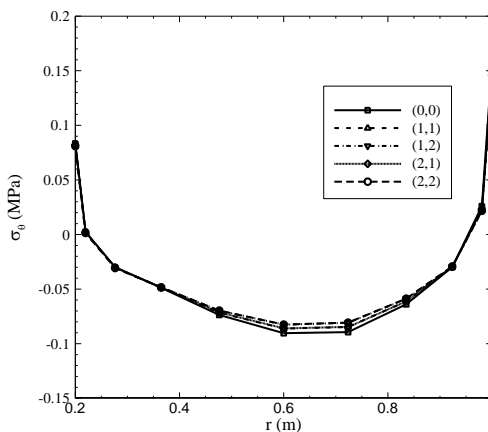
در شکل‌های ۱۸ الی ۲۲، تأثیر پارامترهای بستر الاستیک بر روی خمش ورق بررسی شده است.

همانطور که در شکل‌های ۱۸ الی ۲۲ مشهود است، تأثیر پارامترهای بستر الاستیک بر روی خمش ورق بیشتر است تا بر روی تنش، بعلاوه تأثیر این پارامترها بر روی تنش‌های محوری شعاعی و مماسی بیشتر است تا بر روی تنش‌های برشی و محوری در راستای ضخامت.

همچنین با توجه بیشتر بر روی شکل‌های ۱۸ و ۱۹ مشخص می‌شود تأثیر پارامترهای بستر الاستیک بر روی بخش میانی قطاع دایره‌ای بیشتر ملموس می‌باشد.

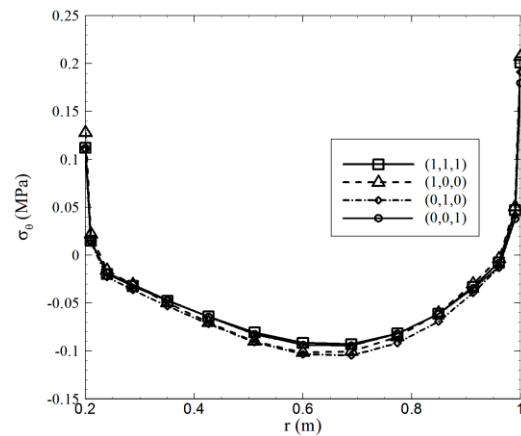


شکل ۱۸. تنش محوری شعاعی ورق در امتداد خط  $(z = h$  و  $\theta = \frac{\pi}{12})$  برای یک ورق مدرج تابعی چند جهته روی بستر الاستیک (Kw, Ks)

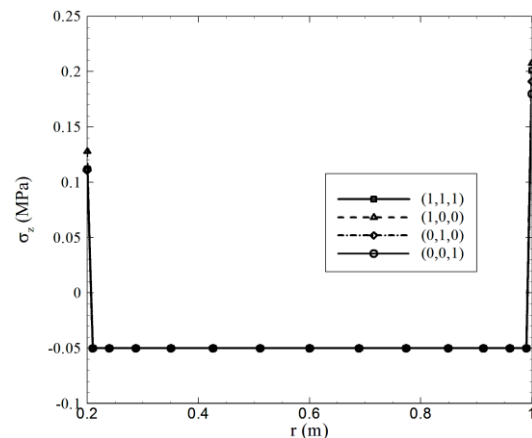


شکل ۱۹. تنش مماسی ورق در امتداد خط  $(z = h$  و  $\theta = \frac{\pi}{12})$  برای یک ورق مدرج تابعی چند جهته روی بستر الاستیک (Kw, Ks)

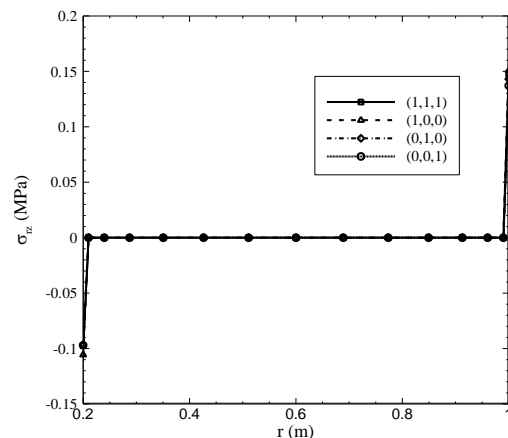
همچون بیشینه مقدار تنش محوری شعاعی در نزدیکی قسمت داخلی و خارجی قطاع دایره‌ای اتفاق می‌افتد.



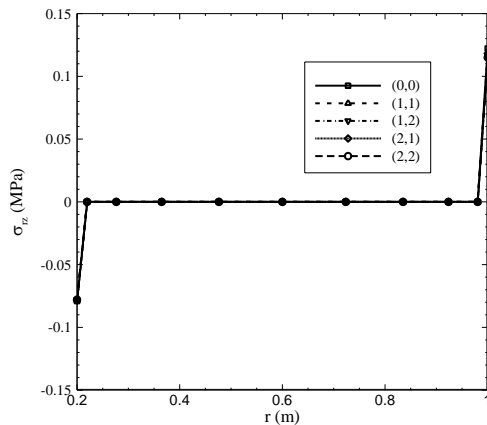
شکل ۱۵. تغییرات تنش مماسی ورق مدرج تابعی در امتداد خط  $(\theta = \frac{\pi}{12}, z = h)$  برای مقادیر مختلف  $(n_r, n_\theta, n_z)$



شکل ۱۶. تغییرات تنش محوری عرضی ورق مدرج تابعی در امتداد خط  $(\theta = \frac{\pi}{12}, z = h)$  برای مقادیر مختلف  $(n_r, n_\theta, n_z)$

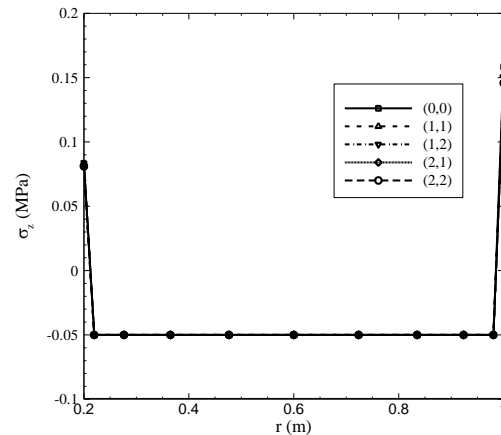


شکل ۱۷. تغییرات تنش برشی عرضی  $(\sigma_{rz})$  ورق مدرج تابعی در امتداد خط  $(\theta = \frac{\pi}{12}, z = h)$  برای مقادیر مختلف  $(n_r, n_\theta, n_z)$



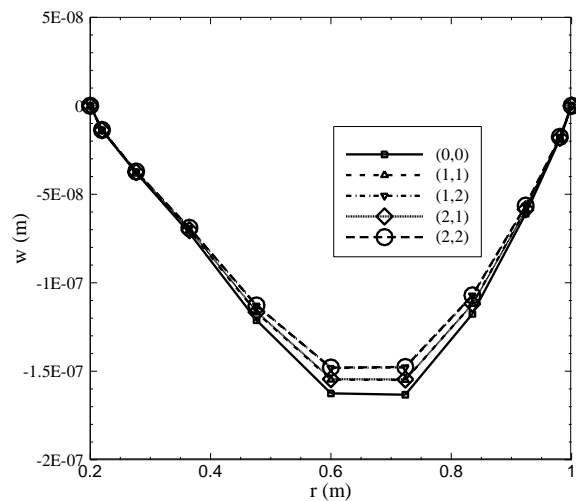
شکل ۲۱. تنش برشی در امتداد خط ( $z = h$  و  $\theta = \frac{\pi}{12}$ ) برای یک ورق مدرج تابعی چند جهته روی بستر الاستیک (Kw, Ks)

روش‌های مورد استفاده برای حل معادلات الاستیسیته سه-بعدی به طور کلی به دو دسته روش‌های تحلیلی و روش‌های عددی مثل روش اجزای محدود تقسیم می‌شود. با توجه به پیچیده بودن معادلات الاستیسیته سه‌بعدی برای مواد مدرج تابعی چندجهته، حل فرم‌بسته آن تاکنون ارایه نشده است. مقالات ارائه شده در این زمینه معمولاً ساده‌سازی‌هایی انجام داده‌اند که منجر به محدود شدن نتایج به حالت‌های خاصی مانند تغییر مواد فقط در یک یا دو جهت خاص، ثابت بودن توزیع نیرو در یک یا دو جهت مختصاتی و شرایط مرزی خاص می‌شود. همچنین روش عددی اجزای محدود نیز دارای محدودیت‌هایی از جمله نیاز به المان‌های به نسبت زیاد برای جهاتی که در آن تغییر تدریجی ماده وجود دارد می‌باشد، از طرفی نمودار تنش در جهاتی که ماده تغییر می‌کند (در مواد مدرج تابعی چند جهته در تمام جهات) به صورت ناپیوسته و شکسته است، که موجب دشوار شدن حل کامل و ناصحیح بودن جواب در تمام نقاط می‌شود. مقایسه نتایج حاصل از روش مورد استفاده در این تحقیق با نرم‌افزار آباکوس نشان‌دهنده دقت بالای روش مورد استفاده برای حل این مسأله می‌باشد. همچنین نتایج نشان می‌دهد که جهت تغییر خواص ماده مدرج تابعی چند جهته معرفی شده (در راستای داخل صفحه و یا در جهت ضخامت) در تغییر شکل ماده تأثیر قابل توجهی دارد. لذا این متغیر می‌تواند به عنوان پارامتری جهت بهینه‌سازی استفاده شود. همچنین نتایج نشان می‌دهد که به طور کلی تغییر ماده در جهت ضخامت به نسبت جهات داخل صفحه دارای تأثیر بیشتری در تغییر شکل صفحه است.



شکل ۲۰. تنش محوری در راستای ضخامت در امتداد خط ( $\theta = \frac{\pi}{12}$  و  $z = h$ ) برای یک ورق مدرج تابعی چند جهته روی بستر الاستیک (Kw, Ks)

با دقت بر روی منحنی‌های شکل ۲۲ مشخص می‌شود که تأثیر پارامتر Ks در خمش ورق مدرج تابعی سه جهته روی بستر الاستیک بیشتر از پارامتر Kw است.



شکل ۲۲. خمش ورق در امتداد خط ( $z = h$  و  $\theta = \frac{\pi}{12}$ ) برای یک ورق مدرج تابعی چند جهته روی بستر الاستیک (Kw, Ks)

## ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی خمشی یک ورق قطاع دایره‌ای شکل مدرج تابعی چند جهته تحت بستر الاستیک پرداخته شده است. با توجه به اینکه تئوری الاستیسیته سه‌بعدی، به نسبت تئوری‌های صفحه برای ورق‌های با ضخامت بالا از دقت بالاتری برخوردار است، بررسی مسایل مختلف مربوط به صفحات ضخیم با استفاده از این تئوری از اهمیت زیادی برخوردار است.

- [1] M. Nemat-Alla, Reduction of thermal stresses by developing two-dimensional functionally graded materials, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, pp. 7339–7356, 2003.
- [2] V. Birman, R. Chona, L. W. Byrd, M. A. Haney, Response of spatially tailored structures to thermal loading, *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 61, pp. 201–217, 2008.
- [3] <https://www.slideshare.net/sabihakhathun/overview-of-functionally-graded-materials-97027240>
- [4] <https://slideplayer.com/slide/5243196/>
- [5] <https://www.slideshare.net/byjuvtvm/analysis-of-buckling-behaviour-of-functionally-graded-plates-24296179>.
- [6] Functionally Graded, Geometrically Ordered Titanium Composite Armor Materials, [https://investorshub.advfn.com/boards/read\\_msg.aspx?message\\_id=119919326](https://investorshub.advfn.com/boards/read_msg.aspx?message_id=119919326), 2016.
- [7] H. Zafarmand, M. Kadkhodayan, Three dimensional dynamic analysis and stress wave propagation in thick functionally graded plates under impact loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 11, pp. 89-96, 2014. (in Persian)
- [8] K. Swaminathan, D. T. Naveenkumar, A. M. Zenkour, E. Carrera, Review stress, vibration and buckling analyses of FGM plates—A state-of-the-art review, *Composite Structures*, Vol. 120, pp. 10-31, 2015.
- [9] K. Asemi, M. Salehi, M. Akhlaghi, Three dimensional static analysis of two dimensional functionally graded plates, *International Journal of Recent Advances in Mechanical Engineering*, Vol. 2, No. 2, pp. 21-32, 2013.
- [10] M. Alizadeh, A. Alibeigloo, Static and free vibration analyses of functionally graded sandwich plates using three dimensional theory of elasticity, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 10, pp. 195-204, 2014. (in Persian)
- [11] H. Zafarmand, M. Kadkhodayan, Three-dimensional static analysis of thick functionally graded plates using graded finite element method, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C*, Vol. 228, No. 8, pp. 1275-1285, 2014.
- [12] P. Malekzadeh, Three-dimensional free vibrations analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations, *Composite Structures*, Vol. 89, pp. 367-373, 2008.
- [13] A. M. Zenkour, The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 51, pp. 869-880, 2009.
- [14] M. H. Amini, M. Soleimani, A. Rastgoo, Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded material plates resting on an elastic foundation, *Smart Materials and Structures*, Vol. 18, 2009.
- [15] S. Benyoucef, I. Mechab, A. Tounsi, A. Fekrar, H. A. Atmane, E. A. A. Bedia, Bending of thick functionally graded plates resting on winkler-pasternak elastic foundations, *Mechanics of composite materials*, Vol. 46, No. 4, 2010.
- [16] A. M. Zenkour, Hygro-thermo-mechanical effects on FGM plates resting on elastic foundations, *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 234-238, 2010.
- [17] H. T. Thai, D. H. Choi, A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation, *Composites Science and Technology*, Vol. 71, pp. 1850-1858, 2011.
- [18] A. M. Zenkour, M. Sobhy, Dynamic bending response of thermoelastic functionally graded plates resting on elastic foundations, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 29, pp. 7-17, 2013.
- [19] V. Tahouneh, M. H. Naei, A novel 2-D six-parameter power-law distribution for three-dimensional dynamic analysis of thick multi-directional functionally graded rectangular plates resting on a two-parameter elastic foundation, *Meccanica*, Vol. 49, pp. 91-109, 2014.
- [20] H. T. Duy, H. C. Noh, Analytical solution for the dynamic response of functionally graded rectangular plates resting on elastic foundation using a refined plate theory, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 39, pp. 6243-6257, 2015.
- [21] M. Asgari, M. Akhlaghi, S. M. Hosseini, Dynamic analysis of two-dimensional functionally graded thick hollow cylinder with finite length under impact loading, *Acta Mechanica*, Vol. 208, pp. 163-180, 2009.
- [22] B. Sobhani Aragh, H. Hedayati, Static response and free vibration of two-dimensional functionally graded metal/ceramic open cylindrical shells under various boundary conditions, *Acta Mechanica*, Vol. 223, pp. 309-330, 2012.
- [23] M. Shariyat, M. M., Alipour, Differential transform vibration and modal stress analyses of circular plates made of two-directional functionally graded materials resting on elastic foundations, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 81, pp. 1289-1306, 2011.
- [24] K. Asemi, M. Salehi, M. Akhlaghi, Elastic solution of a two-dimensional functionally graded thick truncated cone with finite length under hydrostatic combined loads, *Acta Mechanica*, Vol. 217, pp. 119-134, 2011.
- [25] M. Adineh, M. Kadkhodayan, Three-dimensional thermo-elastic analysis of multi-directional functionally graded rectangular plates on elastic foundation, *Acta Mechanica*, pp. 1-19, 2016.
- [26] A. Ghaheri, A. Nosier, Nonlinear forced vibrations of thin circular functionally graded plates, *Journal of Science and Technology of*

- Composite, Vol. 1, No. 2, pp. 1-10, 2015. (in Persian)
- [27] Sh. Yousefzadeh, A. Jafari, A. Mohammadzadeh, Hydroelastic vibration analysis of functionally graded circular plate in contact with bounded fluid by Ritz method, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 5, No. 4, pp. 529-538, 2019. (in Persian)
- [28] B. Shahriari, A. Karimian, M. R. Nazari, Onset yield analysis of rotating variable thickness disk made of functionally graded materials in engine of aero gas turbine, Modarres Mechanical Engineering, Vol. 19, No. 9, pp. 2247-2254, 2019. (in Persian)
- [29] Sh. Yousefzadeh, Thermal buckling analysis of a 2-directional FGM circular plate using first-order shear deformation theory, Journal of Mechanical Engineering, Vol. 47, No. 3, pp. 307-316, 2017. (in Persian)
- [30] H.T. Thai, D.H. Choi, A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation, Composites Science and Technology, Vol. 71, pp. 1850-1858, 2011.

### پي نوشت

- 
1. Functionally Graded
  2. Swaminathan
  3. Zenkour
  4. Winkler
  5. Hyperbolic
  6. Pasternak
  7. Hygrothermal
  8. Thai & Choi
  9. Tahouneh & Naei
  10. Duy & Noh
  11. Chebyshev polynomials
  12. ABAQUS