

تحلیل اثر لقی بر ناپایداری بالواره دو درجه آزادی در جریان تراکم‌ناپذیر زیر صوت

سعید ایرانی^۱، سعید سازه^۲

دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۰۴/۱۲

پذیرش مقاله: ۱۳۹۲/۰۷/۲۱

چکیده

در این مطالعه از قابلیت تحلیل ارتعاشات اتفاقی برای یک سیستم آیروالاستیک غیرخطی استفاده می‌شود تا بتوان ناپایداری این سیستم غیرخطی را بدون ورود به حوزه زمان و استفاده از روش‌های عددی مرسوم و همچنین بدون بررسی نوسانات چرخه حد بررسی کرد. برای این منظور از یک بالواره دو درجه آزادی با عامل غیرخطی لقی تحت جریان شبه‌پایا استفاده می‌شود. در ابتدا فرض می‌گردد که علاوه بر نیروی برآ و ممان آیرودینامیکی یک نیروی اتفاقی به صورت نویز سفید و با تابع چگالی احتمال گوسین به بالواره غیرخطی وارد می‌گردد. با استفاده از روش خطی سازی آماری و آنالیز ارتعاشات اتفاقی سیستم‌های غیرخطی، معادله یک نگاشت غیرخطی یک بعدی برای واریانس پاسخ و سرعت جریان به دست می‌آید. از تحلیل این نگاشت یک معادله جبری غیرخطی شامل دو متغیر واریانس پاسخ و سرعت جریان ایجاد می‌گردد، و با حل این معادله برای سرعت‌های مختلف جریان، سرعت ناپایداری سیستم غیرخطی در نقطه واریانس بیشینه محاسبه می‌شود. در نهایت با تحلیل این معادله غیرخطی پدیده پرش در نمودار سرعت-واریانس در نقطه دوشاخگی مماسی بررسی می‌گردد.

کلید واژه

آیروالاستیسیته، فلاتر، لقی، روش اتفاقی، پدیده پرش.

مقدمه

بررسی رفتار دینامیکی سیستم‌های آیروالاستیک غیرخطی از موضوعات مورد مطالعه و پژوهش در چند دهه اخیر بوده است. در همین راستا تحلیل رفتار و ناپایداری بالواره‌های غیرخطی در جریان‌های مادون صوت یکی از بخش‌های این مطالعات است. اصولاً در مطالعات انجام شده در این حوزه دو روش بررسی انتخاب شده است. در روش اول سیستم آیروالاستیک غیرخطی در حوزه زمان و عموماً از طریق تکنیک‌های حل عددی بررسی می‌گردد و در روش دوم در حوزه فرکانس و از طریق آنالیز نوسانات چرخه حد، به تحلیل سیستم پرداخته می‌شود. حل‌های عددی به طور عمده شامل روش‌هایی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل سیستم غیرخطی در حوزه زمان می‌باشند و از آن جمله می‌توان به روش‌های تفاضل محدود [۱]، رانگ-کوتا [۲] و روش سیکلی اشاره کرد.

حل‌های تحلیلی و نیمه تحلیلی عموماً شامل تکنیک توابع

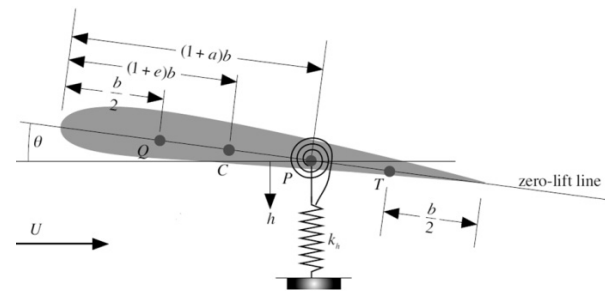
توصیف هستند. این تکنیک برای اولین بار به منظور بررسی ناپایداری سطح کنترلی یک بال با سختی غیرخطی به کار گرفته شد [۳]. بعدها پاسخ تحلیلی یک سیستم آیروالاستیک غیرخطی تحت تحریک بیرونی سینوسی به دست آمد [۴]. یکی از روش‌های دیگر بررسی سیستم آیروالاستیک غیرخطی استفاده از سیستم معادل و به کارگیری روش‌های تحلیل ناپایداری خطی برای سیستم خطی معادل بوده است [۵-۷].

در طول یک دهه گذشته روش‌هایی به منظور تحلیل سیستم‌های آیروالاستیک غیرخطی به کار گرفته شدند که از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به روش هارمونیک بالانس [۸]، هارمونیک بالانس بعد بالا [۹ و ۱۰]، هارمونیک بالانس افزایشی [۱۱]، هارمونیک بالانس بیضوی [۱۲]، روش سیکلی کاهش یافته [۱۳]، روش مینفولد مرکزی [۱۴]، روش اغتشاشات افزایشی [۱۵]، روش نقطه تبدیل [۱۶] و روش هوموتوبی [۱۷ و ۱۸] اشاره کرد. در بسیاری موارد نیز از ترکیب روش‌های ذکر شده و روش‌های حل عددی به صورت توامان استفاده شده است برای نمونه روش هارمونیک بالانس افزایشی و روش عددی

۱. استادیار، irani@kntu.ac.ir (نویسنده مخاطب)

۲. کارشناس ارشد، saeid.sazesh@yahoo.com

نیوتون-رافسون با یکدیگر تلفیق شده‌اند [۱۹]. در بررسی‌های جدیدتر نیز از دمپر معادل در ایرفویل‌های دارای سختی درجه سه به عنوان بخشی از آیرودینامیک مسئله استفاده شده است [۲۰] و یا در مطالعه دیگری با بهینه‌سازی روش هارمونیک بالانس افزایشی و ترکیب آن با مسئله کمینه‌سازی معادل، رفتار دینامیکی سیستم آیروالاستیک بررسی شده است [۲۱].



شکل ۱. نمای شماتیک بالواره دو درجه آزادی [۲۲]

$$\begin{cases} m\ddot{h} + mbx_\theta\dot{\theta} + k_h h = -[L + f(t)] \\ I_p\ddot{\theta} + mbx_\theta\dot{h} + k_\theta\theta = M_{1/4} \\ + b(0.5 + a)[L + f(t)] \end{cases} \quad (1)$$

که در آن گشتاور بازگرداننده $M(\theta)$ به صورت معادله (۲) و یا معادله (۳) می‌باشد و نمودار آن به صورت شکل (۲) می‌باشد.

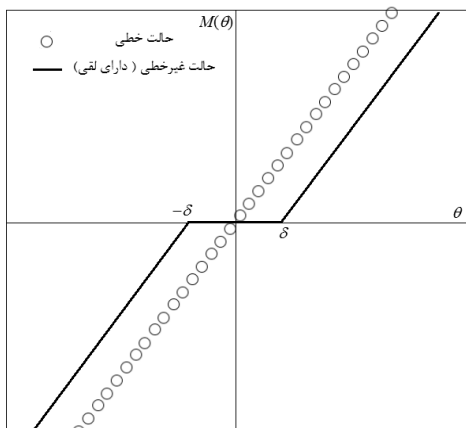
$$M(\theta) = \begin{cases} k_\theta(\theta - \delta) & \theta > \delta \\ 0 & -\delta < \theta < \delta \\ k_\theta(\theta + \delta) & \theta < -\delta \end{cases} \quad (2)$$

$$M(\theta) = k_\theta \left(\theta + \frac{1}{2} (|\theta - \delta| - |\theta + \delta|) \right) \quad (3)$$

برای جریان شبه‌پایا با سرعت U ، نیروی برآ و ممان آیرودینامیکی با استفاده از تئوری بالواره نازک تعریف می‌گردد [۲۳].

$$L = \pi\rho_\infty b^2 \left(\dot{h} + U\dot{\theta} - b\alpha\dot{\theta} \right) + 2\pi\rho_\infty bU^2 \left(\theta + \frac{\dot{h}}{U} + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \frac{\dot{\theta}}{U} \right) \quad (4)$$

$$M_{1/4} = -\pi\rho_\infty b^3 \left(\frac{1}{2} \dot{h} + U\dot{\theta} + b \left(\frac{1}{8} - \frac{a}{2} \right) \ddot{\theta} \right) \quad (5)$$



شکل ۲. گشتاور بازگرداننده پیچشی در حالت خطی و غیرخطی

در این مطالعه به معرفی یک روش جدید برای بررسی ناپایداری بالواره غیرخطی پرداخته می‌شود. در این راستا ابتدا با اضافه کردن یک نویز سفید به نیروی برآ، امکان بررسی مسئله در محیط ارتعاشات اتفاقی ایجاد می‌گردد. سپس از روش خطی سازی آماری، سیستم آیروالاستیک غیرخطی بر حسب واریانس پاسخ سیستم، خطی می‌شود. برای این منظور ابتدا یک ترم معادل خطی برای بخش غیرخطی سیستم در نظر گرفته شده و میانگین مربعات اختلاف بخش خطی معادل و بخش غیرخطی مینیمم می‌گردد. در نهایت سیستم بر حسب واریانس پاسخ، خطی شده و معادله یک نگاهت غیرخطی بر حسب واریانس پاسخ به دست می‌آید که در این نگاهت غیرخطی، پارامتر کنترل سرعت جریان می‌باشد. از حل این نگاهت، واریانس پاسخ سیستم بر حسب سرعت جریان به دست می‌آید و در نقطه بیشینه واریانس که نماینده بیشترین پراکندگی داده‌ها می‌باشد، سرعت فلاتر سیستم تعریف می‌گردد. از بررسی معادله غیرخطی جبری که از نگاهت غیرخطی یک بعدی به دست می‌آید، سرعت دوشاخگی سیستم در حالت غیرخطی لقی بررسی می‌گردد و سرعت جریانی که در آن پرش در نمودار سرعت واریانس اتفاق می‌افتد، محاسبه می‌گردد. مزیت استفاده از این روش، پرهیز از به کارگیری حل عددی معادلات دیفرانسیل غیرخطی و یا حتی به کار گرفتن روش‌های معمول آنالیز فلاتر می‌باشد که نه تنها فرآیند حل را ساده و سریع‌تر می‌کند بلکه می‌توان پدیده پرش را به وسیله نقطه دوشاخگی مماسی بررسی نمود.

معادلات حرکت

مدل نشان داده شده در شکل (۱)، یک ایرفویل دو درجه آزادی پیچشی و انتقالی می‌باشد. زاویه پیچش حول محور الاستیک با θ و حرکت انتقالی با h نشان داده می‌شود. نقاط Q ، C ، P و T به ترتیب مرکز آیرودینامیکی، مرکز جرم، مرکز الاستیک و نقطه $3/4$ وتر هستند. فنر انتقالی یک فنر خطی با سختی K_h و فنر پیچشی یک فنر دارای لقی با گشتاور بازگرداننده $M(\theta)$ می‌باشد. جرم ایرفویل با

$$E\{g_i q^T\} = E\{q^T q\} E\left\{\left[\frac{\partial g_i}{\partial q}\right]^T\right\} \quad (18)$$

$$K_i^e = E\left\{\frac{\partial g_i}{\partial q}\right\} \quad (19)$$

$$K_{ij}^e = E\left\{\frac{\partial g_i}{\partial q_j}\right\} \quad (20)$$

در روابط فوق، $E\{\cdot\}$ نمایانگر میانگیری آماری می‌باشد. با توجه به اینکه تحریک و پاسخ به صورت گوسین می‌باشد بنابراین رابطه (۲۰) به رابطه (۲۱) تبدیل خواهد شد:

$$K_{ij}^e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial g_i}{\partial q_j} e^{-\frac{(\theta-\theta_m)^2}{2\sigma_\theta^2}} d\theta \quad (21)$$

حال با در نظر گرفتن بردار غیرخطی $g(q)$ به صورت معادله (۱۱)، ماتریس سختی معادل K^e به صورت معادله (۲۲) به دست می‌آید.

$$K^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E\left\{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{k_\theta}{2}(|\theta-\delta|+|\theta+\delta|)\right)\right\} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -k_\theta \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{2\delta^2}{4\sigma_\theta^2}}\right) \end{bmatrix}$$

که در آن σ_θ^2 میانگین مربعات زاویه پیچشی و یا در حالی که میانگین پاسخ (θ_m) صفر باشد همان واریانس پاسخ پیچشی می‌باشد، همچنین تابع $\operatorname{erf}(\cdot)$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (23)$$

چنانچه مشخص است با استفاده از روش خطی سازی آماری، سیستم غیرخطی حول واریانس پاسخ، خطی شده است. حال با استفاده از تحلیل ارتعاشات اتفاقی، واریانس پاسخ، از روی سیستم خطی شده، نیز به دست می‌آید. برای این منظور ابتدا ماتریس پاسخ فرکانسی سیستم، به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$H(\omega) = \left[-[M]\omega^2 + [C]i\omega + [K + K^e]\right]^{-1} \quad (24)$$

در ادامه ماتریس چگالی طیفی تشکیل می‌شود.

$$S_{qq} = \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{h\theta} \\ S_{\theta h} & S_{\theta\theta} \end{bmatrix} = H^*(\omega) S_Q H^T(\omega) \quad (25)$$

در رابطه (۲۵)، S_Q تابع چگالی طیفی تحریک می‌باشد که با استفاده از نوع نیروی اتفاقی در نظر گرفته شده و رابطه (۱۰) به دست می‌آید. در صورتی که نیروی $f(t)$ نویز سفید باشد برای S_Q ماتریس ذکر شده در رابطه (۲۶) حاصل می‌گردد:

با جایگذاری معادلات (۲) تا (۵) در معادله (۱) خواهیم داشت:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq + g(q) = Q(t) \quad (6)$$

که در آن بردار q ، ماتریس‌های M ، C ، K ، بردار غیرخطی $g(q)$ و بردار نیروی $Q(t)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$M = \begin{bmatrix} m + \pi\rho_\infty b^2 & mbx_\theta - \pi\rho_\infty b^3 a \\ mbx_\theta - \pi\rho_\infty b^3 a & I_p + \pi\rho_\infty b^4 \left(\frac{1}{8} + a^2\right) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_h & 2\pi\rho_\infty bU^2 \\ 0 & -\pi\rho_\infty b^2 U^2 (2a+1) + k_\theta \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} h \\ \theta \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$C = \begin{bmatrix} 2\pi\rho_\infty bU & 2\pi\rho_\infty b^2 U (1-a) \\ -\pi\rho_\infty b^2 U (2a+1) & \pi\rho_\infty b^3 U a (2a-1) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$Q(t) = \begin{bmatrix} -f(t) \\ b\left(\frac{1}{2} + a\right)f(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_\theta}{2}(|\theta-\delta|+|\theta+\delta|) \end{bmatrix} \quad (11)$$

فرمول بندی ریاضی

اگر معادله سیستم غیرخطی به صورت رابطه (۶) باشد، با فرض گوسین بودن بردار نیروی تحریک $Q(t)$ و استفاده از روش خطی سازی آماری، سیستم خطی معادل به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq + K^e q = Q(t) \quad (12)$$

برای محاسبه K^e دروند زیر طی خواهد شد [۲۴].

ابتدا تفاضل سیستم غیرخطی و سیستم خطی معادل تشکیل و سپس میانگین آماری نرم اقلیدسی این تفاضل، کمینه می‌گردد.

$$\varepsilon = g(q) - K^e q \quad (13)$$

$$E\{\|\varepsilon\|_2\} = E\{\varepsilon^T \varepsilon\} = \sum_{i=1}^n E\{\varepsilon_i^2\} = \text{Minimum} \quad (14)$$

برای این منظور $E\{\varepsilon_i^2\}$ نسبت به درایه‌های ماتریس سختی سیستم خطی معادل، کمینه می‌شود.

$$\frac{\partial}{\partial K_{ij}^e} E\{\varepsilon_i^2\} = \frac{\partial}{\partial K_{ij}^e} E\left\{\left(g_i - \sum_{j=1}^n K_{ij}^e q_j\right)^2\right\} = 0 \quad (15)$$

از ساده کردن عبارت فوق، روابط زیر به دست می‌آید

$$E\{q_j g_i\} = \sum_{s=1}^n K_{is}^e E\{q_s q_j\} \quad (16)$$

$$E\{g_i q^T\} = E\{q^T q\} K_i^{eT} \quad (17)$$

که K_i^{eT} سطر i ام ماتریس K^e می‌باشد.

با فرض گوسین بودن پاسخ، سمت چپ رابطه (۱۷)، به صورت رابطه (۱۸) نوشته می‌شود [۲۴].

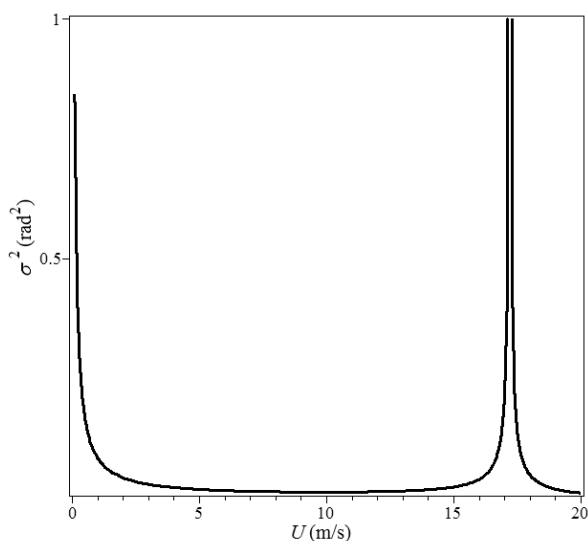
فرکانس و سرعت جریان می‌باشد، می‌توان با استفاده از معادله (۲۷) مقدار واریانس پاسخ را به ازای سرعت‌های مختلف جریان به دست آورد [۲۵] که نتیجه آن در شکل (۳) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در سرعت ۱۷/۲۰۷ متر بر ثانیه مقدار بیشینه واریانس پاسخ، اتفاق می‌افتد. بنابراین این سرعت به عنوان سرعت ناپایداری سیستم در نظر گرفته می‌شود. برای اعتبارسنجی فرآیند ذکر شده، از روش‌های P، K و PK [۲۲] که از روش‌های متداول آنالیز ناپایداری سیستم‌های آیرودلاستیک می‌باشد نیز استفاده شده که این نتایج در شکل (۴) و جدول (۲) نشان داده شده است.

جدول ۱. پارمترهای سازه‌ای بالواره و شدت تحریک تصادفی

پارامتر	توضیح	مقدار
b	نیم وتر	۰/۱۱۸ متر
ρ_∞	چگالی جریان آزاد	۱/۲۲۵ کیلوگرم بر مترمکعب
a	مکان محور الاستیک	-۰/۴۱
x_θ	نابالانسی استاتیکی بی‌بعد	۰/۱۵
I_p	ممان اینرسی	۰/۰۰۱۴۷ کیلوگرم مترمربع
k_h	سفتی خمشی	۵۹۰ نیوتون بر متر
k_θ	سفتی پیچشی	۱۱/۴۵ نیوتون متر بر رادیان
m	جرم ایرفویل	۰/۴۹ کیلوگرم
S_θ	شدت تحریک تصادفی	۱ نیوتون ثانیه بر مترمربع

جدول ۲. سرعت فلاتر از روش اتفاقی و روش‌های کلاسیک

روش	سرعت فلاتر (متر بر ثانیه)
[۲۲]P,K,PK	۱۷/۲۰۷
روش اتفاقی	۱۷/۲۰۷



شکل ۳. واریانس پاسخ پیچشی بر حسب سرعت جریان

$$S_\theta = \begin{bmatrix} S_\theta & -b\left(\frac{1}{2}+a\right)S_\theta \\ b\left(\frac{1}{2}+a\right)S_\theta & b^2\left(\frac{1}{2}+a\right)^2 S_\theta \end{bmatrix} \quad (26)$$

که در آن S_θ شدت نویز سفید است.

در ادامه می‌توان واریانس پاسخ را برای درجه آزادی پیچشی به صورت زیر به دست آورد:

$$\sigma_\theta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\theta\theta} d\omega \quad (27)$$

با توجه به روابط (۲۲) تا (۲۵) می‌توان دید که خود $S_{\theta\theta}$ تابعی از σ_θ^2 می‌باشد، و برای این که سیستم خطی شده با سیستم غیرخطی معادل باشد باید مقدار واریانس که از معادله (۱۸) به دست می‌آید با آنچه در خطی سازی سیستم به کار رفته است برابر باشد، برای این منظور ابتدا مقدار واریانس را صفر در نظر گرفته و سیستم خطی می‌شود، سپس مقدار جدید واریانس، از عبارت (۱۸) محاسبه شده و دوباره این مقدار به دست آمده، برای خطی سازی سیستم به کار می‌رود، با تکرار این روش پاسخ‌ها به ازای سرعت مشخص جریان همگرا شده و مقدار واریانس محاسبه می‌گردد. لازم به تذکر است که، $S_{\theta\theta}$ تابعی از سرعت جریان نیز می‌باشد، بنابراین این عمل برای هر سرعت جریان باید تکرار گردد تا نمودار واریانس پاسخ بر حسب سرعت جریان به دست آید. عمل تکرار ذکر شده در حقیقت ایجاد یک نگاشت درجه اول غیر خطی می‌کند که می‌توان آن را به صورت زیر نمایش داد:

$$\sigma_{\theta(n+1)}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\theta\theta}(U, \omega, \sigma_{\theta(n)}^2) d\omega \quad (28)$$

حال اگر فرض شود برای هر مقدار داده شده از سرعت جریان U^* ، پاسخ‌ها در $n \rightarrow \infty$ همگرا شود، به این معنی که $\sigma_{\theta(n+1)}^2 = \sigma_{\theta(n)}^2 = \sigma_\theta^2$ باشد، لذا نگاشت (۲۸) به معادله جبری غیرخطی زیر تبدیل می‌گردد که با حل آن، مقدار واریانس پاسخ، برای هر سرعت جریان محاسبه می‌گردد.

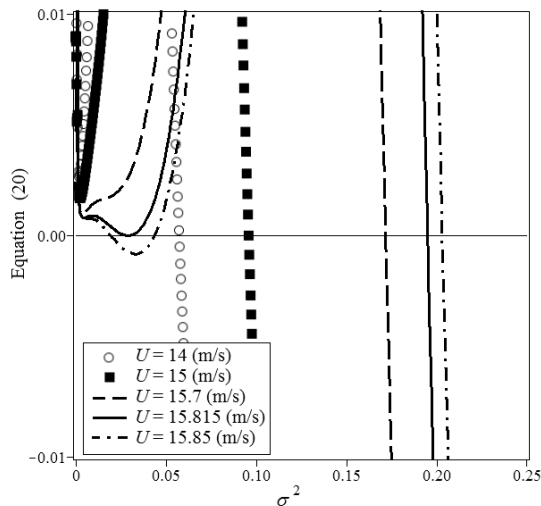
$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{\theta\theta}(U^*, \sigma_\theta^2, \omega) d\omega - \sigma_\theta^2 = 0 \quad (29)$$

مثال عددی

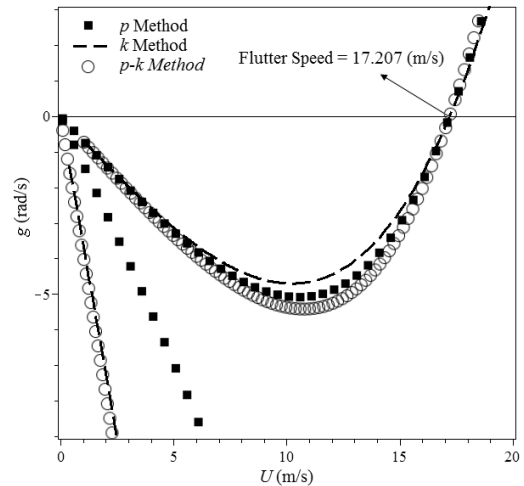
در این قسمت روش شرح داده شده (بررسی معادلات (۲۷) تا (۲۹)) را بر روی یک ایرفویل اعمال می‌نماییم. پارمترهای سازه‌ای، خواص جریان و شدت تحریک تصادفی در جدول (۱) ذکر شده است. نتایج برای دو حالت خطی و غیرخطی به دست آمده است. در حالت غیرخطی پارمتر δ که نمایانگر میزان لقی است به اندازه ۰/۰۵ رادیان در نظر گرفته شده است.

حالت خطی

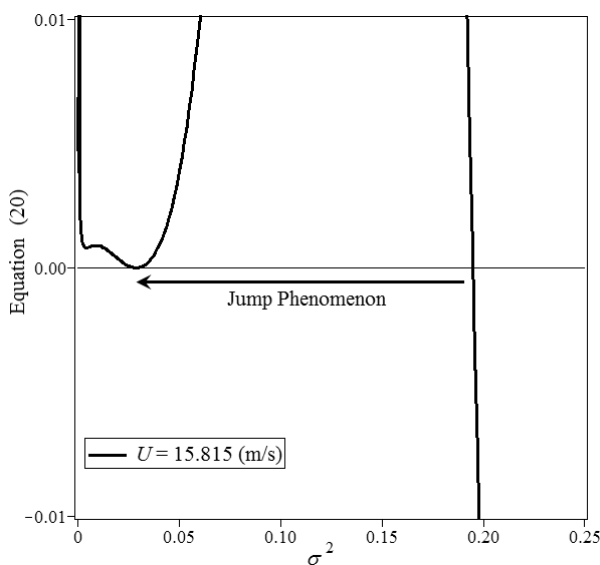
از آنجایی که در حالت خطی، چگالی طیفی پاسخ ($S_{\theta\theta}$) تنها تابع



شکل ۶. ریشه‌های معادله (۲۰)



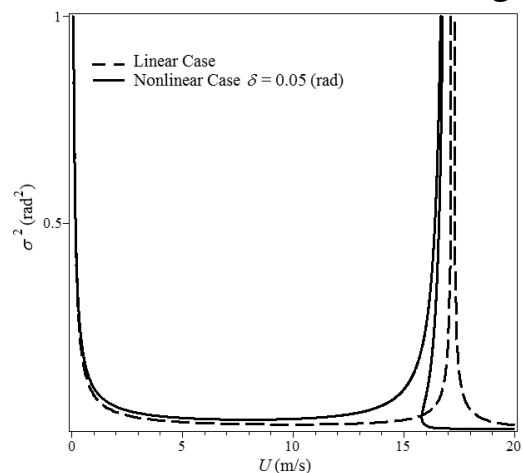
شکل ۴. تغییرات دمپینگ بر حسب سرعت جریان (سرعت فلاتر)



شکل ۷. پدیده پرش در ریشه معادله (۲۰)

حالت غیرخطی

در این قسمت به تحلیل مسئله غیرخطی پرداخته می‌شود. با حل معادله (۲۹) به ازای سرعت‌های مختلف جریان، نمودار واریانس پاسخ بر حسب سرعت جریان به دست می‌آید که در شکل (۵) نشان داده شده است. همان‌طور که مشخص است در حالت غیرخطی به ازای برخی مقادیر سرعت جریان، بیشتر از یک جواب برای واریانس سیستم به دست می‌آید. این موضوع سبب می‌شود که در سیستم پدیده پرش اتفاق بیفتد و در یک سرعت مشخص جریان، واریانس پاسخ از مقدار پایین‌تر به مقدار بالاتر پرش کند. از بررسی ریشه‌های معادله (۲۹) می‌توان به وضوح مشاهده کرد که با افزایش سرعت جریان، مقدار واریانس پاسخ سیستم که همان ریشه معادله (۲۹) (محل برخورد با محور افقی) است، افزایش می‌یابد (شکل ۶) و در سرعت جریان ۱۵/۸۱۵ متر بر ثانیه، با ایجاد دوشاخگی تانژانتی، دو ریشه جدید در معادله ایجاد می‌گردد و باعث می‌شود که واریانس پاسخ به سمت ریشه ایجاد شده پرش کرده و کاهش واریانس پاسخ رخ دهد (شکل ۷). این دو ریشه جدید نیز با افزایش سرعت از هم جدا شده و یکی نقش جاذب (ریشه پایدار) و دیگری نقش دافع (ریشه ناپایدار) را بازی می‌کند.



شکل ۵. واریانس پاسخ پیچشی بر حسب سرعت جریان

بحث و نتیجه‌گیری

در این مطالعه به بررسی ناپایداری یک بالواره، با عامل غیرخطی لقی، تحت اثر جریان شبه پایا پرداخته شد. برای این منظور ابتدا یک نیروی اتفاقی نویز سفید با چگالی احتمال گوسین به نیروی برآ اضافه گردید تا بتوان از قابلیت تحلیل اتفاقی سیستم‌های غیرخطی برای بررسی سیستم مورد نظر استفاده کرد. در ادامه از روش خطی سازی آماری، یک سیستم خطی معادل برای مجموعه در نظر گرفته شد و اختلاف میانگین آماری این سیستم معادل، با سیستم اصلی کمینه گردید. و در نهایت به تحلیل واریانس پاسخ سیستم خطی شده معادل پرداخته شد. در نتیجه این روش یک نگاهت غیرخطی به دست آمد که از بررسی این نگاهت، در دو حالت خطی و غیرخطی نمودار واریانس بر حسب سرعت رسم گردید.

از آنجایی که در پدیده‌های تصادفی، واریانس، نمایانگر میزان پراکندگی داده‌ها می‌باشد و می‌توان آن را نماینده دامنه فرآیند

مراجع

1. Lee B.H.K., and LeBlanc P., 1986. Flutter analysis of a two-dimensional airfoil with cubic nonlinear restoring force, *Aeronautical Note NAE-AN-36, NRC no. 25438*, National Research Council of Canada.
2. Lee B.H.K., Jiang L.Y., and Wong Y.S., 1998. Flutter of an airfoil with a cubic nonlinear restoring force, *AIAA Paper 98-1725, 39th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, 20–23 April, Long Beach, CA.
3. Shen S.F., 1959. An approximate analysis of nonlinear flutter problems, *Journal of Aerospace Science* 26: 25–32.
4. Lee B.H.K., Gong L., and Wong Y.S., 1997. Analysis and computation of nonlinear dynamic response of a two-degree-of-freedom system and its application in aeroelasticity, *Journal of Fluids and Structures* 11: 225–246.
5. Liu J.K., and Zhao L.C., 1992. Bifurcation analysis of airfoils in incompressible flow, *Journal of Sound and Vibration* 154(1): 117–124.
6. Price S.F., Alighanbari H., and Lee B.H.K., 1995. The aeroelastic response of a two-dimensional airfoil with bilinear and cubic structural nonlinearities, *Journal of Fluids and Structures* 9 (2): 175–193.
7. Shahrzad P., and Mahzoon M., 2002. Limit cycle flutter of airfoils in steady and unsteady flows, *Journal of Sound and Vibration* 256(2): 213–225.
8. Lee B.H.K., Liu L., and Chung K.W., 2005. Airfoil motion in subsonic flow with strong cubic nonlinear restoring forces, *Journal of Sound and Vibration* 28: 699–717.
9. Liu L.P., and Dowell E.H., 2004. The secondary bifurcation of an aeroelastic airfoil motion: Effect of high harmonics, *Journal of Nonlinear Dynamics* 37: 31–49.
10. Liu L., Dowell E.H., and Thomas J.P., 2007. A high dimensional harmonic balance approach for an aeroelastic airfoil with cubic restoring forces, *Journal of Fluids and Structures* 23: 351–363.
11. Raghoebari A., and Narayanan S., 1999. Nonlinear dynamics of a two-dimensional airfoil by incremental harmonic balance method, *Journal of Sound and Vibration*: 226(3): 493–517.
12. Chen Y.M., and Liu J.K., 2009. Elliptic harmonic balance method for two degree-of-freedom self-excited oscillators, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 14: 916–922.

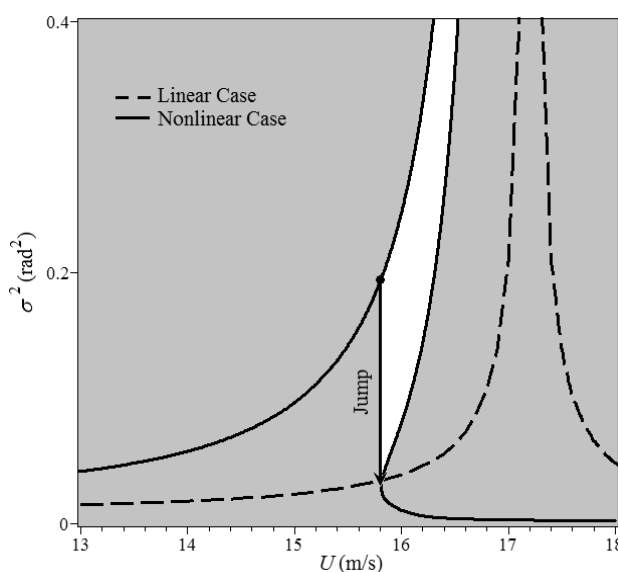
اتفاقی دانست، لذا سرعت جریانی که در آن بیشینه واریانس اتفاق می‌افتد، به عنوان سرعت ناپایداری سیستم در نظر گرفته شد. در حالت خطی، نتایج با روش‌های دیگر بررسی ناپایداری سیستم از جمله روش K, P و PK صحت گذاری شد.

در حالت غیرخطی، مشخص شد که به ازای برخی مقادیر سرعت جریان، ۳ مقدار برای واریانس پاسخ سیستم به دست می‌آید. از آنالیز نگاشت غیرخطی معلوم شد که با تغییر سرعت جریان و رخ دادن دوشاخگی تانژانتی، واریانس پاسخ به سمت مقدار پایین‌تر پش می‌کند. این سرعت را نیز می‌توان به عنوان سرعت ناپایداری در نظر گرفت. همان‌گونه که در شکل (۸) مشخص است نقطه پش و لذا ناپایداری سیستم در سیستم غیرخطی نسبت به حالت خطی زودتر اتفاق می‌افتد. و همواره پش در حالتی رخ می‌دهد که در سیستم دوشاخگی تانژانتی اتفاق بیافتد. در جدول (۳) می‌توان مقادیر سرعت فلاتر را برای دو حالت یاد شده مشاهده نمود.

جدول ۳. سرعت فلاتر حالات خطی و غیرخطی بالواره

روش	سرعت فلاتر (متر بر ثانیه)
حالت خطی	۱۷/۲۰۷
حالت غیرخطی	۱۵/۸۱۵

مزیت استفاده از این روش برای بررسی ناپایداری سیستم‌های خطی، سهولت روش حل و حذف فرآیند همگرایی در روش‌های کلاسیک بررسی فلاتر می‌باشد و در حالت غیرخطی نیز این روش، فرآیند حل عددی معادلات دیفرانسیل سیستم را حذف کرده و بدون ورود به حوزه زمان و حتی بدون بررسی چرخه حد، می‌تواند ناپایداری سیستم و مواردی مانند پش و دوشاخگی را معین سازد. همچنین با استفاده از این روش برای حالت غیرخطی به جای محدوده فلاتر، سرعت دقیق فلاتر مشخص می‌شود.



شکل ۸. واریانس پاسخ پیشی بر حسب سرعت جریان

- Application of the incremental harmonic balance method to cubic non-linearity systems, *Journal of Sound and Vibration* 140: 273–286.
20. Chen Y.M., Liu J.K., and Meng G., 2011. Equivalent damping of aeroelastic system of an airfoil with cubic stiffness, *Journal of Fluids and Structures* 27: 1447–1454.
21. Chen Y.M., Liu J.K., and Meng G., 2012. An incremental method for limit cycle oscillations of an airfoil with an external store, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 47: 75–83.
22. Hodges D.H., and Pierce G.A., 2002. *Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity*, Cambridge University Press, Cambridge.
23. Fung, Y.C., 1993. *An introduction to the theory of aeroelasticity*, Dover Publications, Inc., New York.
24. Roberts, J.B., and Spanos, P.D., 1990. *Random vibration and statistical linearization*, John Wiley & Sons, Chichester, England.
25. Irani, S., and Sazesh, S., 2013. A new flutter speed analysis method using stochastic approach, *Journal of Fluids and Structures* 40: 105–114.
13. Beran P.S., and Lucia D.J., 2005. A reduced order cyclic method for computation of limit cycles, *Journal of Nonlinear Dynamics* 39: 143–158.
14. Liu L., Wong Y.S., and Lee B.H.K., 2000. Application of the center manifold theory in nonlinear aeroelasticity, *Journal of Sound and Vibration* 234: 641–659.
15. Chung K.W., He Y.B., and Lee B.H.K., 2009. Bifurcation analysis of a two-degree-of-freedom aeroelastic system with hysteresis structural nonlinearity by a perturbation-incremental method, *Journal of Sound and Vibration* 320: 163–183.
16. Liu L., Wong Y.S., and Lee B.H.K., 2002. Nonlinear aeroelastic analysis using the point transformation method, Part 1: Freeplay Model, *Journal of Sound and Vibration* 253(2): 447–469.
17. Liao S.J., 2004. An analytic approximate approach for free oscillations of self-excited system, *Journal of Nonlinear Mechanics* 39: 271–280.
18. Chen Y.M., and Liu J.K., 2008. Homotopy analysis method for limit cycle flutter of airfoils, *Applied Mathematics and Computation* 203(2): 854–863.
19. Cheung Y.K., Chen S.H., and Lau S.L., 1990.