

تعیین نقطه آغاز گذار از جریان آرام به آشفته حول یک هواپر با استفاده از حل عددی معادله پایداری اور - سامرفلد و اعمال پروفیل‌های سرعت عددی

مجتبی احمدی بلوطکی^۱، احمد صداقت^۲، محسن ثقفیان^۳

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۰/۰۴/۲۴

تاریخ ارزیابی نهایی: ۱۳۹۱/۰۴/۰۲

چکیده

تعیین نقطه آغاز گذار بر روی هواپرها در جریان‌های دوبعدی با استفاده از تحلیل پایداری جریان از طریق حل معادله اور - سامرفلد به روش تفاضل محدود، انجام شده است. پروفیل‌های سرعت جریان و مشتقات آن درون لایه مرزی برای حل معادله اور - سامرفلد از حل عددی جریان با استفاده از یک کد عددی TVD تعیین می‌شوند که معادلات ناویر - استوکس دوبعدی را به روش ضمنی حل می‌کند. همچنین با استفاده از روش e^N و به کمک توابع ویژه و مقادیر ویژه بدست آمده از حل معادله اور - سامرفلد، محل نقطه گذار جریان از رژیم آرام به آشفته تعیین شده است. الگوریتم موثر به کار برده شده در حل عددی معادله اور - سامرفلد به همراه به کارگیری تمهیدات جانبی برای همگرایی آن روش باعث شده است که نتایج تحلیل پایداری جریان در تطابق خوبی با نتایج عددی و تحلیلی دیگران باشد. علاوه بر آن، استخراج پروفیل‌های سرعت از حل جریان لزج منجر به پیش‌بینی رضایت‌بخش نقطه‌ی گذار جریان حول هواپر NACA0012 شده است.

کلیدواژه:

پیش‌بینی گذار، معادله اور - سامرفلد، روش e^N ، تحلیل پایداری.

مقدمه

به میزان قابل قبولی مدل کرد. در این پژوهش، تعیین موقعیت آغاز گذار در جریان‌های دوبعدی برای اعداد رینولدز بالا مد نظر است که برای آن به تحلیل پایداری هیدرودینامیکی جریان از طریق حل معادله اور - سامرفلد نیاز است. معادله اور - سامرفلد که به معادله پایداری جریان لزج معروف است، تقریبی از معادلات حاکم بر رشد یا کاهش دامنه یک اغتشاش در جریانهای موازی است. تعیین نقطه گذار جریان نیز با استفاده از روش e^N یا روش اسمیت انجام می‌گردد که این روش از حل معادله اور - سامرفلد برای تعیین میزان رشد امواج اغتشاشی استفاده می‌کند. اما برای حل معادله اور - سامرفلد در یک جریان خاص نیاز به پروفیل‌های سرعت جریان و مشتقات آن درون لایه مرزی در راستای عمود بر سطح و در هر مقطع در امتداد جریان است که موارد ذکر شده از حل دقیق جریان آرام بدست می‌آیند. ابزار استفاده شده برای حل جریان یک کد عددی TVD^۱ است که معادلات ناویر - استوکس دوبعدی را به روش ضمنی حل می‌کند. وجه تمایز تحقیق حاضر نسبت به کارهای دیگران این است که در سایر پژوهش‌های عددی مشابه، برای حل معادله اور - سامرفلد از پروفیل‌های سرعت تعیین شده از

یکی از مسائل مهم و اساسی در دینامیک سیالات مسأله گذار جریان از رژیم آرام به آشفته است. چگونگی تولید و رشد اغتشاشات در جریان که منجر به گذار جریان از رژیم آرام به آشفته می‌گردد همواره از اهمیت اساسی در علم مکانیک سیالات برخوردار بوده است. به همین دلیل است که استفاده از یک ابزار محاسباتی در دینامیک سیالات محاسباتی بر مبنای معادلات ناویر - استوکس که قادر به حل جریان به طور مستقل در دو رژیم آرام و آشفته باشد، از کاربرد فراوانی در صنعت هوا فضا برخوردار است. در واقع، بطور عملی در طراحی هواپر یا بال هواپیما، بدون در نظر گرفتن فرآیند گذار جریان از رژیم آرام به آشفته نمی‌توان نتایج قابل اطمینانی بدست آورد. در بسیاری از کاربردهای مهندسی که از گرادیان فشار ضعیف در امتداد جریان و انحنای سطح کمی برخوردار هستند، با فرض رژیم کاملاً آشفته، می‌توان جریان را

۱. کارشناس ارشد m.ahmadi@me.iut.ac.ir

۲. استادیار sedaghat@cc.iut.ac.ir

۳. استادیار saghafian@cc.iut.ac.ir

تحلیلش استفاده کرد. همچنین در حل معادله اور - سامرفلد به روش بسط طیفی از بسط دادن تابع حل معادله یعنی تابع دامنه اغتشاش به صورت یک ترکیب خطی از توابع متعامد استفاده می گردد. گری و هلگاسون [۲] و اورزاگ [۵] با استفاده از روش طیفی، پایداری جریان را بررسی کرده و پاسخهای معادله اور - سامرفلد و پارامترهای عدد موج، فرکانس موج و سرعت فازی موج را در گستره رینولدزهای زیادی محاسبه نمودند.

در این پژوهش برای حل معادله اور - سامرفلد از روش تفاضل محدود استفاده شده است بدین ترتیب که ابتدا معادله اور - سامرفلد با کاهش مرتبه به تعدادی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول تبدیل می گردد و سپس با استفاده از گسسته سازی معادلات یاد شده به کمک تقریبهای مشتق، حل آن معادلات در ناحیه بین دو مرز جریان به صورت همزمان انجام می شود. روش تفاضل محدود به کار گرفته شده وابستگی زیادی به حدس اولیه دارد و چنانچه مقادیر مناسبی به عنوان حدس اولیه برای عبارتهای مورد نیاز منظور نگردد امکان واگرایی روش وجود دارد. از این رو برای غلبه بر مشکلات همگرایی این روش تمهیدات خاصی در نظر گرفته شده است که شامل استفاده از روش تکرار نیوتن برای حل دستگاههای غیر خطی و همچنین تعیین رابطه ای برای محاسبه حدس اولیه عبارتهای مورد نیاز در یک نقطه محاسباتی خاص از روی پاسخ معادله اور - سامرفلد برای همان عبارتهای در نقطه محاسباتی قبلی می باشد [۳، ۶-۸]. مجموعه ملاحظات در نظر گرفته شده به منظور همگرایی کد عددی حل کننده معادله اور - سامرفلد، در سایر کارهای مشابه به طور مجتمع مشاهده نشده است و از این رو، این مساله یکی دیگر از نوآوریهای موجود در تحقیق پیش رو در زمینه دینامیک سیالات محاسباتی می باشد.

اما همانطور که گفته شد در این پژوهش از روش e^N برای تعیین نقطه گذار جریان استفاده شده است. این روش که به روش اسمیت نیز معروف است اولین بار توسط اسمیت و گامبرونی [۹] و همچنین به طور مستقل توسط ون اینگن [۹] با عنوان روش e^9 در سال ۱۹۵۶ ارائه شد و بعدها به روش e^N تغییر نام پیدا کرد. در این روش با استفاده از توابع ویژه و مقادیر ویژه به دست آمده از حل معادله اور - سامرفلد، برای تعیین میزان رشد امواج اغتشاشی استفاده می شود. استوک و هاسه [۱۰] به بررسی مساله طراحی هوا بره های با جریان آرام و نقش گذار جریان در آن به کمک روش e^N پرداختند. آنها برای ارزیابی این روش از مقایسه نتایج خود با نتایج تجربی هوا بر DOAL3 بهره گرفتند. از جمله تحقیقات دیگر در این زمینه می توان به کارهای لیان و شای [۱۱]، بوتلییر و

حل های تحلیلی جریان غیر لزج استفاده می شود ولی در تحقیق پیش رو، پروفیل های سرعت از یک کد عددی حل کننده جریان لزج به دست می آیند.

مکانیزم فرآیند گذار در جریان های برشی محدود شونده با دیوار را می توان به صورت خلاصه در سه مرحله تشریح نمود [۱]. مرحله نخست، مرحله پذیرش و یا نفوذ اغتشاشات خارجی به داخل لایه مرزی در جریان آرام است. منشا این اغتشاشات ممکن است ناپایداریهای جریان آزاد، ناهمگنی، زبری سطوح، امواج صوتی منتشر شده در محیط یا ارتعاش جسم باشد. مرحله دوم، مرحله تقویت و رشد خطی اغتشاشات است که این مرحله سهم زیادی (حدود ۷۵ تا ۸۵ درصد) از فرآیند گذار را به خود اختصاص داده است [۲]. این اغتشاشات که به صورت موجی شکل هستند به احترام تولمین و شیلیختینگ که برای اولین بار وجود آنها را مطرح نمودند به نام «امواج تولمین - شیلیختینگ» نامگذاری شدند. این مرحله از فرآیند گذار توسط تئوری پایداری خطی مدل سازی شده و معادلات حاکم بر این اغتشاشات برای جریان های غیر قابل تراکم همان معادله اور - سامرفلد است. آخرین و مهمترین مرحله در فرآیند گذار جریان، مرحله تقویت غیر خطی اغتشاشات و بهم ریختگی جریان به حالت آشفته بوده که دارای ویژگی های مهمی همچون سه بعدی بودن و سریع رخ دادن است. در این مرحله اغتشاشات تا دامنه بزرگی رشد نموده و با همدیگر تداخل می کنند. مرحله رشد غیر خطی اغتشاشات تا آشفته شدن کامل جریان ادامه خواهد داشت.

اولین حل های ارائه شده برای معادله اور - سامرفلد برای امواج اغتشاشی ناپایدار دو بعدی در لایه مرزی بلازیوس به صورت تحلیلی توسط تولمین در سال ۱۹۲۹ و شیلیختینگ در سال ۱۹۳۳ انجام شد [۲]. از آن پس، معادله اور - سامرفلد با متدهای پیشرفته محاسبات عددی به کمک کامپیوتر و عمدتاً به دو روش تفاضل محدود و روش بسط طیفی حل شد [۲]. در روشهای تفاضل محدود معادله اور - سامرفلد ابتدا با کاهش مرتبه به تعدادی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول تبدیل می گردد و سپس با استفاده از گسسته سازی معادلات اخیر به کمک تقریبهای مشتق، آن معادلات یک دستگاه خطی از معادلات را تشکیل می دهند [۳]. الگوریتم های مختلفی برای حل معادله از طریق این روش وجود دارد. جوورینسون [۴] با به کارگیری این روش و استفاده از یک الگوریتم تکرار شونده از روش پرتابی، حل دقیقی برای معادله اور - سامرفلد برای جریان بر روی یک صفحه تخت ارائه نمود. وی با فرض موازی بودن جریان از پروفیل سرعت بلازیوس در

یاریسویج [۱۲] و همچنین آروموگام و دورایراج [۱۳] اشاره کرد که در پیش‌بینی گذار برای جریان بر روی هواپرها از روش e^N استفاده کردند.

معادلات حاکم برای حل جریان

معادلات حاکم بر جریان عبوری حول هواپر معادلات ناویر-استوکس دوبعدی تراکم پذیر هستند و مدل آشفتگی به کار رفته در کد عددی، مدل جبری لزجت گردابه‌ای بالدوین-لوماکس محاسبه می‌باشد. این مدل که یک مدل شناخته شده و رایج در زمینه آیرودینامیک است، یک مدل دولایه‌ای است که بر مبنای طول اختلاط پراتنل بنا نهاده شده است [۱۴].

روش عددی استفاده شده برای حل معادلات حاکم بر جریان روش TVD است که معادلات مزبور را به روش ضمنی حل می‌کند. روشهای عددی TVD یا تغییرات کل از بین رونده، به روش‌هایی گفته می‌شود که در آنها تغییرات کل حل هر جواب فیزیکی قابل قبول با افزایش زمان در فضای حل به تدریج کم و محو می‌شود. از نقطه نظر تقریب تفاضل محدود، از روش‌های TVD متقارن و بالادست استفاده شد که توسط بی [۱۵] برای حل جریان لزج ارائه شده‌اند و توسط صداقت [۱۴] اصلاح گشته‌اند. شرایط اولیه مورد نیاز کلیه پارامترها برای حل جریان برابر مقادیر جریان آزاد آنها منظور شده‌اند. شبکه‌بندی استفاده شده حول هواپر یک شبکه C-شکل هذلولوی است که توسط یک تولید کننده شبکه جبری ایجاد می‌گردد. فاصله مرزهای این شبکه تا سطح هواپر در حدود ۱۰ تا ۱۵ برابر طول وتر هواپر است. همچنین تمرکز نقاط شبکه با دور شدن از نزدیکی سطح هواپر کاهش مییابد.

تحلیل پایداری جریان

در این پژوهش تحلیل پایداری جریان به کمک تئوری پایداری خطی صورت می‌پذیرد. همانطور که گفته شد با اعمال تئوری پایداری خطی به معادلات ناویر-استوکس، معادله اور - سامرفلد حاصل می‌شود که توسط آن می‌توان تغییرات و رشد و نمو امواج تولمین - شیلیختینگ را تحلیل و پیش‌بینی نمود. معادله اور - سامرفلد در واقع تقریبی از معادلات حاکم بر رشد یا زوال دامنه یک اغتشاش دوبعدی در جریان‌های موازی است که از معادلات ناویر - استوکس اغتشاشی شده به کمک مولفه‌های لحظه‌ای سرعت و فشار به دست می‌آید. برای این کار مرسوم است که از یک تابع جریان اغتشاشی که به صورت زیر تعریف می‌گردد، استفاده شود:

$$\psi(x, y, t) = \phi(y) \exp[i(\alpha x - \omega t)] \quad (1)$$

که در معادله فوق $\omega = \omega_r + i\omega_i$ فرکانس زاویه‌ای یک موج اغتشاشی و $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ عدد موج اغتشاش است. عدد موج با رابطه $\alpha = 2\pi/\lambda$ به طول موج λ مربوط می‌شود. با استفاده از تابع جریان اغتشاشی در معادلات ناویر-استوکس اغتشاشی شده و بی‌بعد سازی، یک معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم برای متغیر مختلط دامنه اغتشاش ϕ به شکل زیر بدست می‌آید که اولین بار به طور مستقل توسط اور در سال ۱۹۰۷ و سامرفلد در سال ۱۹۰۸ ارائه شد که به احترام آنها به معادله اور-سامرفلد معروف است [۲]:

$$(u-c)(D^2 - \alpha^2)\phi - \frac{d^2 u}{dy^2}\phi = \frac{-i}{\alpha \text{Re}}(D^4 - 2\alpha^2 D^2 + \alpha^4)\phi \quad (2)$$

در معادله فوق $D = \frac{d}{dy}$ اپراتور مشتق است که y فاصله هر نقطه از دیواره در جهت عمود می‌باشد. باید توجه داشت که برای بی‌بعد سازی معادله اور-سامرفلد از کمیت‌های سرعت جریان آزاد U_∞ و طول مشخصه ضخامت جابجایی لایه مرزی δ^* استفاده شده است. بنابراین عدد رینولدز در محاسبات مربوط به تحلیل پایداری مطابق رابطه $\text{Re} = \frac{U_\infty \delta^*}{\nu}$ تعیین می‌گردد. همچنین متغیرهای دیگر نیز به صورت زیر بی‌بعد شده‌اند که متغیرهای ستاره‌دار متغیرهای فیزیکی دارای بعد هستند:

$$\alpha = \alpha^* \delta^*, \quad \omega = \frac{\omega^* \delta^{*2}}{U_\infty^*}, \quad c = \frac{c^*}{U_\infty^*} \quad (3)$$

پارامتر c نیز که بصورت $c = c_r + ic_i$ تعریف می‌شود، سرعت مختلط فاز انتقال اغتشاش است. همچنین شرایط مرزی برای حل معادله اور-سامرفلد برای جریان بر روی یک صفحه تخت و همچنین جریان عبوری حول یک هواپر عبارتند از:

$$\begin{aligned} y=0; \quad \phi=0, \quad \phi'=0 \\ y \rightarrow \infty; \quad \phi=0, \quad \phi'=0 \\ (D+\sigma)(D+\alpha)\phi=0 \\ y=\delta; \quad (D+\sigma)(D^2-\alpha^2)\phi=0 \end{aligned} \quad (4)$$

حل عددی معادله اور - سامرفلد

برای حل معادله اور-سامرفلد در یک جریان خاص نیاز به پروفیل‌های سرعت جریان و مشتق دوم آن درون لایه مرزی $u(y)$ و $u''(y)$ ، در راستای عمود بر سطح و در هر مقطع در امتداد جریان می‌باشد. موارد ذکر شده از حل جریان آرام توسط کد عددی TVD به دست می‌آیند. الگوریتم حل عددی معادله اور-سامرفلد برگرفته از مرجع [۳] شامل تعریف یک سری متغیر جدید می‌باشد که با استفاده از آنها می‌توان معادله مرتبه چهارم اور-سامرفلد را به چهار معادله دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل کرد. گسسته‌سازی مجموعه

که در روابط اخیر $\delta Re = Re - Re_0$ بوده و زیرنویس صفر نمایانگر مقادیر پارامترها در Re_0 است.

روش e^N

در این پژوهش تعیین نقطه گذار جریان با استفاده از روش e^N انجام شده است. در این روش با استفاده از توابع ویژه و مقادیر ویژه بدست آمده از حل معادله اور-سامرفلد، برای تعیین میزان رشد امواج اغتشاشی استفاده می‌گردد. با توجه به اینکه در این روش به دنبال مکان آغاز گذار جریان هستیم و همچنین دامنه اغتشاش امواج ناپایدار در یک نقطه خاص مستقل از زمان است بنابراین به نتایج تحلیل پایداری مکانی از حل معادله اور-سامرفلد نیاز است [۲]. فرض اساسی در این روش این است که گذار هنگامی رخ می‌دهد که دامنه اغتشاشات کوچکی که در ناحیه پایداری خنثی وجود دارند، در ناحیه گذار با ضریب e^N تقویت شوند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{|\psi|_{tr}}{|\psi|_{ne}} = e^N \quad (6)$$

که زیرنویس‌های tr و ne به ترتیب بیانگر نقطه گذار (transition) و نقطه‌ای روی منحنی پایداری خنثی با $\alpha_i = 0$ (neutral) هستند. حال با انجام یک سری عملیات جبری به رابطه‌ی زیر برای تعیین ضریب تقویت، N ، خواهیم رسید:

$$N = \int_{x_{ne}}^x -\alpha_i(\omega) dx \quad (7)$$

باید توجه داشت که محاسبه N برحسب x را باید در در یک فرکانس ثابت انجام داد. پس از آن می‌بایست مقادیر N برحسب x را در چندین فرکانس رسم نمود و در آن نمودار یک پوش ماکزیمم بر روی منحنی‌های مزبور رسم گردد که این پوش ماکزیمم در واقع مربوط به مقادیر بیشینه نرخ‌های تقویت ناپایداری هستند. محلی که در آن، مقدار N پیش فرض برای گذار، پوش ترسیم شده را قطع کند، محل نقطه گذار جریان است [۲]. باید دانست که مقدار پیش فرض N برای گذار از داده‌های تجربی تعیین می‌شود و برای هر نوع جریان، دارای یک مقدار خاص است. برای جریان بر روی یک صفحه تخت، از آزمایشات شوبائر و اسکرامستاد [۱] در یک تونل باد دارای شدت آشفتگی جریان آزاد کم ($Tu < 0.1\%$) ثابت شده است که ناحیه گذار به ازای مقادیر $N=8$ تا $N=10$ رخ می‌دهد. همچنین برای جریان حول هواپره‌های دوبعدی نیز برای شدت آشفتگی $Tu < 0.1$ معمولاً از مقدار $N=9$ برای پیش‌بینی نقطه گذار جریان استفاده می‌شود [۱۶، ۱۷].

معادلات به‌دست آمده در ناحیه حل منجر به تبدیل آن معادلات به یک دستگاه معادلات ماتریسی می‌گردد که ماتریس ضرایب آن یک ماتریس سه قطری بلوکی است. دستگاه معادلات مزبور همگن هستند و همچنین با توجه به همگن بودن شرایط مرزی آنها در جریان‌های مورد مطالعه، جواب‌های معادله نسبت به هم وابسته خطی به‌دست می‌آیند. در نتیجه حل معادله اور-سامرفلد به حل یک مسأله مقدار ویژه تبدیل می‌گردد. برای یافتن جواب غیر همگن یا همان جواب فیزیکی مسأله باید یکی از شرایط مرزی همگن را با یک شرط مرزی غیر همگن جایگزین کرد. سپس باید در حل دستگاه معادلات غیرهمگن جدید به دنبال محاسبه عبارت‌هایی باشیم که به ازای آنها شرط مرزی اصلی حذف شده برقرار گردد. این کار با استفاده از یک فرآیند جستجوگر تکرار شونده بر مبنای روش نیوتون انجام می‌شود.

با توجه به مجموعه معادله ۲ و شرایط مرزی ۴ می‌توان گفت که حل دستگاه معادله ماتریسی یاد شده به سه پارامتر ω ، α و Re بستگی دارد. با در نظر گرفتن اینکه α و ω کمیت‌های مختلط هستند، به مسأله‌ای با پنج مجهول مواجه می‌شویم که برای حل آن باید با تعیین مقادیر اولیه‌ای برای سه تا از آنها به دنبال یافتن دو مجهول باقیمانده باشیم. این کار باید در یک فرآیند تکرار به نحوی انجام شود که شرط مرزی محذوف برقرار گردد. در واقع باید از یک مرز شروع به حل کرد و به سمت مرز دیگر پیشروی نمود و مقدار شرط مرزی واقعی محذوف در آن مرز را محاسبه کرد و هنگامی که اختلاف مقدار محاسباتی آن با مقدار حقیقی بسیار کوچک گردد، در آن مرحله پاسخ معادله به اندازه کافی دقیق خواهد بود و حل عددی متوقف می‌شود [۳].

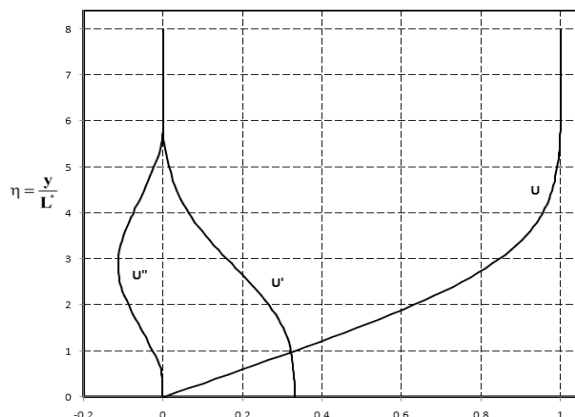
نکته دیگری که در حل عددی معادله اور-سامرفلد باید بدان اشاره گردد تمهیدی است که برای همگرایی سریع‌تر کد عددی به کار گرفته شده است. این کار به صورت تعیین رابطه‌ای برای محاسبه حدس اولیه پارامترهای مورد نیاز است. به عنوان نمونه در تحلیل پایداری مکانی هنگامی که در یک عدد رینولدز خاص Re_0 مقادیر ویژه معادله اور-سامرفلد بدست آمد، آنگاه برای تعیین مقادیر ویژه معادله اور-سامرفلد در یک عدد رینولدز جدید نیاز به حدس اولیه برای برخی پارامترها مانند α_r و ω_r می‌باشد. با بسط این پارامترها از طریق سری تیلور خطی حول Re_0 می‌توان حدس اولیه آن پارامترها را در عدد رینولدز جدید از طریق زیر محاسبه نمود:

$$\begin{aligned} \omega_r &= (\omega_r)_0 + \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial Re} \right)_0 \delta Re \\ \alpha_r &= (\alpha_r)_0 + \left(\frac{\partial \alpha_r}{\partial Re} \right)_0 \delta Re \end{aligned} \quad (8)$$

نتایج

تحلیل پایداری جریان بر روی یک صفحه تخت

پروفیل‌های سرعت جریان با فرض برقراری لایه مرزی بلازیوس بر روی صفحه تخت و با استفاده از حل‌های تشابهی تعیین شده‌اند. پروفیل سرعت جریان به همراه مشتقات اول و دوم آن در شکل ۱ آورده شده‌اند. منحنی‌های پایداری به دست آمده از تحلیل پایداری مکانی لایه مرزی بلازیوس برای کمیت‌های عدد موج α_r و فرکانس ω_r در شکل‌های ۲ و ۳ آورده شده‌اند.



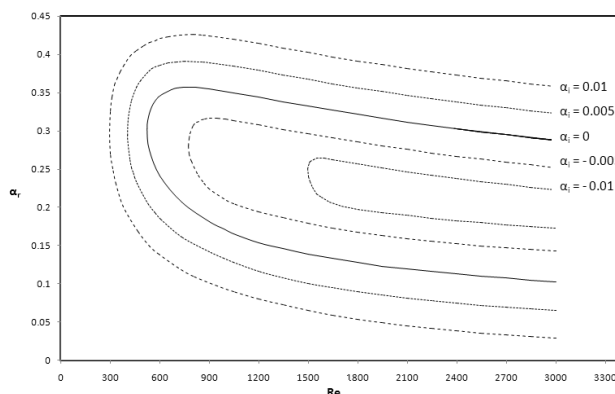
شکل ۱. پروفیل سرعت بلازیوس به همراه مشتقات اول و دوم آن

حل معادله اور- سامرفلد و تعیین مقادیر ویژه آن نشان می‌دهد که یک دامنه محدود برای عدد رینولدز به نام ناحیه ناپایدار وجود دارد که درون آن، اغتشاشات کوچک تقویت می‌شوند و منجر به ناپایداری جریان می‌گردند. در مقابل این ناحیه، ناحیه پایدار قرار دارد که در آن اغتشاشات میرا شده و از بین خواهند رفت. مرز این دو ناحیه نیز به نام «منحنی پایداری خنثی» نامیده می‌شود (منحنی وسط در شکل‌های ۲ و ۳ با $\alpha_i=0$). همانطور که در هر دو شکل ۲ و ۳ دیده می‌شود کمترین عدد رینولدزی که روی منحنی پایداری خنثی قرار می‌گیرد برابر ۵۲۰ است. این نقطه در واقع کوچکترین عدد رینولدزی را نشان می‌دهد که در آن، اغتشاشات میرا نمی‌شوند. در واقع، از این نقطه به بعد، اغتشاشات کوچک ایجاد شده - که همان موج‌های دو بعدی تولمین - شیلیختینگ هستند - تدریجاً تقویت شده و به گردابه‌های سه بعدی کاملاً ناپایدار تبدیل می‌گردند. باید در نظر داشت که این نقطه نباید با نقطه تحول به حالت آشفتگی که عدد رینولدز بالاتری دارد و در ادامه تعیین خواهد شد، اشتباه گرفته شود. به دلیل تطابق کامل منحنی‌های پایداری لایه مرزی بلازیوس با نتایج افراد دیگر [۴]، مقایسه نتایج اخیر روی شکل صورت نگرفته است. بلکه این کار در چندین عدد رینولدز برای پایداری خنثی در جدول ۱ انجام شده است.

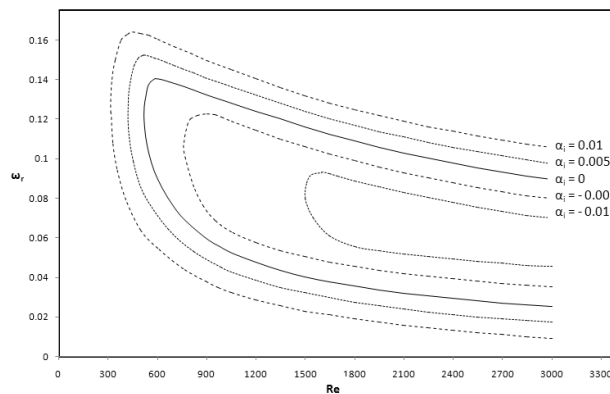
جدول ۱. مقایسه نتایج کد حاضر با مرجع [۴] برای دو کمیت عدد موج و فرکانس اغتشاشی در تحلیل پایداری جریان بر روی صفحه تخت

Re	α_r		ω_r	
	Present	Jordinson[4]	Present	Jordinson[4]
2600 (up)	0.297286	0.2973	0.094736	0.0947
1400 (up)	0.335813	0.3359	0.118493	0.1185
850 (up)	0.354720	0.3547	0.135104	0.1352
520	0.301189	0.3012	0.119323	0.1193
750 (low)	0.204134	0.2041	0.071120	0.0711
1150 (low)	0.158945	0.1590	0.049386	0.0495
1800 (low)	0.127604	0.1276	0.035527	0.0355

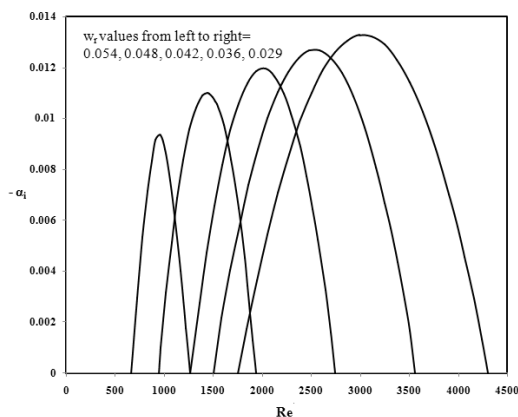
همچنین تاریخچه همگرایی کد عددی حل کننده معادله اور- سامرفلد برای یک حالت خاص با عدد رینولدز $Re=1350$ و $\alpha_i=-0.005$ در جدول ۲ آورده شده است. حدس‌های اولیه در این حالت از مقادیر α_r و ω_r مربوط به حالت پایداری خنثی در نظر گرفته شده‌اند. در صورتی که حدس اولیه برای این عبارت‌ها از روابط ۵ تعیین گردد، روند همگرایی سرعت بیشتری پیدا خواهد کرد. برای این حالت خاص، می‌توان منحنی تابع ویژه دامنه اغتشاش، ϕ ، را نیز در شکل ۴ مشاهده نمود.



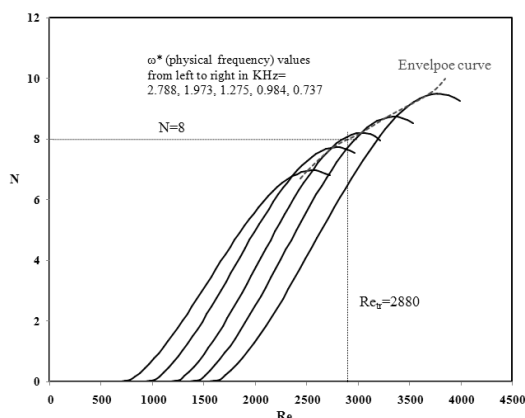
شکل ۲. منحنی‌های عدد موج، جریان بر روی صفحه تخت



شکل ۳. منحنی‌های فرکانس اغتشاشی، جریان بر روی صفحه تخت



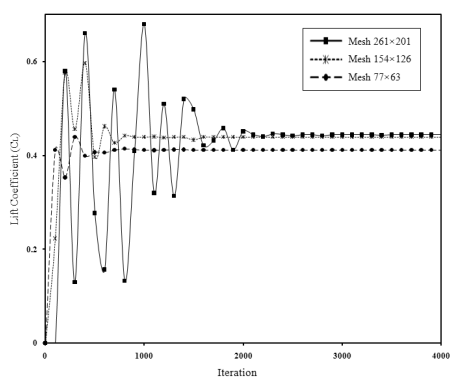
شکل ۵. منحنی های نرخ تقویت ناپایداری مکانی $-\alpha_i$ در تحلیل پایداری جریان بر روی یک صفحه تخت



شکل ۶. مقادیر نرخ تقویت برای جریان بر روی یک صفحه تخت

جریان عبوری حول هواپر NACA0012

حل جریان حول هواپر NACA0012 توسط کد عددی TVD انجام شد و پروفیل های مورد نیاز ذخیره شدند. شبکه بندی استفاده شده در کد مزبور یک شبکه سازمان یافته C- شکل هذلولوی بوده که برای اطمینان یافتن از استقلال نتایج نسبت به شبکه انتخاب شده، مطالعه شبکه و انتخاب شبکه بهینه صورت پذیرفت. نتایج مطالعه شبکه برای ضریب برآ حول هواپر NACA0012 با عدد رینولدز $Re = 2.88 \times 10^6$ عدد ماخ $M = 0.16$ و زاویه حمله $\alpha = 4^\circ$ برای سه شبکه مختلف 63×77 ، 126×154 و 201×261 در شکل ۷ آورده شده اند.



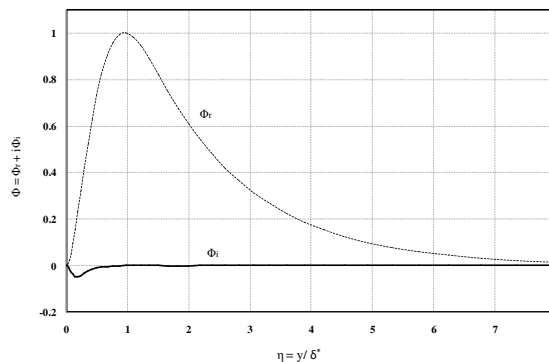
شکل ۷. نتایج مطالعه شبکه (مقادیر ضریب برآ)

جدول ۲. تاریخچه همگرایی کد حل کننده معادله اور- سامرفلد

برای جریان بر روی صفحه تخت با $Re=1350$, $\alpha_i = -0.005$

Iteration	α_r	ω_r
0 (initial guess)	0.146	0.044
1	0.1683507	0.0492448
2	0.1774482	0.0528803
4	0.1859338	0.0539211
6	0.1861193	0.0535993
8	0.1861205	0.0535967
10	0.1861214	0.0535953
12	0.1861214	0.0535957
14	0.1861214	0.0535957
Jordinson[4]	0.1861	0.0536

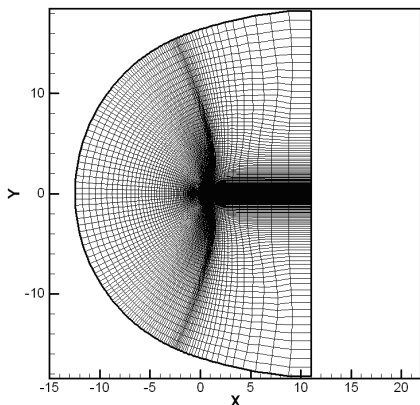
در نهایت با استفاده از روش e^N نقطه گذار برای جریان بر روی صفحه تخت تعیین شد. ابتدا به حل معادله اور- سامرفلد برای تحلیل پایداری مکانی ($\omega_i = 0$) با هدف تعیین دو پارامتر α_r و α_i از طریق مقداردهی به دو کمیت ω_r و Re پرداخته شد.



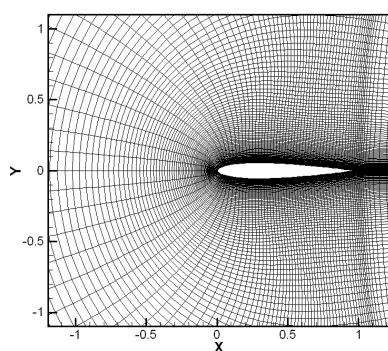
شکل ۴. منحنی تابع ویژه دامنه اغتشاش برای جریان بر روی صفحه

تخت با $Re=1350$, $\alpha_i = -0.005$

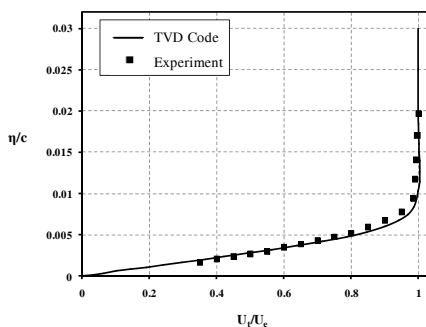
شکل ۵ تغییرات مقادیر نرخ تقویت ناپایداری مکانی ($-\alpha_i$) نسبت به مشخصه مکانی جریان را در چند فرکانس ثابت نشان می دهد. پس از آن با انتگرال گیری از مقادیر نرخ تقویت ناپایداری مکانی نسبت به x مطابق رابطه ۷، مقادیر پارامتر N محاسبه شد. باید توجه داشت که مقادیر نمایش داده شده برای فرکانس اغتشاشی در منحنی های شکل ۵ مقادیر بدون بعد هستند که مقادیر فیزیکی متناظر آنها از رابطه ۳ محاسبه شده اند و در شکل ۶ نمایش داده شده اند. در ادامه همانگونه که پیشتر نیز ذکر شد می بایست مقادیر N بر حسب x در چندین فرکانس رسم شده و در آن نمودار، یک پوش ماکزیمم بر روی آن منحنی ها ترسیم گردد. این کار نیز در شکل ۶ انجام شده است که با فرض رخداد گذار به ازای $N=8$ محل گذار را در $Re_{tr,\delta^*} = 2880$ که متناظر با $Re_{tr,x} = 2.8 \times 10^6$ است، پیش بینی می کند.



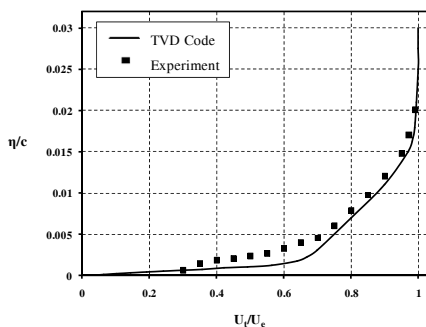
شکل ۸ - الف. نمای کلی از شبکه C- شکل حول هواپرواز



شکل ۸ - ب. نمای نزدیک از شبکه C- شکل حول هواپرواز



شکل ۹. پروفیل سرعت آرام در مقطع $x/c = 0.253$



شکل ۱۰. پروفیل سرعت آشفتنه در مقطع $x/c = 0.698$

از این نمودار که نشان‌دهنده تاریخچه همگرایی جریان در طول زمان (از حالت غیر دائم به حالت دائم) می‌باشد، مشاهده می‌شود که ضریب برآ برای دو شبکه 154×126 و 261×201 دارای مقادیر بسیار نزدیک به هم هستند در حالیکه برای شبکه 77×63 اختلاف زیادی وجود دارد. این مساله که به طرز مشابه در نمودارهای ضریب پساو ضریب فشار نیز ملاحظه می‌گردد (ارائه نشده در این مقاله) پیشنهاد می‌کند که شبکه 154×126 به عنوان شبکه بهینه برای حل جریان انتخاب گردد. لیکن از آنجایی که برای حل معادله اور - سامرفلد به پروفیل‌های سرعت جریان و مشتقات آن درون لایه مرزی نیاز است، می‌بایست از دقت حل عددی در ناحیه درونی لایه مرزی نیز اطمینان حاصل نمود. در جدول ۳ تعداد نقاطی از شبکه که در راستای عمود بر سطح در درون لایه مرزی قرار می‌گیرند برای سه شبکه مختلف آورده شده‌اند. همانطور که از این جدول ملاحظه می‌گردد تقریباً یک پنجم نقاط شبکه در هر مقطع درون لایه مرزی قرار می‌گیرند و بقیه نقاط در خارج آن واقع می‌شوند. از آنجایی که به نظر می‌آید تعداد نقاط درون لایه مرزی مربوط به شبکه بهینه (شبکه 154×126) برای ایجاد پروفیل‌های با دقت بالا کافی نباشد، لذا از تمرکز دادن نقاط شبکه به سمت دیواره با ضریب کشسانی کمتر استفاده شد تا تعداد نقاط بیشتری در درون لایه مرزی قرار گیرند. نتایج مربوط به این حالت نیز در همان جدول ۳ ارائه شده است. نمونه‌ای از این شبکه بندی حول هواپرواز را می‌توان در شکل ۸- الف مشاهده نمود. همچنین در شکل ۸- ب نمایشی از شبکه ذکر شده در نزدیکی سطح هواپرواز ارائه شده است.

جدول ۳. تعداد نقاط شبکه در درون لایه مرزی در سه مقطع بر روی سطح بالای هواپرواز برای سه شبکه بندی مختلف

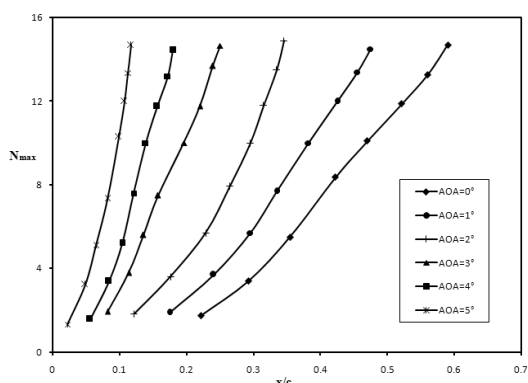
Mesh	Number of mesh points in the boundary layer			
	$x/c=0.115$	$x/c=0.491$	$x/c=0.932$	
High	77×63	11	12	14
Stretch	154×126	22	24	27
Factor	261×201	38	40	43
Low	77×63	21	23	26
Stretch	154×126	40	42	46
Factor	261×201	75	78	83

در شکل‌های ۹ و ۱۰ پروفیل‌های سرعت در دو مقطع 0.253 و 0.698 با مقادیر $AOA=0^\circ$ و $M=0.16$ ، $Re=2.88 \times 10^6$ نمایش داده شده‌اند. مقایسه پروفیل‌های سرعت کد حاضر با پروفیل‌های سرعت حاصل از نتایج تجربی مرجع [۱۸] نیز بر روی این دو شکل انجام شده است که تطابق خوبی بین نتایج کد عددی حاضر و نتایج تجربی مشاهده می‌گردد.

جدول ۴. نتایج روش e^N در تعیین نقطه گذار برای جریان حول هوابر NACA0012 و مقایسه با مقادیر تجربی [۱۹]

AOA(deg)	$X_{tr}(upper\ surface)$		$X_{tr}(lower\ surface)$	
	$e^N\ Code$	[exp[19]	$e^N\ Code$	[exp[19]
۰	۰.۴۳۶	۰.۴۵	۰.۴۳۶	۰.۴۵
۱	۰.۳۶۲	۰.۳۷	۰.۵۵۰	۰.۵۶
۲	۰.۲۷۴	۰.۲۹	۰.۶۰۸	۰.۶۲
۳	۰.۱۸۱	۰.۱۹	۰.۶۵۳	۰.۶۶
۴	۰.۱۲۶	۰.۱۲	۰.۷۰۱	۰.۷۰
۵	۰.۰۹۱	۰.۰۷۶	۰.۷۳۴	۰.۷۴
۶	۰.۰۶۴	۰.۰۵۱	۰.۸۰۲	۰.۸۲
۷	۰.۰۴۹	۰.۰۳۶	۰.۸۷۷	۰.۸۹
۸	۰.۰۲۴	۰.۰۱۸	0.957	0.98
AOA>8	leading edge		trailing edge	

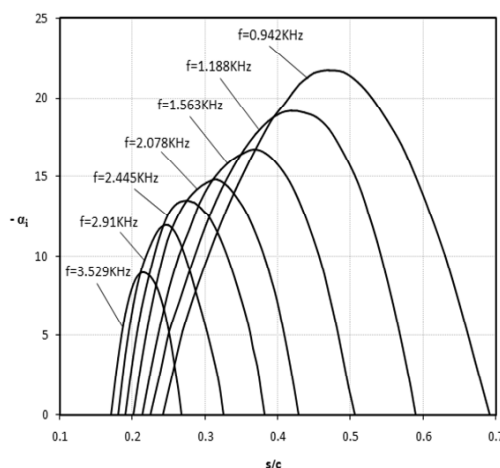
همانطور که در جدول ۴ نیز دیده می‌شود با افزایش زاویه حمله، نقطه گذار روی سطح بالایی هوابر به سمت بالادست جریان منتقل می‌شود. این روند تا زاویه حمله ۸ درجه ادامه دارد و برای زوایای حمله بیشتر از آن می‌توان به طور تقریبی کل جریان روی سطح بالای هوابر را دارای رژیم آشسته فرض کرد. این روند در شکل ۱۳ نیز نشان داده شده است. در این شکل مقادیر بیشینه پارامتر N در شش زاویه حمله مختلف برای $Re=2.88 \times 10^6$ و $M=0.16$ بر روی سطح بالای هوابر آورده شده اند.



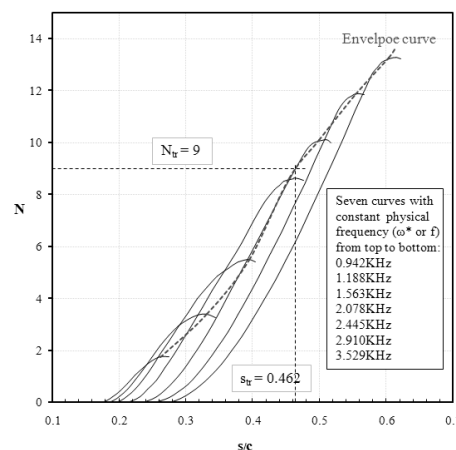
شکل ۱۳. بررسی تاثیر افزایش زاویه حمله بر موقعیت نقطه گذار جریان بر روی سطح بالای هوابر NACA0012 (منحنی های N_{max})

مقادیر N_{max} نمایش داده شده در شکل ۱۳ در واقع مقادیر ماکزیمم ضریب تقویت در هر فرکانس ثابت می‌باشند. به بیانی دیگر این منحنی ها در حقیقت همان پوش‌های ماکزیممی هستند که در معرفی روش e^N در مورد آنها بحث شد. از این نمودارها نیز به خوبی می‌توان انتقال نقطه گذار به بالادست جریان با افزایش زاویه حمله بر روی سطح بالایی هوابر را ملاحظه نمود.

پس از حل جریان با استفاده کد TVD-حاضر و تعیین پارامترهای مورد نیاز برای حل معادله اور-سامرفلد، به تحلیل پایداری جریان و تعیین نقطه گذار برای جریان عبوری حول هوابر NACA0012 با همان عدد رینولدز، عدد ماخ و زاویه حمله ذکر شده، پرداخته شد. شکل ۱۱ تغییرات مقادیر نرخ تقویت ناپایداری مکانی ($-\alpha_i$) نسبت به عدد رینولدز را در چند فرکانس فیزیکی ثابت نشان می‌دهد. همچنین با استفاده از روش e^N نقطه گذار بر روی سطح بالای هوابر تعیین شد که با فرض مقدار $N=9$ محل گذار در $x_{tr}=0.436$ پیش‌بینی شده است (شکل ۱۲).



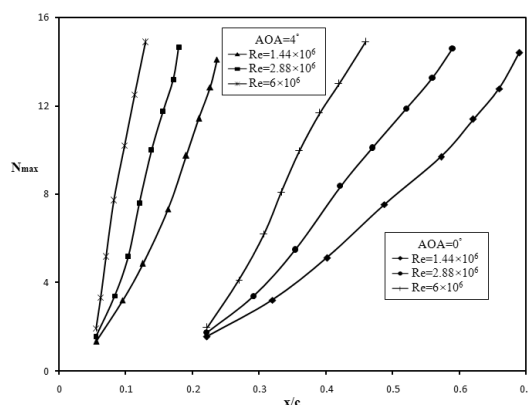
شکل ۱۱. منحنی های نرخ تقویت ناپایداری مکانی، $-\alpha_i$ ، تحلیل پایداری جریان حول هوابر NACA0012



شکل ۱۲. تعیین نقطه گذار برای جریان حول هوابر NACA0012 در $AOA=0^\circ$ و $Re=2.88 \times 10^6$, $M=0.16$

تعیین گذار جریان حول هوابر NACA0012 در چندین زاویه حمله دیگر نیز انجام شد که نتایج حاصل از آنها در جدول ۴ آورده شده‌اند. در این جدول همچنین ارزیابی روش e^N از طریق مقایسه نتایج حاصل از آن با نتایج تجربی مرجع [۱۹] انجام شده است که این مقایسه حاکی از موفقیت این روش در تعیین گذار برای جریان حول هوابرها است.

تأثیر عدد رینولدز بر نقطه گذار جریان در شکل ۱۴ ارائه شده است. در این شکل نتایج تحلیل پایداری جریان برای سه عدد رینولدز مختلف 1.44×10^6 ، 2.88×10^6 و 6×10^6 برای جریان حول هواپر NACA0012 با عدد ماخ $M=0.16$ و در دو زاویه حمله 0° و 4° درجه مشاهده می‌شوند. همانگونه که از این شکل مشخص است برای هر دو زاویه حمله یاد شده، با افزایش عدد رینولدز، نقطه گذار جریان به سمت بالادست انتقال می‌یابد. علت این موضوع نیز در این است که با افزایش عدد رینولدز، گردابه‌های جریان با سرعت و انرژی بیشتری در طول جریان منتشر می‌شوند و به همین خاطر باعث تقویت زود هنگام اغتشاشات جریان در فاصله کمتری از لبه حمله می‌گردند. اثر دیگری که افزایش عدد رینولدز بر پایداری جریان می‌گذارد، افزایش مقادیر N_{max} است که این موضوع را نیز می‌توان در شکل ۱۴ مشاهده نمود.



شکل ۱۴. بررسی تأثیر افزایش عدد رینولدز بر موقعیت نقطه گذار جریان بر روی سطح بالای هواپر NACA0012 (منحنی‌های N_{max})

نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

تعیین موقعیت آغاز گذار جریان از رژیم آرام به آشفتنه در جریان‌های دوبعدی با استفاده از روش e^N در این پژوهش انجام شد. این امر از طریق تحلیل پایداری هیدرودینامیکی جریان به وسیله حل معادله اور-سامرفلد صورت پذیرفت. پروفیل‌های سرعت مورد نیاز برای حل معادله اور-سامرفلد از طریق یک کد عددی محاسبه شدند که کد ذکر شده معادلات ناویر-استوکس دوبعدی را به روش ضمنی از طریق الگوریتم TVD حل می‌کند. همچنین در تحقیق حاضر برای حل معادله اور-سامرفلد از روش تفاضل محدود استفاده شده است که به دلیل وابستگی شدید روش ذکر شده به حدس اولیه، تمهیداتی نظیر استفاده از روش تکرار نیوتن برای حل دستگاه‌های غیر خطی و همچنین تعیین رابطه‌ای برای محاسبه حدس اولیه پارامترهای مورد نیاز در یک نقطه محاسباتی خاص از روی پاسخ معادله اور-سامرفلد برای همان پارامترها در

نقطه محاسباتی قبلی به کار گرفته شده است. در بخش نخست این پژوهش، حل معادله اور-سامرفلد برای جریان بر روی یک صفحه تخت با فرض برقراری لایه مرزی بلازیوس صورت پذیرفت که از مقایسه نتایج آن با نتایج افراد دیگر می‌توان از درستی حل‌های انجام شده اطمینان حاصل کرد. سپس این امر برای جریان حول هواپر NACA0012 در دامنه وسیع‌تری از زوایای حمله و اعداد رینولدز انجام شد. برای ارزیابی کد e^N ، نتایج حاصل از آن برای تعیین گذار جریان حول هواپر NACA0012 با نتایج تجربی مقایسه شده است که این مقایسه حاکی از موفقیت این کد در تعیین گذار برای جریان حول هواپرها بوده است. از مهمترین نتایجی که در مطالعه پارامترهای موثر بر گذار جریان حاصل شد می‌توان دو مورد را ذکر نمود. یکی اینکه با افزایش زاویه حمله جریان، محل نقطه گذار بر روی سطح فوقانی هواپر به سمت بالادست جریان (نزدیکی لبه حمله) انتقال پیدا می‌کند. مورد دیگر اینکه با افزایش عدد رینولدز جریان نیز باز هم می‌توان شاهد انتقال موقعیت نقطه گذار به سمت بالادست جریان بود.

پی‌نوشت

۱. تغییرات کل از بین رونده (total variation diminishing)

مراجع

- White, F.M., *Viscous Fluid Flow*, McGraw Hill Press, 1991.
- Drazin, P.G., and Reid, W.H., *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press, 1981.
- Cebeci, T., Shao, J.P., Kafyke, F., and Laurendeau, E., *Computational Fluid Dynamics for Engineers*, Horizons Publishing, California, 2005.
- Jordinson, R., "The Flat Plate Boundary Layer, Part1: Numerical Integration of the Orr-Sommerfeld Equation", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 43, 1970, pp. 801-811.
- Orszag, S.A., "Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 50, 1971, pp. 689-703.
- Ng, B.S., and Reid, W.H., "On the Numerical Solution of the Orr-Sommerfeld Problem: Asymptotic Initial Conditions for Shooting Methods", *Journal of Computational Physics*, Vol. 38, 1980, pp. 275-293.
- Marusic, I., Tang, B., Rumchik, C., and Chinniah, R., "Stability Analysis of a Cylinder Wake", University of Minnesota, Pub.AEM 8211, 2001.
- Georgievskii, D.V., Muller, W.H., and Abali, B.E., "Eigenvalue Problems for the Generalized Orr-Sommerfeld Equation in the Theory of Hydrodynamic Stability", *Doklady Physics*, Vol. 56, No. 9, 2011, pp. 494-497.

- England, 1997.
15. Yee, H.C., "Construction of Explicit and Implicit Symmetric TVD Schemes and Their Applications", *Journal of Computational physics*, Vol. 68, 1987, pp. 151-179.
 16. Stock, H.W., "Airfoil Validation Using Coupled Navier-Stokes and e^N Transition Prediction Methods", *Journal of Aircraft*, Vol. 39, No. 1, 2002, pp. 51-58. 2012.
 17. Lee, J.D., and Jamesony, A., "NLF Airfoil and Wing Design by Adjoint Method and Automatic Transition Prediction", 27th AIAA Applied Aerodynamics Conference, Texas, 2009.
 18. Holst, T.L., "Viscous Transonic Airfoil Workshop Compendium of Results", *Journal of Aircraft*, Vol. 25, No. 12, 1988, pp. 1073-87.
 19. Gregory, N., and O'Reilly, C.L., "Low-Speed Aerodynamic Characteristics of NACA0012 Airfoil Section, Including the Effects of Upper-Surface Roughness Simulating Hoar Frost", TR, NPL Aero Rept. 1308, Middlesex, England, 1970.
 9. Van Ingen, J.L., "The e^N method for transition prediction, Historical review of work at TU Delft", 38th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit, Washington, 2008.
 10. Stock, H.W., and Haase, W., "Feasibility Study of e^N Transition Prediction in Navier-Stokes Methods for Airfoils", *AIAA Journal*, Vol. 37, No. 10, 1999, pp. 1187-96.
 11. Lian, Y., and Shyy, W., "Laminar-Turbulent Transition of A Low Reynolds Number Rigid or Flexible Airfoil", *AIAA Journal*, Vol. 45, No. 7, 2007, pp. 1501-13.
 12. Arumugam, S., and Durairaj, S., "Prediction of Laminar to Turbulent flow over a sweptback wing", 2nd International Conference on Mechanical and Aerospace Engineering, ICMAE, Bangkok, 2011.
 13. Boutilier, M.S.H., and Yarusevych, S., "Parametric Study of Separation and Transition Characteristics over an Airfoil at Low Reynolds Numbers", *Expirement in Fluids*, Vol. 52, 2012, pp. 1491-1506.
 14. Sedaghat, A., *A Finite Volume TVD Approach to Transonic Flow Computation*, PHD Thesis, University of Manchester,