

کنترل بهینه غیر خطی یک وسیله هوایی با در نظر گرفتن مدل غیر خطی موتور پیشران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۸/۱۱

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۴/۱۹

مصطفی ناظمی زاده^۱، علیرضا بابایی^۲

۱- استادیار، مجتمع دانشگاهی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، ایران. nazemizadeh@aut.ac.ir

۲- استادیار، مجتمع دانشگاهی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، ایران

چکیده

این مقاله به مدل سازی دینامیکی و کنترل بهینه غیرخطی یک وسیله هوایی با در نظر گرفتن مدل غیرخطی موتور پیشران می پردازد. بدین منظور معادله های دینامیک پرواز غیرخطی وسیله هوایی با در نظر گرفتن روابط غیرخطی حاکم بر موتور پیشران آن استخراج می شود. رابطه نیروی پیشران، مصرف سوخت موتور هوازی بیان و با معادله های دینامیک غیرخطی وسیله پرنده ترکیب می شود. با بیان فرمولاسیون کنترل بهینه غیرخطی وابسته به حالت، دینامیک غیرخطی جسم هوایی به عنوان معادلات قیدی مسئله در نظر گرفته شده و تابع هزینه شامل متغیرهای حالت و ورودی های کنترلی لحاظ می شود. سپس تابع همیلتونین مسئله کنترل بهینه تشکیل می شود و معادله های بهینگی به دست می آید. با حل عددی معادله های بهینگی، عوامل متعددی مانند زاویه مسیر پرواز، عدم قطعیت، زاویه حمله و ضرایب وزنی کنترل بهینه در نظر گرفته شده و شبیه سازی متنوعی ارائه می شود. نتایج نشان می دهد، با افزایش زاویه حمله، زمان و تلاش کنترلی سامانه افزایش می یابد. با تغییر ضرایب وزنی مسئله کنترل بهینه، مسیرهای بهینه کنترلی متعددی ایجاد و افزایش ضرایب وزنی ورودی باعث کاهش مصرف سوخت بهینه می شود. مشاهده می شود که با تغییر عوامل عدم قطعیت در مدل سازی، پاسخ گذرا سیستم تغییر کرده اما در نهایت روش کنترل بهینه توانمند در دیایی مسیر مطلوب بوده است. با تغییر شرایط اولیه مختلف و پارامترهای مختلف، کنترل بهینه غیرخطی سیستم به خوبی انجام می شود که نشان دهنده کارایی روش پیشنهادی در مدل سازی و کنترل غیرخطی سیستم است.

واژه های کلیدی: وسیله هوایی، موتور پیشران، دینامیک غیرخطی، کنترل بهینه، وابسته به حالت

Nonlinear optimal control of an aerial vehicle with consideration of nonlinear Modeling of thruster engine

Mostafa Nazemizadeh¹, Alireza Babaei²

1- Assistant professor, Faculty of Mechanical Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Iran. nazemizadeh@aut.ac.ir

2- Assistant professor, Faculty of Mechanical Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Iran.

Abstract

This article deals with dynamic modeling and nonlinear optimal control of an aerial vehicle taken into account nonlinear modeling of its thruster engine. To do this, nonlinear flight dynamic equations of the aerial vehicle are derived considering nonlinear equations of the thruster engine. A relation between the thrusting force and the fuel consumption of the air-breathing engine is stated and coupled with the nonlinear dynamic equations of the vehicle. Presenting the formulation of the state-dependent nonlinear optimal control, the nonlinear dynamic relations of the aerial vehicle are considered as constraint equations of the optimal control and a cost function including state and input variables is defined. Then, the Hamiltonian function of the optimal control problem is formed and optimality equations obtained. By numerical solving of the problem, various parameters like as the path angle, uncertainties, attack angle and weighting coefficients of the optimal control are considered and several simulations are presented. The results show that increasing the attack angle leads to increasing of the control time and effort of the system. Also, changing the weighting coefficients lead to various optimal paths as increasing the input weighting coefficient decreases the fuel consumption. It is seen by changing the uncertainty parameter of the model, transient response is changed but finally the optimal control method is able to track the desired path. Furthermore, by changing initial conditions and parameters, the nonlinear optimal control of the system is effectively performed which indicates the priority of the proposed method

Keywords: aerial vehicle, thruster engine, nonlinear dynamics, optimal control, state-dependent.

۲۱۱

سال ۱۰- شماره ۲

پاییز و زمستان ۱۴۰۰

نشریه علمی دانش و

فناوری هوا فضا



۱. مقدمه

شناسایی دینامیک و تحلیل حرکتی اجسام هوایی مانند هواپیماها و موشک‌ها به منظور کاربردهای عملیاتی بسیار مهم است. در حقیقت، مدل‌سازی دینامیکی دقیق و کنترل پرواز این اجسام یکی از زمینه‌های مهم تحقیقاتی مکانیک و هوافضا بوده و مورد توجه محققان بسیاری بوده است [۱-۳]. اسپونزا-فرایر و همکارانش [۴] به مدل‌سازی یک جسم پرنده کوچک و ارائه چندین کنترل‌کننده خطی برای کنترل حرکت آن پرداختند. عظیمف و آلن [۵] به ارائه مدل دینامیکی و تحلیل کنترلی در مانور قائم یک وسیله هوایی بدون سرنشین پرداختند. آن‌ها ورودی کنترلی را نیروی پیشرانش وارد بر جسم پرنده در نظر گرفته و از یک روش کنترلی انتگرالی برای هدایت جسم پرنده استفاده کردند. در [۶] به کنترل بهینه یک جسم پرنده شش درجه آزادی پره‌دار پرداخته شده است. آن‌ها با در نظر گرفتن معادلات دینامیکی وسیله هوایی، روش کنترل بهینه خطی را برای کنترل مسیر حرکت و مانور آن به کار بردند. لوین و همکارانش [۷] به مطالعه دینامیک پرواز و مانور سریع یک جسم پرنده کوچک با استفاده از روش کنترل بهینه پرداختند. آن‌ها از روش کنترل بهینه برای طراحی مسیر وسیله استفاده کرده اما مدل دینامیکی و کنترل بهینه جسم را بدون مدل‌سازی موتورهای رانش انجام دادند. در حقیقت کنترل بهینه یکی از روش‌های کاربردی مورد توجه در طراحی مسیر و کنترل سیستم‌های دینامیکی محسوب می‌شود. ناظمی‌زاده و دیگران [۸-۱۰] با استفاده از روش کنترل بهینه به طراحی مسیر ربات‌های متحرک با در نظر گرفتن مدل دینامیک غیرخطی پرداختند. همچنین در [۱۱-۱۳] از روش کنترل بهینه غیرخطی با

معادله ریگاتی وابسته به حالت برای کنترل مسیر و هدایت انواع سیستم‌های رباتیکی استفاده شد. از طرفی وسیله‌های هوایی نیروی محرک و پیشرانش خود را با انواع موتورهای هوازی به دست می‌آورند. پس شناخت و مدل‌سازی موتور پیشران در تحلیل دینامیکی و کنترل اجسام پرنده هوایی مهم است. یکی از موتورهای پیشرفته مورد کاربرد، موتورهای هوازی واکنشی است که به‌عنوان محرک‌هایی شناخته می‌شود که نیروی پیشرانش آن‌ها به وسیله خروج دبی جرمی هوا ایجاد می‌شود. موتورهای جت نوعی از موتورهای واکنشی جت محسوب می‌شوند که دارای خروجی هوای جت سرعت بالا بوده و این خروجی نیروی رانش را ایجاد می‌کند. این نوع موتور هوایی عملکرد بهینه در جریان‌های مافوق صوت داشته و مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱۴]. پس به منظور کنترل وسیله‌های هوایی دارای موتور رمجت، ارائه مدل ریاضی و استخراج معادله‌های حاکم بر این موتور با اهمیت است. پریسل [۱۵] به استخراج معادله‌های حاکم بر موتور رمجت با در نظر گرفتن سیکل ترمودینامیکی برای تون پرداخته و معادله‌های جبری برای نیروی پیشرانش و مصرف سوخت موتور رمجت ارائه کردند. همچنین در [۱۶] استخراج معادلات پیشرانش برای موتور رمجت ارائه شد. تایارا [۱۷] به بیان معادلات موتور رمجت با در نظر گرفتن اثرات اتلاف و برگشت‌ناپذیری در دیفیوزر پرداخت. او با بیان اینکه این برگشت‌ناپذیری در اثر شوک‌های دهانه ورودی است، بر اساس استاندارد نظامی امریکا معادله‌هایی برای بازده دهانه ورودی ارائه داد. مارش [۱۸] به بررسی معادله‌های موتور رمجت پرداختند و در روابط ارائه‌شده، نیروی درگ وارد بر بدنه موتور رمجت را در نظر گرفتند. همچنین

۲۱۲

سال ۱۰- شماره ۲
پاییز و زمستان ۱۴۰۰
نشریه علمی دانش و فناوری هوا فضا



کنترل بهینه غیرخطی یک وسیله هوایی با در نظر گرفتن مدل غیرخطی موتور پیشران

در [۱۹] نیروی پیشرانس موتور رمجت با در نظر گرفتن نیروی درگ در معادله‌ها بیان شد. اگرچه تحقیقات بیان شده به ارائه و تحلیل مدل ریاضی موتور رمجت پرداخته است، اما تحلیل دینامیکی وسیله هوایی با موتور رانش رمجت مورد توجه قرار نگرفته است. گولدنشتاین و کالیز [۲۰] به مطالعه بهینه‌سازی حرکت یک موشک همراه با موتور رمجت پرداختند. آن‌ها با در نظر گرفتن معادله‌های حرکت جسم پرنده، به بهینگی نیروی پیشرانس موشک پرداختند. کلوتیر و زیپفل [۲۱] به کنترل بهینه غیرخطی وابسته به حالت برای هدایت یک وسیله هوایی مافوق صوت پرداختند. آن‌ها زاویه حمله را به‌عنوان ورودی کنترلی در نظر گرفته و از مدل‌سازی موتور پیشرانس آن غفلت کردند. در حقیقت، آن‌ها ورودی کنترلی خود را به‌صورت عمومی برابر با نیروی تراست در نظر گرفته و از مدل‌سازی موتور رانش جسم پرنده پرهیز کردند. گروز و همکارانش [۲۲] به مطالعه معادله‌های خطی شده دینامیک طولی یک وسیله هوایی مافوق صوت پرداخته، سپس از روش کنترل بهینه برای کنترل حرکت وسیله پرنده هوازی پرداختند. آن‌ها مدل خطی دینامیک حرکت وسیله را بدون در نظر گرفتن مدل موتور رانش بررسی کردند. در [۲۳] معادله‌های دینامیک طولی وسیله هوایی را ارائه، سپس با تطبیق منحنی، روابطی برای نیروی درگ و لیفت بیان کرد، سپس به تحلیل دینامیکی وسیله پرداخته شد. لی و دیگران [۲۴] به کنترل مافوق صوت هوازی با در نظر گرفتن اثرات الاستیسیته پرداختند. آن‌ها در طراحی و کنترل مسیر، نیروی پیشران موتور را به‌عنوان ورودی سیستم در نظر گرفتند. در [۲۵] معادله‌های دینامیک یک وسیله هوایی مافوق صوت با در نظر گرفتن دو مود انعطاف‌پذیری سیستم بیان شده،

سپس با در نظر گرفتن عدم اطمینان، از روش کنترل تطبیقی برای کنترل مسیر وسیله استفاده شد. هو و همکارانش [۲۶] فرمولاسیون دینامیکی یک وسیله مافوق صوت را ارائه و از روش کنترلی پس-گام برای کنترل مسیر وسیله استفاده کردند. آن‌ها نیروی پیشرانس را به‌عنوان ورودی دینامیکی سیستم در نظر گرفته و مدل‌سازی دقیق موتور را انجام ندادند.

در این مقاله به مدل‌سازی دینامیکی و کنترل بهینه غیرخطی یک وسیله هوایی مافوق صوت با در نظر گرفتن مدل غیرخطی موتور پیشران رمجت پرداخته می‌شود. بدین منظور معادله‌های دینامیک پرواز غیرخطی وسیله هوایی در عدد ماخ بالا با در نظر گرفتن رابطه غیرخطی نیروی پیشرانس برحسب مصرف سوخت موتور هوازی بیان می‌شود. سپس رابطه غیرخطی حاکم بر موتور پیشرانس رمجت با معادله‌های دینامیک غیرخطی وسیله پرنده ترکیب می‌شود. با بیان فرمولاسیون کنترل بهینه غیرخطی برحسب معادله‌های ریکاتی وابسته به حالت، دینامیک غیرخطی جسم هوایی در فضای حالت به‌عنوان معادلات قیدی مسئله در نظر گرفته شده و تابع هزینه شامل متغیرهای حالت و ورودی‌های کنترلی در نظر گرفته می‌شود. تابع همیلتونین تشکیل و معادله‌های بهینگی سیستم به دست می‌آید. با حل عددی معادلات بهینگی، شبیه‌سازی متعددی در کنترل بهینه وسیله پرنده مافوق صوت و ردیابی حالت مطلوب آن ارائه می‌شود. در شبیه‌سازی‌های انجام‌شده، تغییر ضرایب وزنی مسئله کنترل بهینه و شرایط اولیه سیستم بررسی و کنترل بهینه غیرخطی سیستم انجام می‌شود.

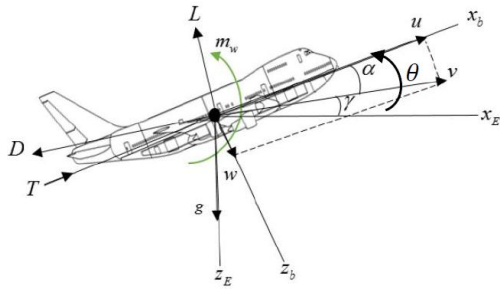
۲. دینامیک غیرخطی وسیله هوایی

در این بخش به دینامیک غیرخطی یک پرنده



معادله‌های حرکت طولی مرتبه چهارم جسم برابر است با [۲۸]:

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{F_x}{m} - g \sin \theta - qw \\ \dot{w} = \frac{F_z}{m} + g \cos \theta + qu \\ \dot{q} = M / I_{yy} \\ \dot{\theta} = q \end{cases} \quad (3)$$



شکل ۱- شماتیک حرکت طولی یک وسیله پرنده

که در رابطه (۳)، u سرعت طولی، w سرعت قائم، F_x برآیند نیرویی در راستای طولی، F_z برآیند نیرویی در راستای قائم، θ زاویه فراز، q سرعت زاویه‌ای فراز، m جرم پرنده و I_{yy} ممان اینرسی حول محور قائم بر صفحه حرکت است. یکی از روش‌های متداول برای بیان معادله‌های حرکت طولی جسم پرنده، ترکیب روابط دستگاه بدنی کارتزین و دستگاه مماسی-عمودی است. در این حالت با فرض زاویه حمله $\alpha = \theta - \gamma$ ، معادله‌های دینامیک پرواز ترکیبی مرتبه چهارم به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{V} = (T \cos \alpha - D - mg \sin \gamma) / m \\ \dot{\gamma} = (T \sin \alpha + L - mg \cos \gamma) / mV \\ \dot{q} = M / I_{yy} \\ \dot{\alpha} = q - \frac{1}{mV} (T \sin \alpha + L - mg \cos \gamma) \end{cases} \quad (4)$$

که در رابطه بالا، V سرعت مطلق جسم پرنده، T نیروی تراست، γ زاویه مسیر پرواز، α زاویه حمله، D نیروی پسا و L نیروی برآ است. متغیرهای حالت V, γ تغییرات آهسته‌تری

پرداخته می‌شود. در حالت کلی برای بیان دینامیک یک وسیله پرنده، دستگاه مختصات بدنی متصل به این جسم در نظر گرفته می‌شود [۲۷]. محور طولی x دستگاه بدنی در امتداد وتر طولی جسم پرنده، محور z عمود بر آن، در جهت قائم و محور y در راستای لغزش وسیله پرنده است. بردارهای یکه i, j, k نیز در راستای محورهای دستگاه بدنی در نظر گرفته می‌شود. در این حالت فرض کنیم که دستگاه بدنی متصل به وسیله پرنده دارای سرعت خطی $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ و در حال دوران با سرعت زاویه‌ای مطلق $\vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$ نسبت به دستگاه مرجع ساکن است. در روابط بیان شده: u سرعت حرکت طولی، v سرعت حرکت جانبی، w سرعت حرکت قائم، p سرعت زاویه‌ای غلت (roll)، q سرعت زاویه‌ای فراز (pitch) و r سرعت زاویه‌ای سمت (yaw) است. همچنین نیروهای خارجی وارد بر جسم برابر با $\sum \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ و گشتاورهای وارد بر وسیله پرنده در دستگاه مختصات بدنی متصل به جسم برابر با $\sum \vec{M} = L\vec{i} + M\vec{j} + N\vec{k}$ در نظر گرفته می‌شود. پس معادله‌های دینامیک حرکت انتقالی وسیله پرنده عبارت است از [۲۷]:

$$\begin{cases} F_x = m(\dot{u} + qw - rv) \\ F_y = m(\dot{v} + ru - pw) \\ F_z = m(\dot{w} + pv - qu) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} L = \dot{H}_x + qH_z - rH_y \\ M = \dot{H}_y + rH_x - pH_z \\ N = \dot{H}_z + pH_y - qH_x \end{cases} \quad (2)$$

از طرفی فرض کنیم وسیله پرنده دارای حرکت طولی در صفحه xz بوده و از حرکت جانبی آن صرف نظر شود.

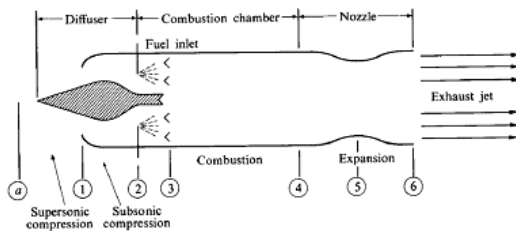
چنانچه دستگاه مختصات کارتزین xz بدنی متصل به وسیله پرنده در نظر گرفته شود،



نسبت به متغیرهای q, α دارند. بنابراین معادله‌های حالت حرکت طولی را می‌توان به دو بخش حرکت زمان تناوب بالا و حرکت زمان تناوب کوچک تقسیم کرد. اثر متقابل این دو مود حرکتی بر یکدیگر ناچیز بوده و می‌توان معادله‌های حرکت طولی وسیله پرنده را کاهش مرتبه داد و تنها مود حرکتی زمان تناوب بالا را در نظر گرفت زیرا سرعت جسم پرنده مورد توجه است.

۳. مدل غیرخطی موتور پیشران

برای مدل‌سازی و تحلیل نیروی پیشران موتور رمجت، مدل‌های مختلفی ارائه شده است. مدل موتور رمجت با در نظر گرفتن سیکل ترمودینامیکی برایتون، یکی از متداول‌ترین مدل‌های ارائه شده برای این موتور جت بوده و در بسیاری از مراجع مورد مطالعه قرار گرفته است [۱۵-۱۷]. به منظور مطالعه دقیق‌تر، شکل ۲ شماتیکی از موتور رمجت را نشان می‌دهد.



شکل ۲- شماتیک مدل رمجت [۲۹]

مطابق با شکل ۲، موتور رمجت بر اساس سیکل برایتون مدل‌سازی شده و مراحل سیکل به صورت زیر بیان می‌شود:

- فرایند $a \leftarrow 2$: پخش و تراکم ایزونتروپیک با کاهش عدد ماخ در بخش ورودی موتور رمجت؛
- فرایند $2 \leftarrow 4$: احتراق فشار ثابت در محفظه احتراق؛
- فرایند $4 \leftarrow 6$: انبساط ایزنتروپیک در نازل؛

- فرایند $6 \leftarrow a$: تخلیه هوا در اتمسفر.

مطابق با سیکل برایتون، نیروی موتور رمجت برابر است با:

$$F = \dot{m}_a [(1+f)u_e - u] \quad (5)$$

که \dot{m}_a دبی جرمی جریان هوا، u سرعت جریان در ورودی، u_e سرعت جریان خروجی و f نسبت سوخت به هواست. از طرفی مطابق با شکل (۲) و با در نظر گرفتن فرایند تراکم و انبساط ایزنتروپیک، مقدار فشار سکون و استاتیکی در ورودی و خروجی موتور یکسان بوده و روابط زیر برقرار است:

$$\frac{P_{0a}}{P_a} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (6)$$

$$\frac{P_{06}}{P_e} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (7)$$

که M و M_e ماخ جریان در ورودی و خروجی موتور است. همچنین P_a و P_{0a} فشار و فشار سکون در دهانه ورودی موتور است. پارامترهای P_e و P_{06} فشار و فشار سکون در دهانه خروجی موتور است. بنابراین در موتور رمجت ایده‌آل، عدد ماخ ورودی و خروجی یکسان است. بنابراین با فرض اینکه a برابر با سرعت صوت در هوا باشد، سرعت جریان خروجی برابر است با:

$$u_e = \frac{a_e}{a} u \Rightarrow u_e = \sqrt{T_{04}/T_{0a}} u \quad (8)$$

در حالی که $a = \sqrt{\gamma RT}$ است γ ضریب اتمیسیته هواست. از طرفی با در نظر گرفتن موازنه انرژی در محفظه سوخت، رابطه بین نسبت سوخت و آنتالپی جریان برابر است با:

$$(1+f)h_{04} = h_{02} + f Q_R \quad (9)$$

که در رابطه (۹)، Q_R ارزش حرارتی سوخت است. همچنین نسبت سوخت به هوا برابر است با:

$$f = \frac{(T_{04}/T_{0a}) - 1}{(Q_R/c_p T_{0a}) - (T_{04}/T_{0a})} \quad (10)$$



بردار کنترل ورودی سیستم است. در مسئله کنترل بهینه، هدف یافتن کنترل قابل قبول \bar{u}^* است که مسیر بهینه \bar{x}^* را نتیجه داده و تابع هدف زیر را کمینه کند:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) dt \quad (15)$$

برای حل مسئله کنترل بهینه با استفاده از روش حساب تغییرات، تابع همیلتونین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(16)$$

$$H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\lambda}(t), t) = L(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) + \bar{\lambda}^T(t) \bar{f}(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)$$

که $\bar{\lambda}(t)$ بردار شبه حالت نامیده شده و شرط لازم بهینگی سیستم آن است که در وضعیت بهینه $\bar{x}^*(t)$ و $\bar{u}^*(t)$ مجموعه بهینگی معادله‌های زیر ارضا شود:

$$\dot{\bar{x}}^* = \frac{\partial H(\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t), \bar{\lambda}^*(t), t)}{\partial \bar{\lambda}^*(t)} \quad (17)$$

$$\dot{\bar{\lambda}}^* = - \frac{\partial H(\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t), \bar{\lambda}^*(t), t)}{\partial \bar{x}^*(t)} \quad (18)$$

$$0 = \frac{\partial H(\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t), \bar{\lambda}^*(t), t)}{\partial \bar{u}^*(t)} \quad (19)$$

علاوه بر این، شرط کافی برای کمینه بودن تابع هزینه و بهینگی سامانه در وضعیت بهینه \bar{x}^* و \bar{u}^* آن است که مشتق دوم همیلتونین نسبت به ورودی بهینه مثبت باشد:

$$\frac{\partial^2 H(\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t), \bar{\lambda}^*(t), t)}{\partial \bar{u}^{*2}(t)} > 0 \quad (20)$$

چنانچه معادلات سیستم خطی در نظر گرفته شود، در روش کنترلی تنظیم‌کننده خطی بهینه، تابع هدف برابر است با:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\bar{X}^T Q \bar{X} + \bar{u}^T R \bar{u}) dt \quad (21)$$

که ماتریس‌های Q و R به ترتیب ماتریس‌های

که در رابطه بالا، دمای سکون T_{a0} در ورودی با دمای ورودی T_a رابطه دارد:

$$T_{a0} = T_a \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \quad (11)$$

لذا با ترکیب روابط بالا، نسبت نیروی پیشرانش به دبی جرمی جریان برای موتور ایده‌ال رمجت برابر است با:

$$(12)$$

$$\frac{F}{\dot{m}_a} = M \sqrt{\gamma R T_a} \left[(1+f) \sqrt{T_{04}/T_a} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1/2} - 1 \right]$$

معادله (۱۲) بیانگر نیروی پیشرانش موتور رمجت بر اساس سیکل موتورهای هوازی است. از طرفی معادله‌های دینامیک طولی وسیله پرنده با در نظر گرفتن نیروی تراست به‌عنوان ورودی سیستم به دست آمد. در این بخش معادله‌های موتور رمجت بیان شده و نیروی تراست برحسب نسبت سوخت به هوا f بیان می‌شود. برای موتور رمجت رابطه بین تراست و مصرف سوخت به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$(13)$$

$$T = \rho_a A_0 V^2 \left[\left(\sqrt{1+f} \sqrt{1 + \frac{f Q_R}{c_p T_a \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} V^2 \right)}} \right) - 1 \right]$$

به‌منظور کنترل مسیر حرکتی وسیله پرنده دارای موتور رمجت، بایستی نیروی پیشرانش رابطه (۱۳) در معادله‌های حرکت رابطه (۵) جاگذاری شود تا متغیر کنترل سرعت T به متغیر f مرتبط شود.

۴. فرمول‌بندی کنترل بهینه غیرخطی

به‌منظور بیان روش کنترل بهینه، معادله‌های فضای حالت دینامیکی سامانه در شکل کلی زیر بیان می‌شود [۳۰]:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) \quad (14)$$

$$\bar{x}(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad x_n(t)]^T$$

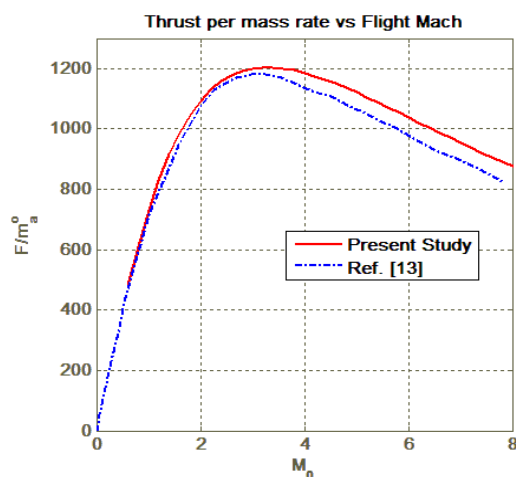
$$\bar{u}(t) = [u_1(t) \quad u_2(t) \quad \dots \quad u_m(t)]^T$$



تراست موتور رمجت، نتایج به دست آمده با مرجع [۱۳] مقایسه شده است. شکل (۳) نسبت تراست به دبی جرمی جریان موتور بر حسب تغییرات ماخ در دهانه ورودی موتور را نشان می دهد.

جدول ۱- مشخصات جو پروازی

مقدار	پارامتر
$T_a = 216^\circ K$	دمای ورودی
$a = 295 m/s$	سرعت صوت
$Q_R = 120 Mj/kg$	ارزش حرارتی سوخت
$f = 0.0292$	نسبت سوخت



شکل ۳- نیروی تراست موتور بر حسب ماخ دهانه ورودی

همان طور که در شکل ۳ مشاهده می شود، نتایج مربوط به نیروی پیشران محاسبه شده در مطالعه کنونی با نتایج مرجع [۱۳] تطابق داشته و نشان دهنده صحت فرمول بندی موتور رمجت است. از طرفی نیروی تراست موتور رمجت تا عدد ماخ دو تا چهار صعودی بوده، سپس با شیب کمی نزولی می شود.

در ادامه، حرکت وسیله پرنده با در نظر گرفتن معادله های دینامیک پرواز طولی و نیروی تراست موتور رمجت بررسی می شود. فرض می شود که وسیله پرنده دارای پرواز تراز بوده، با ثابت بودن

وزنی بردار حالت و کنترل بوده و ماتریسی مثبت معین متقارن فرض می شوند. بنابراین با استفاده از روش کنترل بهینه و تشکیل تابع همیلتونین، بر اساس رابطه های (۱۸) و (۱۹) شرایط بهینگی بردار شبه حالت و کنترل ورودی برابر است با:

$$\dot{\vec{\lambda}}^* = A^T \vec{\lambda}^* + Q \vec{X}^* \quad (22)$$

$$\vec{u}^* = -R^{-1} B^T \vec{\lambda}^* \quad (23)$$

با فرض اینکه $\vec{\lambda} = P \vec{X}$ بوده که P ماتریس مثبت معین است، با صرف نظر از بالانویس ستاره، قانون کنترلی بهینه بازخورد برابر با $\vec{u} = -R^{-1} B^T P \vec{X}$ بوده و در نهایت ماتریس P بایستی در معادله دیفرانسیلی ریکاتی صدق کند:

$$(24)$$

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q + \dot{P} = 0$$

بنا بر اصل لیاپانوف، به دست آوردن ماتریس مثبت معین P پایداری سیستم حلقه بسته را ایجاب می کند. برای پایداری سیستم حلقه بسته، P ماتریس مثبت معین است. زیرا چنانچه تابع لیاپانوف $V = \frac{1}{2} \vec{X}^T P \vec{X}$ تابعی مثبت معین فرض شود، در این صورت مشتق تابع لیاپانوف $\dot{V} = \vec{X}^T P \dot{\vec{X}}$ مقداری منفی نیمه معین است و پایداری سیستم حلقه بسته برقرار است.

۵. شبیه سازی و نتایج

در این بخش، شبیه سازی حرکت و کنترل بهینه غیرخطی وسیله هوایی در صفحه قائم با در نظر گرفتن معادله های دینامیک غیرخطی کوپله شده جسم-موتور پیشران بررسی می شود.

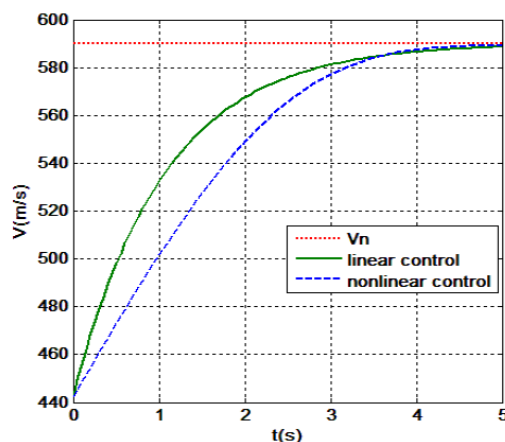
با در نظر گرفتن پرواز در جو استراتوسفر، دما و سرعت صوت هوا در جدول زیر ارائه شده است.

در ابتدا برای اعتبارسنجی معادله های نیروی





زاویه حمله و مسیر پرواز، به ردیابی سرعت مطلوب می‌پردازد. پارامترهای سامانه برابر با جرم کلی $m = 600 \text{ kg}$ و ضریب درگ $C_d = 0.5$ در نظر گرفته می‌شود. دیگر متغیرهای سامانه برابر است با: $Q_R = 120 \times 10^6 \text{ J/kg}$ ، $A = 0.1275 \text{ m}^2$ ، $T_a = 216 \text{ K}$ ، $\rho = 1.22 \text{ kg/m}^3$ ، $\bar{\gamma} = 1.4$ ، $C_p = 1003 \text{ J/kg K}$ و $a_0 = 295 \text{ m/s}$ ، است. در شبیه‌سازی اول، سرعت مطلوب $V_N = 2 \text{ Mach}$ در نظر گرفته شده و شرایط اولیه پرواز برابر با $V_0 = 1.5 \text{ Mach}$ است. زمان کنترلی برابر با $t_f = 5 \text{ s}$ در نظر گرفته می‌شود. ضرایب وزنی کنترل بهینه برابر با $Q = 10$ و $R = 60 \times 10^6$ در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از کنترل بهینه، نتایج شبیه‌سازی سرعت جسم پرنده در شکل ۴ ارائه شده است:

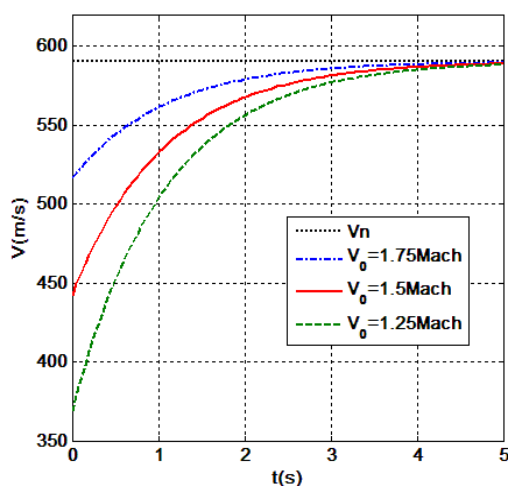


شکل ۴- سرعت بهینه وسیله هوایی برای کنترل کننده خطی و غیرخطی

همان‌طور که در شکل (۴) مشاهده می‌شود، دو کنترل کننده بهینه خطی و غیرخطی سرعت تراز را به خوبی ردیابی کرده است. از طرفی اثرات غیرخطی سامانه بر رفتار کنترل کننده غیرخطی باعث شده که سرعت در مدت زمان بیشتری به مقدار نامی مطلوب نزدیک شود. پس با توجه به اثر دینامیک غیرخطی بر رفتار کنترلی، استفاده از

کنترل کننده غیرخطی با لحاظ مدل دینامیک غیرخطی ارجحیت دارد.

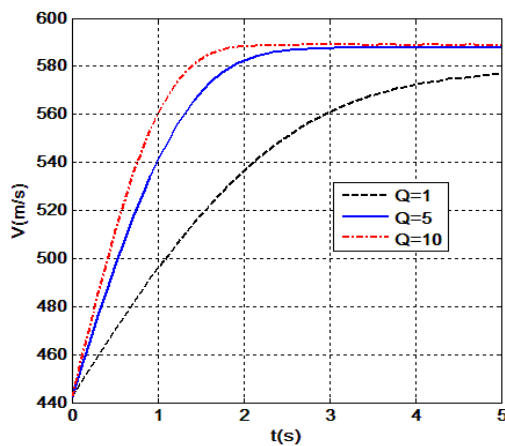
در مطالعه دیگری، اثرات شرایط اولیه بر سرعت وسیله پرنده بررسی می‌شود. در این شبیه‌سازی، سرعت مطلوب $V_N = 2 \text{ Mach}$ در نظر گرفته شده و شرایط اولیه پرواز برابر با سه حالت $V_0 = 1.25, 1.5, 1.75 \text{ Mach}$ است. زمان مطلوب همگرایی پاسخ برابر با $t_f = 5 \text{ s}$ در نظر گرفته می‌شود. ضرایب وزنی برابر با $Q = 10$ و $R = 60 \times 10^6$ در نظر گرفته شده است: ۵ سرعت وسیله پرنده نشان داده شده است:



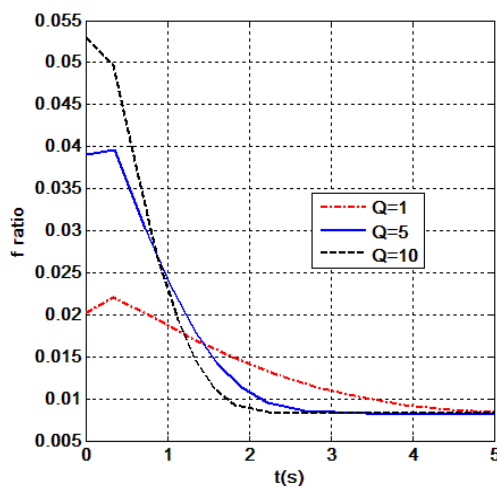
شکل ۵- سرعت وسیله برای شرایط اولیه مختلف

همان‌طور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود، روش کنترلی پیشنهاد شده با وجود تغییرات شرایط اولیه قادر به ردیابی سرعت نهایی بوده و پس از طی مسیر هموار در مدت زمان کنترلی به مقدار نهایی رسیده‌اند. کنترل کننده بهینه غیرخطی با وجود تغییر شرایط اولیه قادر به ردیابی سرعت نهایی بوده و سرعت وسیله هوایی پس از طی مسیر هموار در مدت زمان کنترلی به مقدار نهایی رسیده‌اند. البته هرچقدر اختلاف شرایط اولیه و نهایی سرعت متفاوت باشد، زمان مورد نیاز برای ردیابی افزایش می‌یابد. از طرفی تغییرات مصرف سوخت برای سرعت‌های مختلف

بنابراین افزایش ضریب وزنی حالت، نشان‌دهنده اهمیت بیشتر به متغیرهای حالت بوده و ردیابی سرعت در زمان کمتری انجام می‌شود.



شکل ۷- سرعت جسم برای ضرایب وزنی حالت مختلف

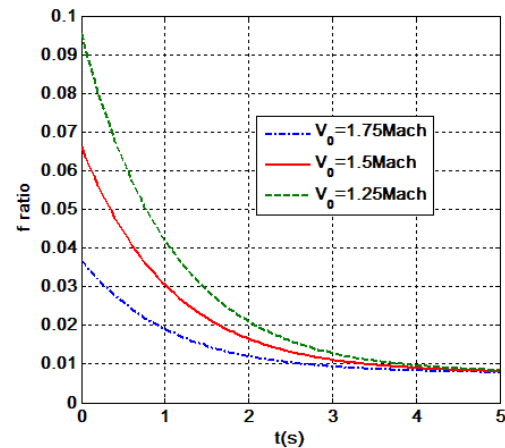


شکل ۸- مصرف سوخت بهینه برای ضرایب وزنی حالت مختلف

همان‌طور که در شکل ۸ مشاهده می‌شود، با افزایش ضریب وزنی حالت، تلاش کنترلی بهینه بیشتری نیاز بوده و مصرف سوخت بهینه موتور افزایش می‌یابد. پس انتخاب ضرایب وزنی در روش کنترل بهینه حائز اهمیت است و میزان توجه طراح را به هر یک از معیارهای طراحی و اولویت‌بندی آن‌ها مشخص می‌کند.

در مطالعه دیگری اثر مسیر پرواز تراز و زاویه مسیر پرواز بر تغییرات سرعت بهینه وسیله هوایی

وسیله پرنده نیز در شکل ۶ نشان داده شده است: همان‌طور که در شکل بالا مشاهده می‌شود، با تغییر شرایط اولیه، زمان موردنیاز برای کنترل بهینه افزایش یافته و بیشینه مصرف سوخت نیز افزایش می‌یابد. با افزایش اختلاف سرعت اولیه و سرعت، تلاش کنترلی بهینه و زمان کنترلی برای ردیابی سرعت نهایی افزایش می‌یابد.



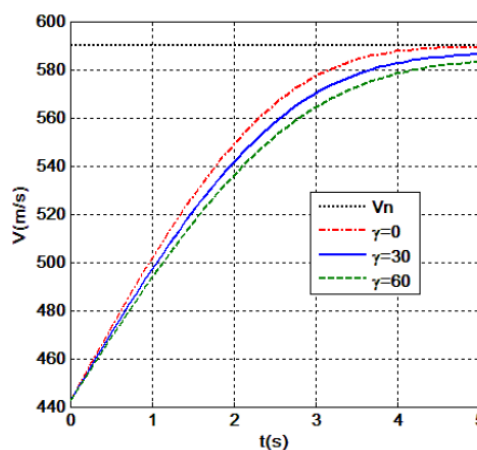
شکل ۶- مصرف سوخت وسیله برای شرایط اولیه مختلف

در شبیه‌سازی دیگر، اثرات ضریب وزنی بر مسیر سیستم غیرخطی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در این شبیه‌سازی، سرعت نامی $V_N = 2Mach$ در نظر گرفته شده و شرایط اولیه پرواز برابر با $V_0 = 1.5Mach$ است. زمان کنترلی برابر با $t_f = 5s$ در نظر گرفته می‌شود. ضرایب وزنی کنترل $R = 60 \times 10^6$ در نظر گرفته می‌شود. داده‌های این شبیه‌سازی مشابه با شبیه‌سازی قبل در نظر گرفته شده است، با این تفاوت که سه مقدار برای ضریب وزنی حالت: $Q_1 = 1$ ، $Q_2 = 5$ و $Q_3 = 10$ در نظر گرفته می‌شود. در شکل زیر اثر افزایش ضریب وزنی حالت بر مسیر حرکت نشان داده شده است:

همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش ضریب وزنی مربوط به متغیر حالت، متغیر حالت در زمان کوتاه‌تر به ردیابی سرعت نهایی می‌رسد.



دارای موتور رمجت موردبررسی قرار می‌گیرد. در این حالت، سرعت نامی $V_N = 2Mach$ در نظر گرفته شده و شرایط اولیه پرواز برابر با $V_0 = 1.5Mach$ است. زاویه مسیر پرواز در سه حالت تراز $g 1 = 0o$ ، $g 1 = 30o$ و $g 1 = 60o$ در نظر گرفته می‌شود. تغییرات سرعت بهینه جسم پرنده برای زاویه‌های مسیر پرواز مختلف در شکل زیر نشان داده شده است:



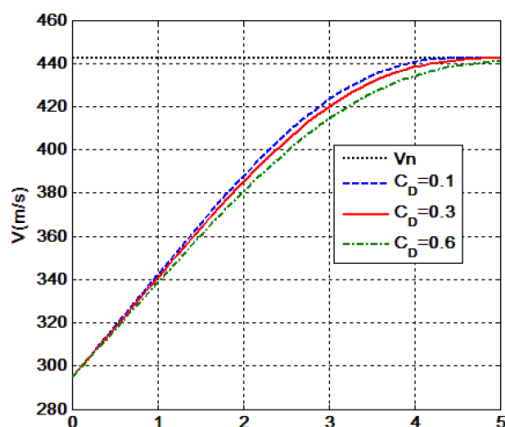
شکل ۹- سرعت بهینه وسیله هوایی برای مسیرهای مختلف پروازی

همان‌طور که در شکل (۹) دیده می‌شود، با افزایش زاویه مسیر پرواز، دقت ردیابی سرعت مطلوب کاهش یافته است و زمان موردنیاز برای کنترل پرواز وسیله نیز افزایش یافته است. علت این امر در آن است که با افزایش زاویه مسیر، اثرات نیروی وزن بر حرکت وسیله هوایی افزایش یافته و لذا زمان موردنیاز کنترل‌کننده و مصرف سوخت آن برای ردیابی مسیر افزایش می‌یابد.

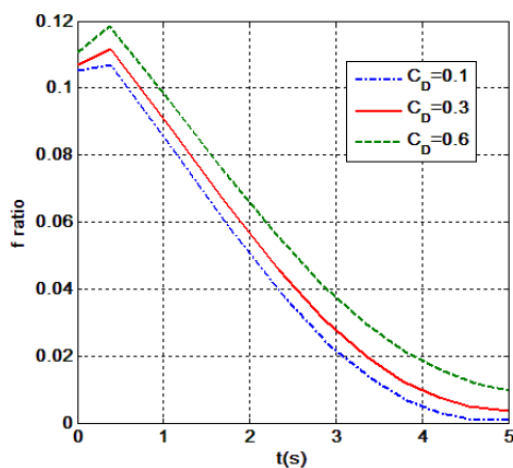
در مطالعه دیگری، اثر ضریب نیروی پسا بر تغییرات سرعت بهینه وسیله هوایی دارای موتور رمجت موردبررسی قرار می‌گیرد. تغییرات سرعت بهینه جسم پرنده در شکل زیر نشان داده شده است:

طبق شکل (۱۰)، با افزایش ضریب پسا، دقت ردیابی سرعت مطلوب به مقدار ناچیزی کاهش

یافته است. از طرفی تغییر ضریب دراگ به معنای عدم دقت در محاسبات نیروی پسا و قطعی نبودن در مدل‌سازی است. ولی با وجود این دیده می‌شود که روش کنترل بهینه قادر به ردیابی مناسب سرعت نهایی برای سامانه بوده است. همچنین در شکل (۱۱) اثر ضریب پسا بر مصرف بهینه سوخت جسم پرنده در طی مسیر پروازی نشان داده می‌شود:



شکل ۱۰- سرعت بهینه وسیله هوایی برای ضرایب پسا مختلف

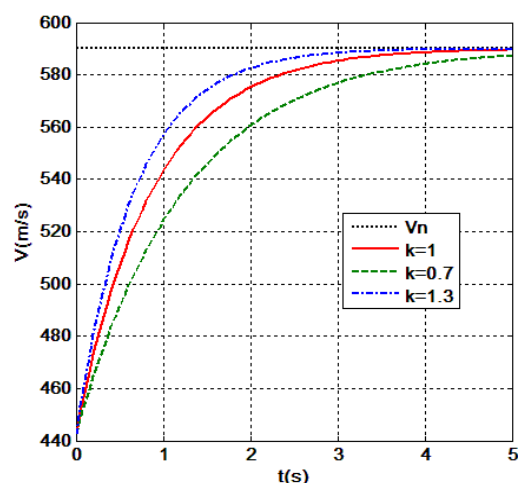


شکل ۱۱- سرعت بهینه وسیله هوایی برای ضرایب پسا مختلف

مطابق با شکل (۱۱)، با افزایش ضریب پسا، میزان مصرف سوخت وسیله هوایی نیز افزایش یافته است. علت این امر در آن است که با افزایش ضریب پسا، نیروی مقاوم وارد بر وسیله هوایی نیز

افزایش یافته و لذا مصرف سوخت بیشتری برای کنترل بهینه جسم نیاز است.

در مطالعه دیگری، عدم قطعیت مدل‌سازی موتور رمجت بر رفتار کنترلی مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین منظور، در معادله (۸) که بیانگر نیروی تراست موتور بر حسب نسبت سوخت به هوای آن است، از ضریب k که بیانگر قطعی نبودن در مدل‌سازی موتور است استفاده شده و پاسخ کنترلی بررسی شده است. ضریب $k=1$ بیانگر مدل دقیق است. شکل ۱۲ سرعت جسم را بر حسب مقادیر مختلف ضریب عدم قطعیت نشان داده است:



شکل ۱۲- سرعت جسم برای عدم قطعیت‌های مختلف

همان‌طور که در شکل ۱۲ مشاهده می‌شود، با تغییر پارامتر عدم قطعیت، پاسخ گذرا تغییر کرده، اما در نهایت روش کنترل بهینه توانمند در ردیابی مسیر مطلوب بوده است.

۶. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله، کنترل بهینه مصرف سوخت یک وسیله هوایی با موتور پیشران هوازی با لحاظ دینامیک کامل سامانه و بازخورد سرعت جسم پرنده مورد مطالعه قرار گرفت. مدل ریاضی موتور پیشران ارائه و با استخراج معادله‌های حاکم بر

موتور رمجت، رابطه نیروی پیشران و مصرف سوخت موتور به دست آمد. همچنین، معادله‌های غیرخطی موتور رمجت و دینامیک جسم پرنده ترکیب شده و معادله‌های در فضای حالت ارائه شد. از روش کنترل بهینه برای کنترل مصرف سوخت وسیله هوایی با موتور هوازی استفاده و روابط بهینگی ارائه شد. با حل معادله‌های بهینگی، شبیه‌سازی‌های متنوعی برای کنترل بهینه جسم پرنده با موتور رمجت و با فیدبک سرعت جسم پرنده ارائه شد. اثر شرایط اولیه بر کنترل مطلوب وسیله هوایی مورد مطالعه قرار گرفت و نشان داده شده روش کنترل بهینه برای شرایط اولیه مختلف قادر به ردیابی سرعت مطلوب است. همچنین اثرات این شرایط بر مصرف سوخت نیز نشان داد که با افزایش اختلاف سرعت اولیه و مطلوب، مصرف سوخت بهینه سامانه افزایش می‌یابد. از طرفی، عدم قطعیت در مدل‌سازی موتور پیشران با تعریف پارامتری ارائه شد و نشان داده شد که اثر این عدم قطعیت بر پاسخ نهایی و مطلوب با استفاده از روش کنترل بهینه کاهش چشمگیری یافته است. از طرفی برای بهینه‌سازی مصرف سوخت، تغییرات ضرایب وزنی بررسی شد و نشان داده شد که انتخاب ضرایب وزنی در روش کنترل بهینه حائز اهمیت است و میزان توجه طراح را به هر یک از معیارهای تابع هزینه مشخص می‌کند. در نهایت، نتایج به دست آمده نشان‌دهنده کارایی روش پیشنهادی در مدل‌سازی و کنترل وسیله پرنده دارای موتور پیشران هوازی است.

۷. مأخذ

- [1] Saberi Tavakkoli, M., Modeling and Simulation of a Ballistic Launch Vehicle in ECEF and Navigation Coordinate Systems. *Journal of Technology in Aerospace Engineering*, Vol. 1, No. 2, pp. 17-26,



- [10] M.H. Korayem, M. Nazemizadeh, H.R. Nohooji, Optimal point-to-point motion planning of non-holonomic mobile robots in the presence of multiple obstacles, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 36, No. 1, pp. 221-232, 2014.
- [11] S.R. Nekoo, Nonlinear closed loop optimal control: a modified state-dependent Riccati equation. *ISA transactions*, Vol. 52, No. 2, pp. 285-290, 2013.
- [12] B. Geranmehr, S.R. Nekoo, Nonlinear suboptimal control of fully coupled non-affine six-DOF autonomous underwater vehicle using the state-dependent Riccati equation. *Ocean Engineering*, Vol. 96, pp. 248-257, 2015.
- [13] H. Mirzaeinejad, A.M. Shafei, Modeling and trajectory tracking control of a two-wheeled mobile robot: Gibbs-Appell and prediction-based approaches. *Robotica*, Vol. 36, No. 10, 1551-1570, 2018.
- [14] R.S. Fry, A century of ramjet propulsion technology evolution. *Journal of propulsion and power*, Vol. 20, No. 1, pp. 58-72, 2004.
- [15] E.G. Prisell, The Feasibility of the Scramjet; an Analysis Based on First Principles. In *Proceedings of the 25th International Congress of the Aeronautical Sciences*, pp. 1-14, 2006.
- [16] Ph. Rudnuck, Momentum relations in propulsive ducts, *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 14, No. 9, pp. 540-544. 1947.
- [17] B. Tayara, *Investigations of Ramjets: technical report*, Delft University, 2000.
- [18] B.W. Marsh, Introduction to the Analysis of Supersonic Ramjet Power Plants. *Journal of Jet Propulsion*, Vol. 24, No. 3, pp. 155-161, 1954.
- [19] R. LeMoyné, Fundamental Analysis of a Tandem LH2-LOX Rocket-Ramjet Propulsion System. In *AIAA SPACE 2009 Conference & Exposition*, pp. 6658-6662, 2009.
- [20] F. Goldstein, A. Calise, Optimal 2017.
- [2] Mobini Bidgoli, M., Sadati, S., Flight control using adaptive dynamic inversion. *Aerospace Knowledge and Technology Journal*, Vol. 5, No.1, pp. 7-16, 2016. (in Persian فارسی).
- [3] Havaei, M., Ebrahimi, M., Guidance of solid propellant missile based on functional guidance. *Aerospace Knowledge and Technology Journal*, Vol. 7, No. 2, pp. 67-79, 2018. (in Persian فارسی).
- [4] T. Espinoza-Fraire, A. Dzul, F. Cortés-Martínez, W. Giernacki, Real-time implementation and flight tests using linear and nonlinear controllers for a fixed-wing miniature aerial vehicle (MAV), *International Journal of Control, Automation and Systems*, Vol. 16, No. 1, pp. 392-396, 2018.
- [5] D. Azimov, J. Allen, Analytical model and control solutions for unmanned aerial vehicle maneuvers in a vertical plane. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, Vol. 91, No. 3-4, pp. 725-733, 2018.
- [6] M.Mazare, E. davoodi, M. Taghizadeh, M. pourgholi, Optimal Control Based on Minimum-Energy Trajectory Planning of a Quadrotor. *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 2019. (in Persian فارسی).
- [7] J.M. Levin, A.A. Paranjape, M. Nahon, Agile maneuvering with a small fixed-wing unmanned aerial vehicle. *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 116, pp. 148-161, 2019.
- [8] M. Nazemizadeh, H.N. Rahimi, K.A. Khoiy, Trajectory planning of mobile robots using indirect solution of optimal control method in generalized point-to-point task, *Frontiers of Mechanical Engineering*, Vol. 7, No. 1, pp. 23-28, 2012
- [9] M. Nazemizadeh, H.R. Nohooji, An analysis of the finite element method applied on dynamic motion and maximum payload planning of flexible manipulators. *Transactions of FAM ;: //wzENA*, Vo. 39, No. 4, pp. 15-22, 2016.



- [29] J.H. Blakelock, *Automatic control of aircraft and missiles*. John Wiley & Sons, 1991
- [30] D. Küchemann, J. Weber, *Aerodynamics of propulsion*, McGraw-Hill, Vol. 2, 1953
- [31] J.R. Cloutier, J.C. Cockburn, The state-dependent nonlinear regulator with state constraints. *Proceedings of the IEEE in American Control Conference*, pp. 390-395, 2001
- [32] M.R.E. Beiki and M. Irani-Rahaghi, Optimal Trajectory Planning of a Six DOF Parallel Stewart Manipulator. *International Conference on Robotics and Mechatronics*, pp. 120-125, 2016
- [33] Korayem, M. H. and Nekoo, S. R., Controller design of cooperative manipulators using state-dependent Riccati equation. *Robotica*, Vol. 36, No. 4, pp. 484-515, 2018
- propulsion/guidance analysis of ramjet powered air-to-air missiles. *IEEE Conference on Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes*, pp. 644-647, 2002.
- [21] J.R Cloutier, P.H. Zipfel, Hypersonic guidance via the state-dependent Riccati equation control method, *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications*, pp. 219-224, 1999.
- [22] K. Groves, A. Serrani, S. Yurkovich, M. Bolender, D. Doman, Anti-windup control for an air-breathing hypersonic vehicle model. *AIAA conference and exhibit on guidance, navigation, and control*, pp. 6557-6562, 2005.
- [23] M. Z. Nejad, M. Jabbari, M. Ghannad, A semi-analytical solution for elastic analysis of rotating thick cylindrical shells with variable thickness using disk form multilayers, *The Scientific World Journal*, 2014.
- [24] M. H. Jalali, B. Shahriari B, Elastic Stress Analysis of Rotating Functionally Graded Annular Disk of Variable Thickness Using Finite Difference Method, *Mathematical Problems in Engineering*, 2018.
- [25] H.Li, Y. Si, L. Wu, X. Hu, Z. Wang, H. Gao, Fault-tolerant output tracking control for a flexible air-breathing hypersonic vehicle. *International Symposium on Systems and Control in Aeronautics and Astronautics*, pp. 1059-1064, 2010.
- [26] Z. Guo, J. Chang, J. Guo, J. Zhou, Adaptive twisting sliding mode algorithm for hypersonic reentry vehicle attitude control based on finite-time observer. *ISA transactions*, Vol. 77, pp. 20-29, 2018.
- [27] Q. Hu, Y. Meng, C. Wang, Y. Zhang, Adaptive backstepping control for air-breathing hypersonic vehicles with input nonlinearities, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 73, pp. 289-299, 2018.
- [28] D.T. McRuer, D. Graham, I. Ashkenas, *Aircraft dynamics and automatic control*. Princeton University Press, 2014.

