

تحلیل المان محدود ارتعاشات آزاد ورق دایره‌ای متخلخل مدرج تابعی تقویت‌شده با گرافن

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۸/۲۰

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۲/۰۹

مجتبی خاتون‌آبادی^۱، محمد جعفری^۲، کامران عاصمی^۳

۱- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک جامدات، دانشگاه صنعتی شاهرود، سمنان، ایران؛ mojtabakhatoonabadi@gmail.com

۲- دانشیار دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، سمنان، ایران

۳- استادیار گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال، تهران، ایران

چکیده

در این مقاله، تحلیل المان محدود ارتعاشات آزاد صفحه دایره‌ای متخلخل مدرج تابعی تقویت‌شده با گرافن بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT) برای اولین بار ارائه شده است. معادلات حاکم با استفاده از اصل همپلتون به دست می‌آیند و روش المان محدود (FEM) برای حل معادلات حاکم بر ورق استفاده شده است. نتایج کار حاضر با مطالعات قبلی مقایسه شده و تطابق خوبی بین نتایج مشاهده شد. تأثیر پارامترهای مختلف مانند توزیع تخلخل، ضریب تخلخل، الگوهای مختلف GPL و درصد وزنی نانو ذرات گرافن، انواع شرایط مرزی و همچنین نسبت ضخامت به شعاع بر ارتعاشات ورق دایره‌ای بررسی شد. در ادامه ضمن صحت‌سنجی روش تحلیل، نتایج حاصل از حل عددی مقایسه و بررسی شد. در نتایج مشخص شد که اثر درصد وزنی گرافن و نوع الگوهای مختلف گرافن و همچنین شرایط تکیه‌گاهی در ارتعاشات ورق بیش از سایر موارد است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل ارتعاشات آزاد، مواد متخلخل مدرج تابعی، ورق دایره‌ای، تقویت‌شده با گرافن، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، المان محدود

Finite element analysis of free vibration of functionally graded porous circular plate reinforced with graphene

Mojtaba Khatounabadi¹, Mohammad Jafari², Kamran Asemi³

1- PhD Mechanical Engineering student, Shahrood University of Technology, Semnan, Iran, mojtabakhatoonabadi@gmail.com

2- Associate Professor, Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering, Shahrood University of Technology, Semnan, Iran

3- Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University, North Tehran Branch, Tehran, Iran

Abstract

In this paper, the finite element analysis of the free vibrations of functionally graded porous circular plate reinforced with graphene based on the first order shear deformation theory (FSDT) is presented for the first time. The governing equations are obtained using Hamilton's principle and the finite element method (FEM) is used to solve the governing equations of the sheet. The results of the present work were compared with previous studies and a good agreement between the results was observed. The effect of different parameters such as porosity distribution, porosity coefficient, different GPL patterns and weight percentage of graphene nanoparticles, types of boundary conditions and also the ratio of thickness to radius on the vibrations of the circular sheet was investigated. Next, while validating the analysis method, the results obtained from the numerical solution were compared and analyzed. In the results, it was found that the effect of weight percentage of graphene and different types of graphene patterns as well as support conditions in sheet vibrations is more than other cases.

Keywords: free vibrations analysis; functionally graded porous materials; circular plate; reinforced with graphene; first order shear deformation theory, finite element method

۱۶۳

سال ۱۲ - شماره ۱

بهار و تابستان ۱۴۰۲

نشریه علمی

دانش و فناوری هوافضا



۱. مقدمه

به تازگی از نانولوله‌های کربنی (CNTs) و نانو ذرات گرافن (GPLs) برای تقویت ساختارهای کامپوزیتی استفاده زیادی می‌شود [۱] و مواد متخلخل به دلیل ویژگی‌های بالقوه‌شان مانند وزن سبک و جذب عالی انرژی به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است [۲-۴]. ترکیب و تقویت مواد متخلخل با GPL، آن‌ها را بسیار جذاب تر می‌کند. تحقیقات تجربی و نظری در این زمینه نشان می‌دهد که استفاده از مقادیر بسیار کم GPL در ماتریس پلیمری و فلزی، خواص آن‌ها را از جمله خواص مکانیکی، حرارتی و الکتریکی، در مقایسه با CNT ها به شدت بهبود می‌بخشد [۵]. از این رو، GPL ها اثر تقویت‌کنندگی بهتری دارند. بنابراین، سازه‌های تقویت‌شده با GPL ها می‌توانند ظرفیت انتقال بار و همچنین استحکام مواد تقویت‌شده را به طور قابل توجهی افزایش دهند [۶، ۷]. تحقیقات زیادی درباره ساختارهای FG-CNT [۸-۱۸] و FG-GPL [۱۹-۲۴] انجام شده است. مواد متخلخل مصنوعی مانند فوم‌های فلزی که هر دو خواص فیزیکی و مکانیکی را دارند به طور گسترده در مواد با ساختار سبک‌وزن [۲۵، ۲۶] و بیومواد [۲۷، ۲۸] استفاده شده‌اند.

۱-۱ کاربردهای مواد مدرج تابعی تقویت‌شده با گرافن

با اینکه مواد مدرج تابعی در ابتدا برای مصارف هوافضا طراحی و ساخته شدند، اما در حال حاضر در بسیاری از زمینه‌ها استفاده می‌شوند. مثال‌هایی از کاربردهای مواد مدرج تابعی را می‌توان به صورت زیر ارائه کرد [۲۹، ۳۰]:

(۱) صنایع هوافضا: سازه و پانل‌های خورشیدی

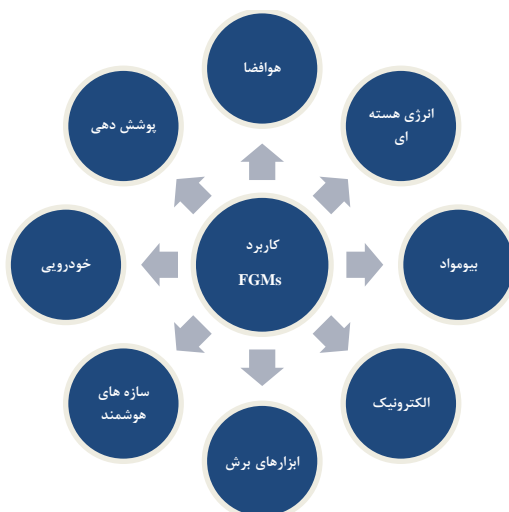
فضایی و نازل شاتل‌های فضایی؛

(۲) صنایع ماشین‌سازی و تجهیزات: در بخش‌هایی از جمله تیغه‌های توربین بادی، مخازن تحت فشار، مخازن سوخت، قطعات ماشین‌آلات، کیس لپ‌تاپ، کپسول هوای آتش‌نشانی، قاب عینک، میزهای اشعه ایکس، لوله‌های برودتی اسکنر MRI، قاب دوچرخه مسابقه، چوب گلف، راکت تنیس، تخته اسکی، آلات موسیقی و شاسی خودروهای مسابقه‌ای؛

(۳) صنایع الکترونیک و الکترواپتیک: مواد کاتدی، لوله‌های تبخیرکننده، ژنراتورهای انرژی حرارتی، اجزای سیستم‌های انرژی خورشیدی و دستگاه‌های تبدیل انرژی، حسگرها، الکترودها و پره‌های توربین، همچنین سلول‌های سوختی، لوله‌های سوئیچ خلأ، مواد الکتریکی، سینک حرارتی، مدارهای مجتمع، دستگاه‌های نیمه‌هادی و بسترهای الکترونیکی.

به صورت کلی زمینه‌های کاربرد مواد مدرج

تابعی مطابق شکل ۱ است [۳۰]:



شکل ۱. کاربرد مواد مدرج تابعی [۳۰]

۱۶۴

سال ۱۲ - شماره ۱
بهار و تابستان ۱۴۰۲
نشریه علمی
دانش و فناوری هوا فضا



تحلیل المان محدود ارتعاشات آزاد ورق دایره‌ای متخلخل مدرج تابعی تقویت‌شده با گرافن

با توجه به اهمیت سازه‌های متخلخل در کاربردهای عملی به‌ویژه در صنایع هوافضا، برخی از محققان رفتار آن‌ها را در بارگذاری‌ها و شرایط مختلف ارزیابی کرده‌اند. شی [۲۸] تأثیر بارهای حرارتی را بر انتشار موج هدایت‌شده صفحات مدرج تابعی متخلخل بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT^۳) و با استفاده از روش گالرکین بررسی کرد. طاهر و همکاران [۳۱]، راه‌حلی تحلیلی برای بررسی انتشار موج یک ورق FGM^۴ سرامیکی-فلزی با توزیع‌های تخلخل مختلف که بر روی یک پایه ویسکوالاستیک قرار دارد با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر هیپربولیک انتگرال چهار متغیره (HSDT^۵) ارائه کردند. در تحقیقی دیگر، طاهر و همکاران [۳۲] اثر محیط رطوبتی-حرارتی را بر تجزیه و تحلیل انتشار موج یک صفحه ساندویچی با درجه‌بندی عملکردی سرامیکی-فلزی با توزیع تخلخل‌های مختلف بر اساس HSDT و با استفاده از یک محلول تحلیلی مورد مطالعه قرار دادند. رفتار ارتعاشی وابسته به اندازه نانو ساختار مدرج متخلخل با مدل FEM و پیوسته غیرمحلّی توسط کومار و همکاران ارائه شد [۳۳]. بلیفا و همکاران [۳۴] تأثیر تخلخل بر پاسخ کمانش حرارتی تیرهای درجه‌بندی‌شده عملکردی را بر اساس مدل تیر اویلر-برنولی و با استفاده از روش تحلیلی بررسی کردند. گولیل و همکاران [۳۵] تأثیر توزیع تخلخل و شرایط مرزی بر پاسخ خمشی مکانیکی صفحات FG را مورد مطالعه قرار دادند. بکی و همکاران [۳۶] رفتارهای مکانیکی وابسته به تخلخل صفحه FG را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مثلثاتی بهبودیافته با استفاده از

GPL ها در مواد پراکنده می‌شوند تا برخی از کاربردهای خود را اصلاح کنند و از طرف دیگر وزن سازه‌ها تغییر چندانی نمی‌کند. بر این اساس، ترکیبی از مزایای استفاده از GPLs و تخلخل به‌طور قابل توجهی خواص مکانیکی مواد را بهبود بخشیده است درحالی‌که پتانسیل آن‌ها برای دستیابی به ساختارهای سبک‌وزن حفظ می‌شود [۳۷، ۳۸]. بنابراین، برای به دست آوردن و اصلاح خواص مکانیکی مورد نیاز، مواد متخلخل مدرج تابعی تقویت‌شده با (FGP-GPLs) GPL معرفی شده‌اند [۳۹، ۴۰]. چن و همکاران [۴۱] ارتعاش غیرخطی و پس کمانش تیرهای نانوکامپوزیت متخلخل تقویت‌شده FG-GPL را بر اساس تئوری تیر تیموشنکو و رابطه کرنش-جابه‌جایی فون کارمان با استفاده از روش ریتز و یک الگوریتم تکراری مستقیم مورد مطالعه قرار دادند. در مطالعه دیگری، کیتیپورنچای و همکاران [۴۲] ارتعاش آزاد و کمانش الاستیک تیرهای متخلخل FG تقویت‌شده با GPL بر اساس تئوری تیر تیموشنکو و روش ریتز را مطالعه کردند. گائو و همکاران [۴۳] ارتعاش آزاد غیرخطی صفحات نانوکامپوزیت متخلخل تقویت‌شده با FG-GPL را که بر پایه الاستیک بر اساس تئوری ورق کلاسیک (CPT) با در نظر گرفتن روابط کرنش-جابه‌جایی فون کارمن قرار دارند، تجزیه و تحلیل کردند. معادلات حاکم با استفاده از روش دیفرانسیل کواداتوری (DGM^۶) حل شد. شاهقلیان قهفرخی و همکاران کمانش و تحلیل کمانش پیچشی [۴۴، ۴۵] پوسته‌های استوانه‌ای نانوکامپوزیت متخلخل FG تقویت‌شده با GPL را بر اساس روش FSDT و Rayleigh-Ritz انجام دادند.



در میان تجزیه و تحلیل‌ها، توجه کمی به تجزیه و تحلیل ارتعاشات ساختارهای FGM تقویت‌شده با گرافن شده است. برای مثال ابراهیمی و راستگو [۴۶] ارتعاشات آزاد ورق دایره‌ای مدرج تابعی را با استفاده از تئوری کلاسیک صفحات (CLPT) بررسی کردند. الله‌وردی زاده و همکاران [۴۷] رفتار ارتعاش متقارن محوری ورق دایره‌ای FG را با استفاده از یک رویکرد نیمه‌تحلیلی ارائه کردند. ویروسکی [۴۸] رفتار ارتعاش آزاد ورق حلقوی FG را بر اساس تکنیک میانگین‌گیری با استفاده از روش تفاضل محدود (FDM) مطالعه کرد. فریرا و همکاران [۴۹-۵۱] رفتار استاتیکی و دینامیکی صفحات FG را با استفاده از روش بدون مش تحلیل کردند. علیپور و همکاران [۵۲] ارتعاش آزاد ورق دایره‌ای و حلقوی FG را که بر روی یک پایه الاستیک با شرایط مرزی مختلف قرار گرفته بود، مورد مطالعه قرار داد. شریعت و علیپور [۵۳] از روش تبدیل دیفرانسیل (DTM) برای بررسی فرکانس‌های طبیعی صفحات نازک دایره‌ای FG که بر روی پایه‌های الاستیک قرار دارند، استفاده کردند. لی و همکاران [۵۴] با استفاده از تئوری ورق کلاسیک، یک تجزیه و تحلیل ارتعاش آزاد صفحات FG همسانگرد را ارائه کرد. لال و احوالات [۵۵] آنالیز مودال ورق دایره‌ای FG را با استفاده از CLPT بررسی کردند. سوامیناتان و همکاران [۵۶] روش‌های مختلفی را برای تجزیه و تحلیل رفتارهای مختلف صفحات درجه‌بندی عملکردی بررسی کردند. عارفی [۵۷] ارتعاشات آزاد صفحات دایره‌ای و حلقوی FG تعبیه شده با لایه‌های پیزوالکتریک را بررسی کرد. آرشید و همکاران [۵۸] رفتار فرکانس طبیعی ورق FG الاستیک را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی بررسی

کردند. سینگ و اعظم [۵۹] رفتار ارتعاش آزاد یک ورق FGM را بر روی یک پایه الاستیک در یک محیط تحت دما مطالعه کردند.

مهم‌ترین مزیت مواد متخلخل مدرج تابعی آن است که با توجه به نیازها، می‌توان خواص آن را کنترل کرد [۶۰]. به‌طور کلی مواد متخلخل مزیت‌هایی از قبیل عایق صوتی خوب، خواص بهبودیافته عایق حرارتی، خواص بهبودیافته خستگی در مقایسه با مواد سنتی، خواص بهبودیافته پایداری حرارتی بالا در مقایسه با فلزات، مقاومت بالا در برابر خوردگی و مقاومت بالای مکانیکی در مقایسه با وزن [۶۰] دارند.

بنابراین به دلیل مزایای ذکر شده و همچنین در راستای توسعه و پاسخ به نیاز رو به افزایش کاربرد مواد پیشرفته در صنایع مختلف از جمله هوافضا، لزوم مطالعه و بررسی مواد متخلخل مدرج تابعی تقویت‌شده با گرافن و بررسی پاسخ ارتعاشات آزاد این مواد ضروری است. برای مدل متخلخل مدرج تابعی تقویت‌شده با گرافن مورد بررسی در این مقاله، سه نوع متداول تخلخل در راستای ضخامت و همچنین برای هر سه نوع تخلخل، پنج نوع توزیع گرافن در نظر گرفته شده است. ویژگی‌های مواد مدرج تابعی با استفاده از مدل میکرومکانیکی هالپین تسای^۷ استخراج، معادلات حاکم بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT) و معادلات تعادل با استفاده از اصل انرژی همیلتون تعیین می‌شود. همچنین روش حل معادلات با استفاده از روش اجزای محدود خواهد بود. در این مقاله اثر ضریب تخلخل، اثر نوع توزیع تخلخل، اثر در نظر گرفتن توزیع‌های مختلف گرافن، تأثیر درصد وزنی گرافن و آثار شرایط مرزی و هندسی مختلف در ارتعاشات مدل بررسی می‌شود برخی از

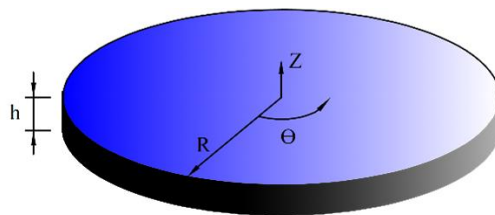
نوآوری‌های کار حاضر را می‌توان به شرح زیر در نظر گرفت:

- (۱) تحلیل ارتعاش آزاد ورق دایره‌ای متخلخل FG-GPL با ترکیب حالت‌های تخلخل و توزیع‌های گرافن در ۱۵ حالت؛
- (۲) ارائه نتایج دقیق‌تر با استفاده از FSDT به جای CLPT برای ورق‌های نسبتاً ضخیم؛
- (۳) امکان تحلیل و انتخاب بهترین الگوی GPL و توزیع تخلخل با توجه به نتایج عددی و کاربرد مورد نظر.

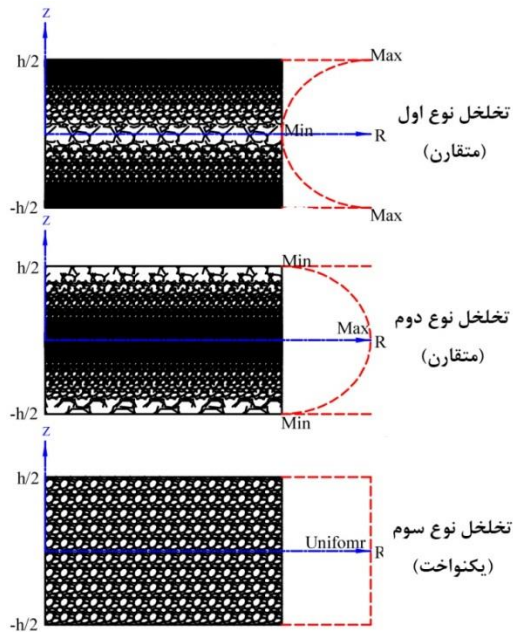
۲. مدل‌سازی و معادلات حاکم

۱-۲-۱-۲-۱ هندسه

ورق دایره‌ای مطابق شکل ۲ در نظر گرفته شده است که h و R به ترتیب ضخامت و شعاع ورق دایره‌ای هستند. همچنین r ، θ و z محورهای دستگاه مختصات استوانه‌ای هستند که در موقعیت وسط ورق قرار دارند. u ، v و w نیز به ترتیب اجزای جابه‌جایی صفحه وسط در جهت r ، θ و z هستند.

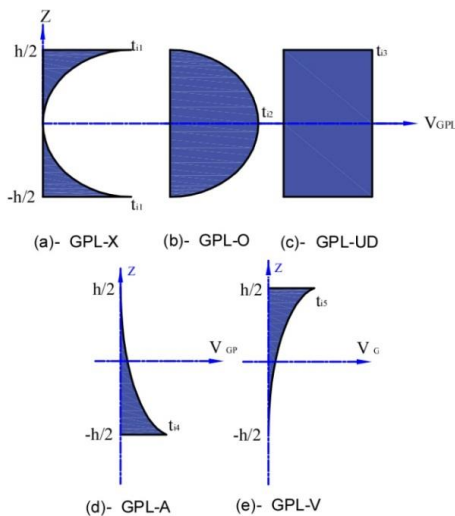


شکل ۲. هندسه ورق دایره‌ای متخلخل مدرج تابعی تقویت‌شده با گرافن



شکل ۳. توزیع مختلف تخلخل ورق دایره‌ای

همچنین برای هر سه نوع تخلخل اشاره‌شده پنج نوع توزیع گرافن منطبق با شکل ۴ در نظر گرفته خواهد شد.



شکل ۴. توزیع مختلف گرافن در جهت ضخامت

روابط مدول یانگ، مدول برشی و چگالی توزیع‌های اشاره‌شده در معادله‌های (۱) تا (۳) برای توزیع تخلخل غیرخطی متقارن نوع اول، توزیع تخلخل غیرخطی متقارن نوع دوم و توزیع تخلخل یکنواخت نوع سوم در ادامه آمده است [۴۱]. که در آن $\zeta = z/h$ است.

۲-۲-۲ معادلات خواص مکانیکی

سه توزیع مختلف تخلخل همان‌طور که در شکل ۳ نشان داده شده است در راستای Z فرض شده است. دو نوع از این توزیع‌ها به صورت غیرخطی متقارن و نوع سوم با تخلخل متقارن و یکنواخت می‌باشند.

$$\int_0^{\frac{h}{2}} \sqrt{1 - e_0 \cos(\pi\zeta)} d\zeta \quad (6)$$

$$= \int_0^{\frac{h}{2}} \sqrt{1 - e_0^*(1 - \cos(\pi\zeta))} d\zeta = \int_0^{\frac{h}{2}} \sqrt{\alpha} d\zeta$$

با توجه به معادله (۶)، مقادیر e_0^* و α را می‌توان با مقدار معلوم شده e_0 ، همان‌طور که در جدول ۱ ارائه شده است، تخمین زد [۶۳]. مشاهده می‌شود که e_0^* با افزایش e_0 افزایش می‌یابد. وقتی که e_0 برابر با ۰٫۶ باشد، e_0^* مطابق محاسبه برابر با ۰٫۹۶۱۲ خواهد بود که نزدیک به کران بالایی است. با محاسبه رابطه‌های (۴) تا (۶)، اعداد جدول زیر به دست خواهد آمد:

جدول ۱. ضرایب ماده متخلخل برای توزیع‌های مختلف

[۶۴]

α	e_0^*	e_0
۰٫۹۳۶۱	۰٫۱۷۳۸	۰٫۱
۰٫۸۷۱۶	۰٫۳۴۴۲	۰٫۲
۰٫۸۰۶۴	۰٫۵۱۰۳	۰٫۳
۰٫۷۴۰۴	۰٫۶۷۰۸	۰٫۴
۰٫۶۷۳۳	۰٫۸۲۳۱	۰٫۵
۰٫۶۰۴۷	۰٫۹۶۱۲	۰٫۶

بر اساس مدل میکرومکانیک هالپین-تسای [۶۲، ۶۵]، مدول یانگ نانوکامپوزیت غیر متخلخل به صورت زیر بیان می‌شود:

$$E^* = \frac{3}{8} \left(\frac{1 + \varepsilon_L^{GPL} \eta_L^{GPL} V_{GPL}}{1 - \eta_L^{GPL} V_{GPL}} \right) E_m + \frac{5}{8} \left(\frac{1 + \varepsilon_W^{GPL} \eta_W^{GPL} V_{GPL}}{1 - \eta_W^{GPL} V_{GPL}} \right) E_m \quad (7)$$

که در آن:

$$\varepsilon_W^{GPL} = \frac{2W_{GPL}}{E_{GPL} - E_m}, \quad \varepsilon_L^{GPL} = \frac{2l_{GPL}}{E_{GPL} - E_m} \quad (8)$$

$$\eta_L^{GPL} = \frac{t_{GPL} - E_m}{E_{GPL} + \varepsilon_L^{GPL} E_m}, \quad \eta_W^{GPL} = \frac{t_{GPL} - E_m}{E_{GPL} + \varepsilon_W^{GPL} E_m}$$

در معادله‌های ذکر شده شاخص‌های m و GPL به ترتیب ویژگی‌های ماتریس فلزی و گرافن را نشان می‌دهند. V_{GPL} ضریب حجمی GPL ها است و l_{GPL} ، W_{GPL} و t_{GPL} به ترتیب طول، عرض و ضخامت نانو ذرات گرافن هستند.

$$\begin{cases} E(\zeta) = E^*[1 - e_0 \cos(\pi\zeta)] \\ G(\zeta) = G^*[1 - e_0 \cos(\pi\zeta)] \\ \rho(\zeta) = \rho^*[1 - e_m \cos(\pi\zeta)] \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} E(\zeta) = E^*[e_0^*(1 - \cos(\pi\zeta))] \\ G(\zeta) = G^*[e_0^*(1 - \cos(\pi\zeta))] \\ \rho(\zeta) = \rho^*[e_m^*(1 - \cos(\pi\zeta))] \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} E(\zeta) = E^* \alpha \\ G(\zeta) = G^* \alpha \\ \rho(\zeta) = \rho^* \alpha' \end{cases} \quad (3)$$

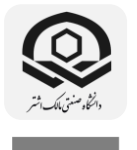
که در آن E^* ، G^* و ρ^* به ترتیب نشان‌دهنده مدول یانگ، مدول برشی و چگالی جرم ورق دایره‌ای بدون تخلخل هستند. همچنین e_0 و e_0^* ($0 \leq e_0(e_0^*) < 1$) به ترتیب ضرایب تخلخل را برای توزیع‌های ۱ و ۲ معرفی می‌کنند. e_m و e_m^* به ترتیب ضرایب چگالی جرمی را برای توزیع‌های ۱ و ۲ تخلخل نشان می‌دهند. α و α' پارامترهای توزیع تخلخل نوع سوم (یکنواخت) هستند. با افزایش اندازه و چگالی تخلخل، تخلخل افزایش یافته و در نتیجه باعث کاهش خواص مواد می‌شود. رابطه بین مدول یانگ و چگالی برای فوم‌های فلزی مطابق رابطه (۴) است [۶۱، ۶۲]. برای به دست آوردن روابط بین ضریب تخلخل و ضریب تخلخل جرمی برای توزیع‌های مختلف تخلخل کافی هست برای سه توزیع مختلف روابط مربوط به مدول و چگالی در راستای ضخامت و مدول و چگالی نانو کامپوزیت را در رابطه‌های (۴) و (۵) جایگذاری کنیم:

$$\frac{E(\zeta)}{E^*} = \left(\frac{\rho(\zeta)}{\rho^*} \right)^2 \quad (4)$$

معادله (۴) برای استخراج رابطه بین ضرایب تخلخل است و همچنین ضرایب چگالی جرمی برای الگوهای تخلخل مختلف به شرح معادله (۵) استفاده می‌شود:

$$\begin{cases} 1 - e_m \cos(\pi\zeta) = \sqrt{1 - e_0 \cos(\pi\zeta)} \\ 1 - e_m^*(1 - \cos(\pi\zeta)) = \sqrt{1 - e_0^*(1 - \cos(\pi\zeta))} \\ \alpha' = \sqrt{\alpha} \end{cases} \quad (5)$$

در اینجا، فرض بر این است که جرم ورق‌های دایره‌ای مختلف با الگوهای تخلخل مختلف و پراکندگی GPL یکسان است.



۲-۳ معادلات حرکت:

بر اساس فرضیات تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، میدان جابه‌جایی به صورت زیر خواهد بود [۶۶]:

$$\begin{aligned} u(r, \theta, z) &= u_0(r, \theta) + z\varphi_r(r, \theta) \\ v(r, \theta, z) &= v_0(r, \theta) + z\varphi_\theta(r, \theta) \\ w(r, \theta, z) &= w_0(r, \theta) \end{aligned} \quad (15)$$

که در آن u ، v و w مؤلفه‌های جابه‌جایی در جهت r ، θ و z هستند. درحالی‌که u_0 ، v_0 و w_0 به ترتیب مؤلفه‌های جابه‌جایی صفحه میانی در جهت r ، θ و z می‌باشند و همچنین φ_r و φ_θ ، چرخش‌های نرمال عرضی حول r و θ می‌باشند. کرنش‌های مربوط به میدان جابه‌جایی به صورت زیر تعریف می‌شوند که در آن‌ها ε_r و ε_θ کرنش‌های نرمال و γ_{rz} ، $\gamma_{r\theta}$ و $\gamma_{\theta z}$ کرنش‌های برشی هستند. [۶۷]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \varepsilon_r^0 + zk_r, & \varepsilon_\theta &= \varepsilon_\theta^0 + zk_\theta, \\ \gamma_{r\theta} &= \gamma_{r\theta}^0 + zk_{r\theta} \\ \gamma_{rz} &= \gamma_{rz}^0, & \gamma_{\theta z} &= \gamma_{\theta z}^0 \end{aligned} \quad (16)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial r}, & \varepsilon_\theta^0 &= \frac{u_0}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta}, & k_r &= \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} \\ k_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\varphi_r}{r}, & k_{r\theta} &= \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta} - \frac{\varphi_\theta}{r} \\ \gamma_{rz}^0 &= \frac{\partial w_0}{\partial r} + \varphi_r, & \gamma_{\theta z}^0 &= \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + \varphi_\theta, & \gamma_{r\theta}^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{r} \end{aligned} \quad (17)$$

در ادامه ماتریس کرنش به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_r^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{r\theta}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_r \\ k_\theta \\ k_{r\theta} \end{Bmatrix} = \\ \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 & z \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & z \frac{1}{r} & z \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} & 0 & z \frac{\partial}{\partial \theta} & z \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \varphi_r \\ \varphi_\theta \end{Bmatrix} &= d_1 Q \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{rz}^0 \\ \gamma_{\theta z}^0 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \varphi_r \\ \varphi_\theta \end{Bmatrix} = d_2 Q \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{r\theta}^0 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \varphi_r \\ \varphi_\theta \end{Bmatrix} = d_3 Q \\ \begin{Bmatrix} k_r \\ k_\theta \\ k_{r\theta} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \varphi_r \\ \varphi_\theta \end{Bmatrix} = d_4 Q \end{aligned}$$

که در آن:

$$Q = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \varphi_r \\ \varphi_\theta \end{Bmatrix} \quad (19)$$

با استفاده از قانون مخلوط‌ها، چگالی جرمی و نسبت پواسون نانوکامپوزیت به صورت زیر برآورد می‌شود [۶۲، ۶۵]:

$$\rho^* = \rho_{GPL} V_{GPL} + \rho_m (1 - V_{GPL}) \quad (9)$$

$$v^* = v_{GPL} V_{GPL} + v_m (1 - V_{GPL}) \quad (10)$$

همچنین مدول برشی نانوکامپوزیت (G^*) با توجه به رابطه (۱۱) با معلوم بودن مدول الاستیسیته معادل و ضریب پواسون معادل به دست خواهد آمد.

$$G^* = \frac{E^*}{2(1 + v^*)} \quad (11)$$

مطابق الگوهای نشان داده شده در شکل ۴ فرض بر این است که درصد حجمی GPL ها، (V_{GPL}) در امتداد ضخامت ورق با پنج الگوی پراکندگی به شرح زیر تغییر می‌کند:

$$V_{GPL}(z) = \begin{cases} t_{i1}[1 - \cos(\pi\zeta)]GPL - X \\ t_{i2}[\cos(\pi\zeta)]GPL - O \\ t_{i3}GPL - UD \\ t_{i4}[1 - \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\zeta)]GPL - A \\ t_{i5}[\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\zeta)]GPL - V \end{cases} \quad (12)$$

که t_{i1} ، t_{i2} ، t_{i3} ، t_{i4} و t_{i5} حد بالایی V_{GPL} را نشان می‌دهند و زیرنویس $i=1,2,3$ نشان‌دهنده توزیع تخلخل مختلف در هر الگوی GPL است. ضریب وزنی نانو ذرات گرافن γ_{GPL} در این رابطه (۱۳) تخمین زده می‌شود و سپس با استفاده از رابطه (۱۴) برای استخراج t_{i1} ، t_{i2} ، t_{i3} ، t_{i4} و t_{i5} بهره می‌بریم.

$$V_{GPL}^T = \frac{\gamma_{GPL} \rho_m}{\gamma_{GPL} \rho_m + \rho_{GPL} - \gamma_{GPL} \rho_{GPL}} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} V_{GPL}^T \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\rho(\zeta)}{\rho^*} d\zeta &= \\ \begin{cases} t_{i1} \int_{-h/2}^{h/2} [1 - \cos(\pi\zeta)] \frac{\rho(\zeta)}{\rho^*} d\zeta \\ t_{i2} \int_{-h/2}^{h/2} [\cos(\pi\zeta)] \frac{\rho(\zeta)}{\rho^*} d\zeta \\ t_{i3} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\rho(\zeta)}{\rho^*} d\zeta \\ t_{i4} \int_{-h/2}^{h/2} [1 - \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\zeta)] \frac{\rho(\zeta)}{\rho^*} d\zeta \\ t_{i5} \int_{-h/2}^{h/2} [\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\zeta)] \frac{\rho(\zeta)}{\rho^*} d\zeta \end{cases} &= \end{aligned} \quad (14)$$



$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K^2 A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K^2 A_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_r^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{r\theta}^0 \\ k_r \\ k_\theta \\ k_{r\theta} \\ \gamma_{rz}^0 \\ \gamma_{\theta z}^0 \end{pmatrix}$$

جایی که:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} C_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (23)$$

از روابط تعادل داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

طبق اصل همیلتون خواهیم داشت:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U) dt = 0 \quad (25)$$

که در آن δT حاصل انرژی جنبشی، δU حاصل انرژی پتانسیل است. بنابراین، کرنش و انرژی جنبشی برای ورق دایره‌ای متخلخل FG-GPL به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \delta U &= \frac{1}{2} \iiint \varepsilon^T \sigma dV = \\ &\iiint \left\{ N_r \varepsilon_r^0 + N_\theta \varepsilon_\theta^0 + N_{r\theta} \gamma_{r\theta}^0 + M_r K_r \right. \\ &\left. + M_\theta K_\theta + M_{r\theta} K_{r\theta} + Q_r \gamma_{rz} + Q_\theta \gamma_{\theta z} \right\} r dr d\theta \\ &\int \left((d_3 Q)^T A^T + (d_4 Q)^T B^T \right) (d_3 \delta Q) \\ &\int \left((d_3 Q)^T B^T + (d_4 Q)^T D^T \right) (d_4 \delta Q) \\ &\left. + (d_2 Q)^T e^T (d_2 \delta Q) \right) r dr d\theta \end{aligned} \quad (26)$$

و همچنین برای δT داریم:

$$\delta T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho (\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w) dV \quad (27)$$

که در آن:

$$\begin{cases} u = u_0 + z \varphi_r \\ v = v_0 + z \varphi_\theta \\ w = w_0 \end{cases} \begin{cases} \delta u = \delta u_0 + z \delta \varphi_r \\ \delta v = \delta v_0 + z \delta \varphi_\theta \\ \delta w = \delta w_0 \end{cases} \begin{cases} \ddot{u} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial t^2} \\ \ddot{v} = \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial t^2} \\ \ddot{w} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \end{cases} \quad (28)$$

$$\delta T = \int \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \left(\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial t^2} \right) (\delta u_0 + z \delta \varphi_r) + \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial t^2} \right) (\delta v_0 + z \delta \varphi_\theta) + \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \delta w_0 \right) dz dA$$

با جایگزینی معادله‌های (26) و (28) در معادلات اصل همیلتون داریم:

$$d_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 & z \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & z \frac{1}{r} & \frac{z}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} & 0 & z \frac{\partial}{\partial \theta} & z \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \end{bmatrix}$$

$$d_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \end{bmatrix}$$

رابطه بین تنش و کرنش برای ورق دایره‌ای متخلخل کامپوزیتی FG-GPL را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{cases} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{cases}^k = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}^k \begin{cases} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{r\theta} \end{cases}^k$$

$$\begin{cases} \tau_{rz} \\ \tau_{\theta z} \end{cases}^k = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix}^k \begin{cases} \gamma_{rz} \\ \gamma_{\theta z} \end{cases}^k \quad (20)$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{22} = \frac{E^*}{1-\nu^{*2}} \\ C_{12} &= C_{21} = \frac{E^* \nu^*}{1-\nu^{*2}} \\ C_{44} &= C_{55} = C_{66} = G(z) \end{aligned}$$

و در نهایت با داشتن منته‌های نیرو، گشتاور و برش عرضی و با ادغام مؤلفه‌های تنش از جهت Z منته‌های تنش را می‌توان به صورت زیر ساده کرد:

$$\begin{cases} N_r \\ N_\theta \\ N_{r\theta} \\ M_r \\ M_\theta \\ M_{r\theta} \\ Q_r \\ Q_\theta \end{cases} = \begin{cases} \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} z dz \\ K^2 \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \tau_{rz} \\ \tau_{\theta z} \end{bmatrix} dz \\ \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \tau_{rz} \\ \tau_{\theta z} \end{bmatrix}^{(k)} dz \end{cases} \quad (21)$$

در رابطه (21) پارامتر K ضریب تصحیح برشی و برابر با $\frac{5}{6}$ است [65] و با ادغام این رابطه در امتداد ضخامت، برای نیرو و ممان ورق داریم:

$$\begin{bmatrix} N_r \\ N_\theta \\ N_{r\theta} \\ M_r \\ M_\theta \\ M_{r\theta} \\ Q_r \\ Q_\theta \end{bmatrix} = \quad (22)$$



$$\xi = \frac{2r - a^{(e)} - b^{(e)}}{(b^{(e)} - a^{(e)})} \quad (30)$$

$$\eta = \frac{2(\theta - \theta_c)}{\beta^{(e)}}$$

در این رابطه $a^{(e)}$ و $b^{(e)}$ به ترتیب شعاع خارجی و داخلی المان‌ها و همچنین $\beta^{(e)}$ نیز زاویه شعاع المان موردنظر است. توابع شکل درونیابی در مختصات طبیعی و بردار جابه‌جایی هر عنصر به صورت زیر تعریف می‌شوند [۶۸].

$$\begin{Bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \\ \psi_k \\ \psi_m \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} (1+\xi)(1-\eta) \\ (1+\xi)(1+\eta) \\ (1-\xi)(1+\eta) \\ (1-\xi)(1-\eta) \end{Bmatrix} \quad (31)$$

$$Q^{(e)} = \left(\begin{pmatrix} \psi_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \psi_4 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \psi_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \psi_1 \end{pmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_{01} \\ v_{01} \\ w_{01} \\ \varphi_{r1} \\ \varphi_{\theta1} \\ \vdots \\ u_{04} \\ v_{04} \\ w_{04} \\ \varphi_{r4} \\ \varphi_{\theta4} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

$$= \psi q$$

که در آن Ψ_n توابع شکل که $n = 1, 2, 3, 4$ و همچنین Ψ ماتریس توابع شکل هستند. پارامترهای $u_{0i}, v_{0i}, w_{0i}, \varphi_{ri}$ و $\varphi_{\theta i}$ درجات آزادی گره هستند و به صورت تقریبی داریم:

$$u_0 = \sum_{i=1}^4 \psi_i U_{0i} \quad v_0 = \sum_{i=1}^4 \psi_i V_{0i} \quad (33)$$

$$w_0 = \sum_{i=1}^4 \psi_i W_{0i} \quad \varphi_r = \sum_{i=1}^4 \psi_i \theta_{ri}$$

$$\varphi_\theta = \sum_{i=1}^4 \psi_i \theta_{\theta i}$$

و در ادامه با جایگزینی معادله (۳۳) در معادله (۲۹) داریم:

$$\int_{\Omega_0} \left[\begin{pmatrix} (d_3 \psi)^T A^T d_3 \psi + (d_4 \psi)^T B^T d_3 \psi \\ + (d_3 \psi)^T B^T d_4 \psi \\ + (d_4 \psi)^T D^T d_4 \psi + (d_2 \psi)^T e^T d_2 \psi \\ + \psi^T I \psi \ddot{q} \end{pmatrix} q \right] r dr d\theta \quad (34)$$

$$= 0$$

$$d_2 \psi = B_2, \quad d_3 \psi = B_3, \quad d_4 \psi = B_4$$

در نهایت، پس از جمع ماتریس‌های سفتی و جرم هر المان، معادلات اجزای محدود ورق دایره‌ای متخلخل FG-GPL به شرح زیر است.

$$(k_1 + k_2 + k_3) e^q q^e + M e^q \ddot{q}^e = 0 \quad (35)$$

(۲۹)

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \left(\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial t^2} \right) (\delta u_0 + z \delta \varphi_r) \right) dz dA \right] dt$$

$$+ \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial t^2} \right) (\delta v_0 + z \delta \varphi_\theta) dz dA$$

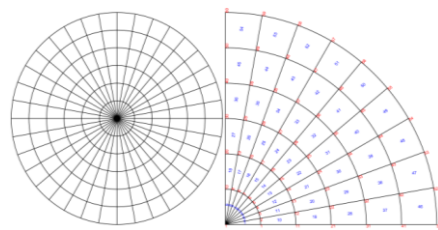
$$+ \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \delta w_0$$

$$+ \int \left(\begin{matrix} ((d_3 Q)^T A^T + (d_4 Q)^T B^T) (d_3 \delta Q) \\ + ((d_3 Q)^T B^T + (d_4 Q)^T D^T) (d_4 \delta Q) \\ + (d_2 Q)^T e^T (d_2 \delta Q) \end{matrix} \right) r dr d\theta$$

$$= 0$$

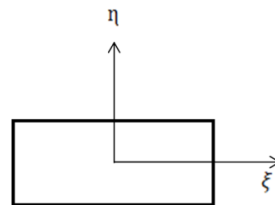
۴-۲ مدل‌سازی اجزای محدود:

در این مقاله روش اجزای محدود برای حل معادلات حرکت حاکم ورق دایره‌ای متخلخل FG-GPL استفاده می‌شود. برای این منظور یک المان دوبعدی ۴ گره‌ای با ۲۰ درجه آزادی (شکل ۶) برای تقریب میدان جابه‌جایی و مش بندی دامنه حل (شکل ۵) اعمال می‌شود.



شکل ۵. شمانیک ورق دایره‌ای شبکه‌بندی شده [۴۷]

دستگاه مختصات طبیعی برای یک المان مستطیلی در شکل ۶ نشان داده شده است. مبدأ این دستگاه در مرکز المان قرار داشته و مؤلفه‌های آن با ξ و η نشان داده می‌شود.



شکل ۶. سیستم مختصات طبیعی عنصر چهار گره‌ای

با توجه به شکل ۶ رابطه بین مؤلفه‌های دستگاه مختصات اصلی و طبیعی با توجه به [۶۸] به صورت رابطه زیر خواهد بود:

۳-۱ صحت‌سنجی نتایج

تصدیق روش ارائه‌شده در این مقاله با مقایسه بین نتایج ارائه‌شده با مرجع [۶۹] با ورق دایره‌ای همگن ایزوتروپ و نسبت $\frac{h}{r} = 0.005$ انجام می‌شود. نتایج عددی حاضر در جدول‌های ۳ و ۴ به ترتیب برای شرایط مرزی گیردار و ساده نشان داده شده است. پارامتر فرکانس بدون بعد به صورت $\Omega = \omega_1 R \sqrt{\rho h / D_0}$ محاسبه می‌شود که در آن $D_0 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ است. مشخص شد که در نتایج به‌دست‌آمده از روش این مطالعه، مطابقت خوبی با مرجع ذکرشده با در نظر گرفتن شرایط مرزی گیردار و ساده در محدوده ۱٪ وجود دارد.

جدول ۳. پنج فرکانس اول ورق دایره‌ای همگن ایزوتروپ با شرایط مرزی گیردار

مرجع	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
مقاله حاضر	۱۰۰۳۰۹۲	۲۱۰۳۹۸۱	۳۴۰۹۹۱۲	۳۹۰۸۷۸۲	۵۱۰۱۷۸۹
[۶۹]	۱۰۰۲۱۶	۲۱۰۲۶	۳۴۰۸۷۷	۳۹۰۷۷۱	۵۱۰۰۳۱

جدول ۴. پنج فرکانس اول ورق دایره‌ای همگن ایزوتروپ با شرایط مرزی ساده

Source	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
مقاله حاضر	۴۰۹۴۸۳	۱۳۰۹۳۸۶	۲۵۰۶۹۶۶	۲۹۰۸۲۰۶	۴۰۰۲۱۰۶
[۶۹]	۴۰۹۳۵۲	۱۳۰۸۹۸	۲۵۰۶۱۵	۲۹۰۷۱۹	۳۹۰۹۵۷

۳-۲ نتایج عددی

با مقایسه فرکانس اول الگوهای مختلف گرافن در تخریل نوع اول با درصد حجمی تخریل $e_0 = 0.2$ حداکثر فرکانس مربوط به GPL-X و حداقل فرکانس مربوط به GPL-O است. همچنین دامنه اختلاف حداکثر و حداقل فرکانس طبیعی در این حالت برابر با ۱۱،۲٪ است.

که در آن ماتریس‌های جرم و سفتی به شرح زیر است:

$$M^e = \int_{\Omega_0^e} \Psi^T I \Psi r dr d\theta$$

$$k_1^e = \int_{\Omega_0^e} [B_3^T A^T + B_4^T B^T] B_3 r dr d\theta$$

$$k_2^e = \int_{\Omega_0^e} [B_3^T B^T + B_4^T D^T] B_4 r dr d\theta, \quad (36)$$

$$k_3^e = \int_{\Omega_0^e} [B_2^T e^T B_2] r dr d\theta$$

ماتریس [I] یک ماتریس اینرسی جرم است و از رابطه (۳۷) به دست می‌آید:

$$I = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & I_1 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & I_1 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

که $I_i, i = 0, 1, 2$

$$\begin{Bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} \rho dz \quad (38)$$

همچنین برای شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار

داریم:

$$u_0, v_0, w_0, \varphi_r, \varphi_\theta = 0 \quad at(a, \theta) \quad (39)$$

و همچنین برای شرایط مرزی ساده^۹ داریم:

$$w_0 = 0 \quad at(a, \theta) \quad (40)$$

و در نهایت برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاش آزاد ورق خواهیم داشت:

$$((k_1 + k_2 + k_3) - M\omega^2)q = 0 \quad (41)$$

۳. نتایج عددی

پاسخ‌های ارتعاشات آزاد ورق دایره‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با گرافن در این بخش بررسی می‌شوند. پارامترهای هندسی و خواص مکانیکی ورق دایره‌ای منطبق با جدول ۲ است.

جدول ۲. خواص هندسی و مکانیکی ورق دایره‌ای

ورق دایره‌ای (مس)	
هندسه	خواص مکانیکی
$r=0.75m$ $h=0.1m$	$E_{GPL} = 1.01TPa$ $\rho_{GPL} = 1062.5 \frac{kg}{m^3}$ $\nu_{GPL} = 0.168$ $l_{GPL} = 2.5\mu m$ $w_{GPL} = 1.5\mu m$ $t_{GPL} = 1.5nm$ $E_m = 130GPa$ $\rho_m = 8960 \frac{kg}{m^3}$ $\nu_m = 0.34$



جدول ۵. مقایسه پنج فرکانس اول نرمال شده الگوهای مختلف گرافن و درصد حجمی تخلخل مختلف (توزیع تخلخل نوع اول، GPLs=1%wt)

تخلخل نوع اول (مقارن)						
GPL pattern	e_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
GPL-X	۰.۲	۰.۹۳۶۱۱ ۶	۰.۹۶۵۸۶ ۳	۱.۰۰۳۱۵۶ ۶	۱.۰۱۴۹۰ ۹	۱.۰۳۳۱۱۲ ۱
	۰.۴	۰.۹۵۴۸۵ ۷	۰.۹۸۴۵۷ ۹	۱.۰۰۵۰۱۱ ۶	۱.۰۱۶۷۷۶ ۳	۱.۰۳۴۹۰۲ ۴
	۰.۶	۰.۹۷۴۷۹ ۴	۱.۰۰۴۴۴ ۹	۱.۰۰۶۹۷۷ ۹	۱.۰۱۸۰۴ ۱	۱.۰۳۶۷۸۷ ۳
GPL-A	۰.۲	۰.۸۷۴۰۸ ۱	۰.۹۰۴۰۲ ۳	۰.۹۷۰۶۵ ۲	۱.۰۰۹۰۳۳ ۷	۱.۰۳۷۴۳۰ ۷
	۰.۴	۰.۸۹۵۹۶ ۵	۰.۹۲۵۸۰ ۷	۰.۹۹۲۰۷ ۴	۱.۰۱۱۱۱۶ ۳	۱.۰۳۹۴۱۸ ۶
	۰.۶	۰.۹۲۱۷۶ ۵	۰.۹۵۱۴۸ ۷	۱.۰۰۱۷۲۸ ۱	۱.۰۱۳۵۰ ۶	۱.۰۳۱۷۴۵ ۱
GPL-V	۰.۲	۰.۸۷۱۶۶ ۶	۰.۹۰۱۶۲ ۹	۰.۹۵۸۲۹ ۵	۱.۰۰۸۸۰۹ ۷	۱.۰۳۷۱۶۶ ۷
	۰.۴	۰.۸۹۵۳۷ ۹	۰.۹۲۵۳۳ ۴	۰.۹۹۱۵۴ ۳	۱.۰۱۰۰۴۸ ۲	۱.۰۳۹۳۷۷ ۳
	۰.۶	۰.۹۲۴۵۱ ۳	۰.۹۵۴۲۰ ۱	۱.۰۰۱۹۸۲ ۹	۱.۰۱۳۷۶۵ ۶	۱.۰۳۱۹۰۲ ۸
GPL-O	۰.۲	۰.۸۴۱۷۶ ۱	۰.۸۷۱۵۲ ۵	۰.۹۳۷۹۱ ۷	۱.۰۰۵۷۲۷ ۹	۱.۰۲۴۰۲۱ ۱
	۰.۴	۰.۸۶۲۹۳ ۴	۰.۸۹۲۳۹ ۱	۰.۹۵۷۸۶ ۲	۱.۰۰۷۵۴۹ ۷	۱.۰۲۵۶۰۹ ۷
	۰.۶	۰.۸۸۹۰۶ ۳	۰.۹۱۸۰۹ ۶	۰.۹۸۲۳۳ ۶	۱.۰۰۹۷۶۵ ۳	۱.۰۲۷۵۰۳ ۸
GPL-UD	۰.۲	۰.۸۸۸۹۳ ۲	۰.۹۱۸۸۶ ۴	۰.۹۵۵۲۵ ۲	۱.۰۰۱۰۴۳ ۸	۱.۰۲۸۷۷۶ ۲
	۰.۴	۰.۹۱۳۳۹ ۲	۰.۹۴۳۳۱ ۳	۱.۰۰۰۹۱۸ ۹	۱.۰۱۲۷۶۵ ۵	۱.۰۳۰۹۸۷ ۳
	۰.۶	۰.۹۴۲۹۴ ۶	۰.۹۷۲۶۲ ۷	۱.۰۰۲۸۰۷ ۳	۱.۰۱۵۵۰۰ ۱	۱.۰۳۳۶۴۹ ۱

حداقل فرکانس مربوط به GPL-O است. همچنین دامنه اختلاف حداکثر و حداقل فرکانس طبیعی در این حالت برابر با ۹.۶۴٪ است.

جدول ۶. مقایسه پنج فرکانس اول نرمال شده الگوهای مختلف گرافن و درصد حجمی تخلخل مختلف (توزیع تخلخل نوع دوم، GPLs=1%wt)

تخلخل نوع دوم (مقارن)						
GPL pattern	e_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
GPL-X	۰.۲	۰.۸۶۱۱۴ ۲	۰.۸۹۰۰۳ ۴	۰.۹۵۴۱۷ ۶	۱.۰۰۶۹۴۰ ۵	۱.۰۲۶۶۴۴ ۴
	۰.۴	۰.۷۹۲۵۲ ۶	۰.۸۲۶۶۹ ۶	۰.۸۸۳۶۱ ۸	۰.۹۹۶۷۶ ۴	۱.۰۱۷۰۱۰۱ ۱
	۰.۶	۰.۷۲۹۱۴ ۷	۰.۷۵۷۵۵ ۹۱	۰.۸۲۱۷۳ ۳	۰.۹۳۷۱۳ ۶	۱.۰۱۱۳۰۱۳ ۱
GPL-A	۰.۲	۰.۷۹۵۴ ۸	۰.۸۲۶۶۶ ۳	۰.۸۹۰۰۷ ۵	۱.۰۰۷۷۲ ۸	۱.۰۱۸۷۶۹ ۷
	۰.۴	۰.۷۲۴۹۹ ۲	۰.۷۵۲۶ ۸۶	۰.۸۱۷۰۰ ۲	۰.۹۳۲۷۱ ۳	۱.۰۱۰۸۹۷ ۱
	۰.۶	۰.۶۴۴۲۲ ۱	۰.۶۷۲۵۴ ۹	۰.۷۳۷۱۰ ۶	۰.۸۵۳۱۴ ۱	۱.۰۰۲۸۵۶ ۱
GPL-V	۰.۲	۰.۷۸۹۷۰ ۴	۰.۸۱۸۹۳ ۶	۰.۸۸۴۴ ۹	۱.۰۰۲۳۹ ۹	۱.۰۱۸۲۶۵ ۹
	۰.۴	۰.۷۱۶۳۴ ۸	۰.۷۴۴۸۹ ۲	۰.۸۰۹۳۵ ۷	۰.۹۲۵۳۱ ۷	۱.۰۱۰۱۸۳ ۳
	۰.۶	۰.۶۳۲۹۴ ۱	۰.۶۶۱۱۴ ۵	۰.۷۲۵۴ ۷۸	۰.۸۴۱۰۷ ۳	۱.۰۱۵۶۷ ۹
GPL-O	۰.۲	۰.۷۶۶۷۱ ۳	۰.۷۹۶۱۲ ۸	۰.۸۶۲۳۱ ۲	۰.۹۸۱۳۸ ۴	۱.۰۱۶۳۰۴ ۶
	۰.۴	۰.۶۹۹۷۹ ۸	۰.۷۲۸۷ ۹۸	۰.۷۹۴۵۵ ۱	۰.۹۱۲۸۰ ۹	۱.۰۰۹۲۳۴ ۶
	۰.۶	۰.۶۲۵۳ ۸	۰.۶۵۴۳ ۷۲	۰.۷۲۰۷۲ ۲	۰.۸۳۶۸ ۲۷	۱.۰۰۱۹۱۹۹ ۱
GPL-UD	۰.۲	۰.۸۰۴۸۶ ۸	۰.۸۳۴۰۲ ۴	۰.۸۹۹۲۸ ۸	۱.۰۰۱۶۶۱۷ ۴	۱.۰۰۱۶۶۱۷ ۴
	۰.۴	۰.۷۲۹۶۱ ۲	۰.۷۵۸۰۸ ۱	۰.۸۲۲۲۴ ۸	۰.۹۲۷۶ ۷۶	۱.۰۱۱۳۶۱۱ ۱
	۰.۶	۰.۶۴۴۵۲ ۸	۰.۶۷۲۷۰ ۷	۰.۷۳۶۸ ۸۲	۰.۸۵۲۲ ۳۶	۱.۰۰۲۶۷۰ ۲

با مقایسه فرکانس اول الگوهای مختلف گرافن در تخلخل نوع اول با درصد حجمی تخلخل $e_0 = 0.2$ حداکثر فرکانس مربوط به GPL-X و حداقل فرکانس مربوط به GPL-O است. همچنین دامنه اختلاف حداکثر و حداقل فرکانس طبیعی در این حالت برابر با ۱۱.۲٪ است.

با مقایسه فرکانس اول الگوهای مختلف گرافن در تخلخل نوع اول با درصد حجمی تخلخل $e_0 = 0.4$ حداکثر فرکانس مربوط به GPL-X و حداقل فرکانس مربوط به GPL-O است. همچنین دامنه اختلاف حداکثر و حداقل فرکانس طبیعی در این حالت برابر با ۱۰.۶٪ است.

با مقایسه فرکانس اول الگوهای مختلف گرافن در تخلخل نوع اول با درصد حجمی تخلخل $e_0 = 0.6$ حداکثر فرکانس مربوط به GPL-X و

با مقایسه فرکانس اول الگوهای مختلف گرافن در تخلخل نوع دوم با درصد حجمی تخلخل $e_0 = 0.2$ حداکثر فرکانس مربوط به GPL-X و حداقل فرکانس مربوط به GPL-O است. همچنین دامنه اختلاف حداکثر و حداقل فرکانس طبیعی در این حالت برابر با ۱۲.۳٪ است. با مقایسه فرکانس اول الگوهای مختلف گرافن در تخلخل نوع دوم با درصد حجمی تخلخل $e_0 = 0.4$ حداکثر فرکانس مربوط به GPL-X و حداقل فرکانس مربوط به GPL-O است.

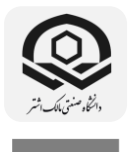
GPL-V			GPL-O			GPL-UD		
0.2	0.4	0.6	0.2	0.4	0.6	0.2	0.4	0.6
0.833534	0.790625	0.751598	0.800245	0.768265	0.73035	0.839661	0.806104	0.766314
0.852568	0.818496	0.77810	0.829944	0.796244	0.756943	0.867837	0.833926	0.792766
0.917333	0.880672	0.837204	0.894607	0.858859	0.816463	0.933119	0.895827	0.851613
1.033773	0.992456	0.943469	1.011895	0.971457	0.916463	1.049012	1.007089	0.957388
1.212348	1.162801	1.106365	1.191374	1.143765	1.087308	1.22684	1.178812	1.119678

با مقایسه فرکانس اول الگوهای مختلف گرافن در تخلخل نوع سوم با درصد حجمی تخلخل $e_0 = 0.2$ ، $e_0 = 0.4$ و همچنین $e_0 = 0.6$ حداکثر فرکانس مربوط به GPL-X و حداقل فرکانس مربوط به GPL-O است. همچنین دامنه اختلاف حداکثر و حداقل فرکانس طبیعی در این حالتها برابر با ۱۱٪ است.

همچنین دامنه اختلاف حداکثر و حداقل فرکانس طبیعی در این حالت برابر با ۱۳,۲٪ است. با مقایسه فرکانس اول الگوهای مختلف گرافن در تخلخل نوع دوم با درصد حجمی تخلخل $e_0 = 0.6$ حداکثر فرکانس مربوط به GPL-X و حداقل فرکانس مربوط به GPL-O است. همچنین دامنه اختلاف حداکثر و حداقل فرکانس طبیعی در این حالت برابر با ۱۶,۵٪ است.

جدول ۷. مقایسه پنج فرکانس اول نرمال شده الگوهای مختلف گرافن و درصد حجمی تخلخل مختلف (توزیع تخلخل نوع سوم، GPLs=1%wt)

تخلخل نوع سوم (یکنواخت)						
GPL pattern	e_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
GPL-A	0.2	0.827095	0.856087	0.920769	1.037068	1.215386
	0.4	0.794036	0.821874	0.883967	0.995618	1.166814
	0.6	0.752844	0.781312	0.840342	0.946482	1.109229
GPL-X	0.2	0.888897	0.917656	0.981268	1.095509	1.271278
	0.4	0.853365	0.880979	0.942058	1.051726	1.220474
	0.6	0.81125	0.837495	0.895562	0.999818	1.160332
GPL pattern	e_0					
	ω_1					
	ω_2					
ω_3						
ω_4						
ω_5						



جدول ۸. مقایسه فرکانس نرمال شده الگوهای مختلف گرافن در شرایط مرزی مختلف و نسبت شعاع به ضخامت مختلف

(توزیع تخلخل نوع اول، $e_0 = 0.2$, $GPLs=1\%wt$)

تخلخل نوع اول (مقارن)						
شرایط مرزی	r/h	GPL-X	GPL-A	GPL-V	GPL-O	GPL-UD
Clamped	۲۰	۰.۰۹۶۴۹۱ ۷	۰.۰۹۱۶۷۱	۰.۱۱۱۲۵۱	۰.۰۸۸۳۵۹ ۳	۰.۰۹۳۵۶۵ ۱
	۳۰	۰.۰۷۰۷۷۹ ۹	۰.۰۶۶۰۵۸	۰.۰۶۵۹۳۴ ۴	۰.۰۶۳۲۹۳ ۳	۰.۰۶۷۳۰۳
	۴۰	۰.۰۵۷۱۱۲ ۳	۰.۰۵۳۳۲	۰.۰۵۳۱۶۶ ۵	۰.۰۵۱۰۴۸ ۳	۰.۰۵۴۲۲۴ ۷
	۵۰	۰.۰۴۸۴۷۶ ۲	۰.۰۴۵۴۲۶ ۷	۰.۰۴۵۲۷۵ ۷	۰.۰۴۳۵۲۷ ۷	۰.۰۴۶۱۰۷ ۳
Simple	۲۰	۰.۰۴۶۶۶۲ ۲	۰.۰۴۶۷۳۴ ۸	۰.۰۴۶۶۱۴ ۵	۰.۰۴۵۶۵۵ ۸	۰.۰۴۶۶۶۹ ۳
	۳۰	۰.۰۴۶۹۴۹ ۸	۰.۰۴۶۷۳۴ ۸	۰.۰۴۶۶۰۲ ۸	۰.۰۴۵۶۶۵ ۸	۰.۰۴۶۶۳۶ ۹
	۴۰	۰.۰۴۶۹۴۴ ۸	۰.۰۴۶۷۱۹ ۹	۰.۰۴۶۵۹۸ ۷	۰.۰۴۵۶۴۰ ۹	۰.۰۴۶۶۲۲ ۷
	۵۰	۰.۰۴۵۷۰۶ ۴	۰.۰۴۳۰۲۴ ۷	۰.۰۴۲۹۱۴ ۳	۰.۰۴۱۳۲۰ ۷	۰.۰۴۳۶۶۱ ۳

شده است. حداکثر فرکانس با تکیه‌گاه ساده مربوط به تخلخل GPL-X با نسبت شعاع به ضخامت ۲۰ است و در همین حالت حداقل فرکانس مربوط به تخلخل GPL-O با نسبت شعاع به ضخامت ۵۰ است که این بیانگر ۱،۳۰٪ اختلاف بین مقادیر مشخص شده است.

جدول ۹. مقایسه فرکانس نرمال شده الگوهای مختلف گرافن در شرایط مرزی مختلف و نسبت شعاع به ضخامت مختلف

(توزیع تخلخل نوع دوم، $e_0 = 0.2$, $GPLs=1\%wt$)

تخلخل نوع دوم (مقارن)						
شرایط مرزی	r/h	GPL-X	GPL-A	GPL-V	GPL-O	GPL-UD
Clamped	۲۰	۰.۰۷۶۴۵۶۶	۰.۰۶۹۳۵۰۷	۰.۰۶۸۴۵۸۴	۰.۰۶۷۲۶۶۹	۰.۰۶۹۶۶۸۵
	۳۰	۰.۰۵۴۸۴۷۲	۰.۰۴۹۸۸۱۲	۰.۰۴۹۲۵۳	۰.۰۴۸۵۰۴۴	۰.۰۵۰۰۶۷۳
	۴۰	۰.۰۴۴۵۳۷۸	۰.۰۴۰۸۴۲۶	۰.۰۴۰۳۷۰۴	۰.۰۳۹۸۹۹۸	۰.۰۴۰۹۶۴۷
	۵۰	۰.۰۳۸۲۰۰۴	۰.۰۳۵۴۶۷۶	۰.۰۳۵۰۹۹	۰.۰۳۴۸۳۲۷	۰.۰۳۵۵۴۷۹
Simple	۲۰	۰.۰۴۳۳۱۹۴	۰.۰۴۳۱۵۹۲	۰.۰۴۳۰۸۳۶	۰.۰۴۲۷۷۰۹	۰.۰۴۳۱۰۲۷
	۳۰	۰.۰۴۳۲۰۹۴	۰.۰۴۳۱۵۰۹	۰.۰۴۳۰۷۶۲	۰.۰۴۲۷۶۴۲	۰.۰۴۳۰۹۵۲
	۴۰	۰.۰۴۳۱۴۶۶	۰.۰۴۳۰۸۱۲۵	۰.۰۴۳۰۵۵۴۳	۰.۰۴۲۷۸۲۵	۰.۰۴۳۱۹۲۷
	۵۰	۰.۰۳۳۶۴۷۵	۰.۰۳۳۸۷۰۶	۰.۰۳۳۵۳۱۲	۰.۰۳۳۲۹۱۳	۰.۰۳۳۹۴۷

حداکثر فرکانس با تکیه‌گاه گیردار^{۱۰} مربوط به تخلخل GPL-X با نسبت شعاع به ضخامت ۲۰ است و در همین حالت حداقل فرکانس مربوط به تخلخل GPL-O با نسبت شعاع به ضخامت ۵۰ است که این بیانگر ۱۲۱،۶٪ اختلاف بین مقادیر مشخص شده است. حداکثر فرکانس با تکیه‌گاه ساده^{۱۱} مربوط به تخلخل GPL-X با نسبت شعاع به ضخامت ۲۰ است و در همین حالت حداقل فرکانس مربوط به تخلخل GPL-O با نسبت شعاع به ضخامت ۵۰ است که این بیانگر ۱۳،۶٪ اختلاف بین مقادیر مشخص شده است. حداکثر فرکانس با تکیه‌گاه گیردار مربوط به تخلخل GPL-X با نسبت شعاع به ضخامت ۲۰ است و در همین حالت حداقل فرکانس مربوط به تخلخل GPL-O با نسبت شعاع به ضخامت ۵۰ است که این بیانگر ۱۱۹،۵٪ اختلاف بین مقادیر مشخص

جدول ۱۰. مقایسه فرکانس نرمال شده الگوهای مختلف گرافن در شرایط مرزی مختلف و نسبت شعاع به ضخامت مختلف

(توزیع تخلخل نوع سوم، $e_0=0.2$ ، $GPLs=1\%wt$)

تخلخل نوع سوم (یکنواخت)		Clamped					Simple					
شرایط مرزی	L-Z	GPL-X	GPL-A	GPL-V	GPL-O	GPL-UD	L-Z	GPL-X	GPL-A	GPL-V	GPL-O	GPL-UD
		۲۰	۰.۰۸۴۰۶۴۹	۰.۰۷۸۳۳۷۱	۰.۰۷۷۹۹۷۶	۰.۰۷۵۸۳۷۱		۰.۰۷۹۴۹۴۹	۲۰	۰.۰۴۲۲۷۰۲	۰.۰۴۲۲۷۰۲	۰.۰۴۲۲۵۹۵
۳۰	۰.۰۶۰۵۸۰۹	۰.۰۵۶۱۶۴۶	۰.۰۵۵۸۴۲۴	۰.۰۵۴۲۵۳۸	۰.۰۵۶۹۱۷۳	۳۰	۰.۰۴۲۲۵۸۶	۰.۰۴۲۲۶۰۲	۰.۰۴۲۲۴۹۵	۰.۰۴۲۲۴۸۷	۰.۰۴۲۲۴۴۵	
۴۰	۰.۰۴۸۸۵۷۱	۰.۰۴۵۴۴۱۷	۰.۰۴۵۱۷۶۹	۰.۰۴۳۹۷۲۶	۰.۰۴۵۹۸۵۳	۴۰	۰.۰۴۲۲۵۴۵	۰.۰۴۲۲۵۷	۰.۰۴۲۲۴۶۲	۰.۰۴۱۶۱۱۲	۰.۰۴۲۲۴۰۴	
۵۰	۰.۰۴۱۵۷۵۵	۰.۰۳۸۸۹۹۶	۰.۰۳۸۶۳۸	۰.۰۳۷۷۵۱۷	۰.۰۳۹۳۰۷۱	۵۰	۰.۰۳۹۳۶۶۱	۰.۰۳۹۳۶۸	۰.۰۳۹۳۷۹۳۱	۰.۰۳۵۹۵۳۱	۰.۰۳۷۲۶	

تخلخل GPL-O با نسبت شعاع به ضخامت ۵۰ است که این بیانگر ۱۲۲٫۶٪ اختلاف بین مقادیر مشخص شده است. حداکثر فرکانس با تکیه‌گاه ساده مربوط به تخلخل GPL-X با نسبت شعاع به ضخامت ۲۰ است و در همین حالت حداقل فرکانس مربوط به تخلخل GPL-O با نسبت شعاع به ضخامت ۵۰ است که این بیانگر ۱۷٫۵٪ اختلاف بین مقادیر مشخص شده است.

جدول ۱۱. مقایسه پنج فرکانس اول نرمال شده با درصد وزنی مختلف گرافن و الگوهای پراکندگی مختلف گرافن (توزیع تخلخل نوع اول، $e_0 = 0.2$)

تخلخل نوع اول (مقارن)						
GPL pattern	%WT GPLs	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
۰.۰۵	۰.۰۵	۰.۰۵	۰.۰۵	۰.۰۵	۰.۰۵	۰.۰۵
۰.۰۹۲۶۱۱	۰.۰۸۳۶۶۵	۰.۰۸۷۴۰۸	۰.۰۸۴۹۷	۰.۰۸۰۶۶	۰.۰۸۰۶۶	۰.۰۸۰۶۶
۰.۰۹۶۵۸۶	۰.۰۸۵۸۷۷	۰.۰۹۰۴۰۲	۰.۰۸۶۶۲	۰.۰۸۰۷۵۱	۰.۰۸۰۷۵۱	۰.۰۸۰۷۵۱
۰.۱۰۳۱۵۶	۰.۰۹۱۷۳۲	۰.۰۹۷۰۶۵	۰.۰۸۶۶۲	۰.۰۸۰۷۵۱	۰.۰۸۰۷۵۱	۰.۰۸۰۷۵۱
۰.۱۰۱۴۹۵	۰.۱۰۳۲۷۸	۰.۱۰۹۰۴۳	۰.۰۹۷۷۴۹	۰.۰۸۵۰۷۶	۰.۰۸۵۰۷۶	۰.۰۸۵۰۷۶
۰.۱۰۳۳۱۱۲	۰.۱۰۸۴۰۵	۰.۱۰۲۷۴۳	۰.۱۰۱۳۵۹۱	۰.۰۹۷۲۰۶	۰.۰۹۷۲۰۶	۰.۰۹۷۲۰۶

حداکثر فرکانس با تکیه‌گاه گیردار مربوط به تخلخل GPL-X با نسبت شعاع به ضخامت ۲۰ است و در همین حالت حداقل فرکانس مربوط به



اول به جای CLPT به همراه رویکرد اجزای محدود استفاده شد. اثر پارامترهای مختلف شامل توزیع و ضرایب تخلخل‌های مختلف، الگو و درصد وزنی نانوپرکننده GPL، شرایط تکیه‌گاهی مختلف و نسبت ضخامت به شعاع مختلف هندسه ورق بر ارتعاشات ورق دایره‌ای بررسی شد. برخی از یافته‌های مهم پژوهش حاضر به شرح زیر است:

- فرکانس طبیعی به دلیل کاهش سفتی و خواص مکانیکی با افزایش کسر حجمی تخلخل کاهش می‌یابد؛

- فرکانس طبیعی در تخلخل نوع اول در مقایسه با سایر تخلخل‌ها بالاتر گزارش شد؛

- در الگوهای مختلف تخلخل مشاهده شد توزیع گرافن نوع GPL-X، فرکانس‌های بالاتری ارائه می‌دهد. می‌توان نتیجه گرفت که افزایش خواص و سفتی مواد در سطوح بالا و پایین، تأثیر قابل توجهی بر افزایش فرکانس‌های طبیعی دارد. همچنین با بیانی دیگر می‌توان گفت که در ورق تقویت شده با GPL-X، با توجه به ماهیت و الگوی این نوع از گرافن که باعث افزایش خواص و سفتی مواد در سطوح بالا و پایین می‌شود، فرکانس‌های بالاتری مشاهده می‌شود؛

- در تمام الگوهای مختلف تخلخل مشاهده شد که ورق تقویت شده با توزیع گرافن نوع GPL-O، فرکانس‌های طبیعی پایین‌تری نسبت به سایر توزیع‌ها دارد. می‌توان نتیجه گرفت، خواص مواد در بخش‌های میانی راستای ضخامت تأثیر کمتری بر ارتعاشات دارد.

- در شرایط تکیه‌گاه گیردار در مقایسه با تکیه‌گاه ساده، فرکانس‌های طبیعی ورق محدوده بسیار بالاتری دارند. تکیه‌گاه گیردار سفتی بالاتری ارائه می‌دهد و نتایج حاصل نیز با این موضوع در انطباق هستند؛

- ورق با نسبت‌های کوچک‌تری از شعاع به ضخامت نیز فرکانس‌های طبیعی بالاتری دارد. این بدان معناست که با افزایش ضخامت، سفتی

	۰	۰.۰۶۸۷۰۱	۰.۰۶۹۴۳	۰.۰۷۴۴۵۸	۰.۰۸۵۳۲۷	۰.۰۹۷۳۳۲
GPL-O	۱	۰.۰۸۴۵۴۴	۰.۰۸۹۳۸۹	۰.۰۹۵۶۸۹	۰.۱۰۶۹۹۶	۰.۱۳۴۴۶۸
	۰.۵	۰.۰۷۳۳۵۷	۰.۰۷۹۴۶۶	۰.۰۸۵۰۲۶	۰.۰۹۵۴۵۳	۰.۱۰۳۳۳۳
	۰	۰.۰۶۷۰۷۲	۰.۰۶۷۷	۰.۰۷۲۴۰۴	۰.۰۸۲۵۳۳	۰.۰۹۳۷۶۹
GPL-UD	۱	۰.۰۹۳۲۷۸	۰.۰۹۵۰۳۶	۰.۱۰۱۳۴۱	۰.۱۰۳۶۶۱	۰.۱۳۰۱۱۵
	۰.۵	۰.۰۸۳۳۹۳	۰.۰۸۴۵۱۷	۰.۰۹۰۱۴۳	۰.۱۰۰۰۷۱۸	۰.۱۱۵۷۶۶
	۰	۰.۰۷۱۳۳۳	۰.۰۷۱۹۲۶	۰.۰۷۶۷۵۹	۰.۰۸۲۱۱۵	۰.۰۹۸۷۲۷

در مقایسه تأثیر درصد وزنی گرافن در توزیع‌های مختلف گرافن مشاهده شد که حداکثر فرکانس مربوط به ۱٪ وزنی گرافن و توزیع گرافن نوع GPL-X است و همچنین حداقل فرکانس مربوط به ۰٪ وزنی گرافن و توزیع گرافن نوع GPL-O است. حداکثر اختلاف ناشی از درصد وزنی گرافن در توزیع‌های مختلف ۳۰٪ است.

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله، رفتار ارتعاش آزاد یک ورق دایره‌ای ساخته شده از مواد متخلخل FG تقویت شده با نانوذرات گرافن برای اولین بار بررسی شد. از این‌رو، بهترین الگوی GPL و توزیع تخلخل زمانی که ورق تحت تأثیر ارتعاش قرار دارد به دست می‌آید. برای استخراج و حل معادله حاکم بر حرکت ورق، از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه



dependent postbuckling analysis of graphene reinforced composite microtubes with geometrical imperfection. International Journal of Mechanical Sciences, 2021. 199: pp. 106428.

[10] Huang, Y., et al., *Static stability analysis of carbon nanotube reinforced polymeric composite doubly curved micro-shell panels*. Archives of Civil and Mechanical Engineering, 2021. 21(4): pp. 1-15.

[11] Zerrouki, R., et al., *Effect of nonlinear FG-CNT distribution on mechanical properties of functionally graded nano-composite beam*. Structural Engineering and Mechanics, An Int'l Journal, 2021. 78(2): pp. 117-124.

[12] Salgarello, M., G. Visconti, and L. Barone-Adesi, *Interlocking circumareolar suture with undyed polyamide thread: a personal experience*. Aesthetic plastic surgery, 2013. 37(5): pp. 1061-1062.

[13] Heidari, F., et al., *On the mechanics of nanocomposites reinforced by wavy/defected/aggregated nanotubes*. Steel and Composite Structures, An International Journal, 2021. 38(5): pp. 533-545.

[14] Bendenia, N., et al., *Deflections, stresses and free vibration studies of FG-CNT reinforced sandwich plates resting on Pasternak elastic foundation*. Computers and Concrete, An International Journal, 2020. 26(3): pp. 213-226.

[15] Al-Furjan, M.S.H., et al., *A comprehensive computational approach for nonlinear thermal instability of the electrically FG-GPLRC disk based on GDQ method*. Engineering with Computers, 2020: pp. 1-18.

[16] Al-Furjan, M., et al., *Chaotic simulation of the multi-phase reinforced thermo-elastic disk using GDQM*. Engineering with Computers, 2020: pp. 1-24.

[17] Al-Furjan, M., et al., *Frequency simulation of viscoelastic multi-phase reinforced fully symmetric systems*. Engineering with Computers, 2020: pp. 1-17.

[18] Kiarasi, F., et al., *Dynamic analysis of functionally graded carbon nanotube*

سازه افزایش و در نتیجه فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابد؛
- مشخص شد با افزایش ۱ درصد وزنی گرافن فرکانس‌های طبیعی تا ۳۰٪ افزایش می‌یابد.

۵. مآخذ

[1] Smith, B., et al., *Steel foam for structures: A review of applications, manufacturing and material properties*. Journal of Constructional Steel Research, 2012. 71: pp. 1-10.

[2] Biratu, A.A. and D.K. Asmamaw, *Farmers' perception of soil erosion and participation in soil and water conservation activities in the Gusha Temela watershed, Arsi, Ethiopia*. International Journal of River Basin Management, 2016. 14(3): pp. 329-336.

[3] Lefebvre, L.P., J. Banhart, and D.C. Dunand, *Porous metals and metallic foams: current status and recent developments*. Advanced engineering materials, 2008. 10(9): pp. 775-787.

[4] Xia, X., et al., *Effects of porosity and pore size on the compressive properties of closed-cell Mg alloy foam*. Journal of Magnesium and Alloys, 2013. 1(4): pp. 330-335.

[5] Mittal, G., et al., *A review on carbon nanotubes and graphene as fillers in reinforced polymer nanocomposites*. Journal of Industrial and Engineering Chemistry, 2015. 21: pp. 11-25.

[6] Rafiee, M.A., et al., *Enhanced mechanical properties of nanocomposites at low graphene content*. ACS nano, 2009. 3(12): pp. 3884-3890.

[7] Chen, D., J. Yang, and S. Kitipornchai, *Nonlinear vibration and postbuckling of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite beams*. Composites Science and Technology, 2017. 142: pp. 235-245.

[8] Zhang, Y.Y., et al., *On snap-buckling of FG-CNTR curved nanobeams considering surface effects*. Steel Compos. Struct, 2021. 38(3): pp. 293-304.

[9] Lu, L., G.-L. She, and X. Guo, *Size-*



Proceedings of the First International Symposium on Functionally Graded Materilas, FGM Forum, Tokyo, Japan. 1990.

- [30] Saleh, B., et al., *30 Years of functionally graded materials: An overview of manufacturing methods, Applications and Future Challenges.* Composites Part B: Engineering, 2020. 201: pp. 108-376.
- [31] Tahir, S.I., et al., *An integral four-variable hyperbolic HSDT for the wave propagation investigation of a ceramic-metal FGM plate with various porosity distributions resting on a viscoelastic foundation.* Waves in Random and Complex Media, 2021: pp. 1-24.
- [32] Tahir, S.I., et al., *Wave propagation analysis of a ceramic-metal functionally graded sandwich plate with different porosity distributions in a hygro-thermal environment.* Composite Structures, 2021. 269: pp. 114-130.
- [33] Kumar, Y., A. Gupta, and A. Tounsi, *Size-dependent vibration response of porous graded nanostructure with FEM and nonlocal continuum model.* Advances in nano research, 2021. 11(1): pp. 1-17.
- [34] Bellifa, H., et al., *Influence of porosity on thermal buckling behavior of functionally graded beams.* Smart Structures and Systems, 2021. 27(4): pp. 719-728.
- [35] Guellil, M., et al., *Influences of porosity distributions and boundary conditions on mechanical bending response of functionally graded plates resting on Pasternak foundation.* Steel and Composite Structures, 2021. 38(1): pp. 1-15.
- [36] Bekkaye, T.H.L., et al., *Porosity-dependent mechanical behaviors of FG plate using refined trigonometric shear deformation theory.* Computers and Concrete, An International Journal, 2020. 26(5): pp. 439-450.
- [37] Liu, J., H. Yan, and K. Jiang, *Mechanical properties of graphene platelet-reinforced alumina ceramic composites.* Ceramics International, 2013. 39(6): pp. 6215-6221.
- [38] Kvetková, L., et al., *Fracture toughness and toughening mechanisms in graphene platelet reinforced Si3N4 (FGCNT) reinforced composite beam resting on viscoelastic foundation subjected to impulsive loading.* Journal of Computational Applied Mechanics, 2022. 53(1): pp. 1-23.
- [19] She, G.-L., H.-B. Liu, and B. Karami, *Resonance analysis of composite curved microbeams reinforced with graphene nanoplatelets.* Thin-Walled Structures, 2021. 160: pp. 107-407.
- [20] Zhai, Q., et al., *Estimation of wetting hydraulic conductivity function for unsaturated sandy soil.* Engineering Geology, 2021. 285: pp. 106-134.
- [21] Asgari, G.R., et al., *Dynamic instability of sandwich beams made of isotropic core and functionally graded graphene platelets-reinforced composite face sheets.* International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2022: pp. 225-292.
- [22] Al-Furjan, M., et al., *On the vibrations of the imperfect sandwich higher-order disk with a lactic core using generalize differential quadrature method.* Composite Structures, 2021. 257: pp. 113-150.
- [23] Al-Furjan, M., et al., *Non-polynomial framework for stress and strain response of the FG-GPLRC disk using three-dimensional refined higher-order theory.* Engineering Structures, 2021. 228: pp. 111-496.
- [24] Zhou, C., P. Wang, and W. Li, *Fabrication of functionally graded porous polymer via supercritical CO2 foaming.* Composites Part B: Engineering, 2011. 42(2): pp. 318-325.
- [25] García-Moreno, F., *Commercial applications of metal foams: Their properties and production.* Materials, 2016. 9(2): pp. 85.
- [26] Miyamoto, Y., et al., *Processing and fabrication,* in *Functionally Graded Materials.* 1999, Springer. pp. 161-245.
- [27] Slater, A.G. and A.I. Cooper, *Function-led design of new porous materials.* Science, 2015. 348(6238): pp. 75-80.
- [28] She, G.-L., *Guided wave propagation of porous functionally graded plates: The effect of thermal loadings.* Journal of Thermal Stresses, 2021. 4: pp. 1289-1305.
- [29] Yamanouchi, M., et al. *FGM-90.* in



- 1408.
- [47] Allahverdizadeh, A., M. Naei, and M.N. Bahrami, *Nonlinear free and forced vibration analysis of thin circular functionally graded plates*. Journal of sound and vibration, 2008. 310(4-5): pp. 966-984.
- [48] Wirowski, A. *Free vibrations of thin annular plates made from functionally graded material*. in *PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*. 2009. Wiley Online Library.
- [49] Tariq, M., et al., *Effect of hybrid reinforcement on the performance of filament wound hollow shaft*. Composite Structures, 2018. 184: pp. 378-387.
- [50] Ferreira, A.J., et al., *Analysis of functionally graded plates by a robust meshless method*. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2007. 14(8): pp. 577-587.
- [51] Ferreira, A., et al., *Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method*. Composite Structures, 2006. 75(1-4): pp. 593-600.
- [52] Zheng, J., X. Yang, and S. Long, *Topology optimization with geometrically non-linear based on the element free Galerkin method*. International Journal of Mechanics and Materials in Design, 2015. 11(3): pp. 231-241.
- [53] Shariyat, M. and M. Alipour, *Differential transform vibration and modal stress analyses of circular plates made of two-directional functionally graded materials resting on elastic foundations*. Archive of Applied Mechanics, 2011. 81(9): pp. 1289-1306.
- [54] Li, S.-R., X. Wang, and R.C. Batra, *Correspondence relations between deflection, buckling load, and frequencies of thin functionally graded material plates and those of corresponding homogeneous plates*. Journal of Applied Mechanics, 2015. 82:(11) pp. 106-111.
- [55] Lal, R. and N. Ahlawat, *Buckling and vibration of functionally graded non-uniform circular plates resting on Winkler foundation*. Latin American Journal of Solids and Structures, 2015. 12: pp. 2231-2258.
- [56] Swaminathan, K., et al., *Stress, composites*. Scripta Materialia, 2012. 66(10): pp. 793-796.
- [39] Barati, M.R. and A.M. Zenkour, *Post-buckling analysis of refined shear deformable graphene platelet reinforced beams with porosities and geometrical imperfection*. Composite Structures, 2017. 181: pp. 194-202.
- [40] Barati, M.R. and A.M. Zenkour, *Vibration analysis of functionally graded graphene platelet reinforced cylindrical shells with different porosity distributions*. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2019. 26(18): pp. 1580-1588.
- [41] Yang, J., D. Chen, and S. Kitipornchai, *Buckling and free vibration analyses of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite plates based on Chebyshev-Ritz method*. Composite Structures, 2018. 193: pp. 281-294.
- [42] Kitipornchai, S., D. Chen, and J. Yang, *Free vibration and elastic buckling of functionally graded porous beams reinforced by graphene platelets*. Materials & Design, 2017. 116: pp. 656-665.
- [43] Gao, K., et al., *Nonlinear free vibration of functionally graded graphene platelets reinforced porous nanocomposite plates resting on elastic foundation*. Composite Structures, 2018. 204: pp. 831-846.
- [44] Shahgholian-Ghahfarokhi, D., et al., *Buckling analyses of FG porous nanocomposite cylindrical shells with graphene platelet reinforcement subjected to uniform external lateral pressure*. Mechanics Based Design of Structures and Machines, 2021. 49(7): pp. 1059-1079.
- [45] Shahgholian-Ghahfarokhi, D., M. Safarpour, and A. Rahimi, *Torsional buckling analyses of functionally graded porous nanocomposite cylindrical shells reinforced with graphene platelets (GPLs)*. Mechanics Based Design of Structures and Machines, 2021. (1)49: pp. 81-102.
- [46] Ebrahimi, F. and A. Rastgo, *An analytical study on the free vibration of smart circular thin FGM plate based on classical plate theory*. Thin-Walled Structures, 2008. 46(12): pp. 1402-



foundations in thermal environments. *Nonlinear Dynamics*, 2017. 90(2): pp. 899-914.

- [66] Babaei, M. and K. Asemi, *Static, dynamic and natural frequency analyses of functionally graded carbon nanotube annular sector plates resting on viscoelastic foundation*. *SN Applied Sciences*, 2020. 2(10): pp. 1-21.
- [67] Asemi, K., M. Babaei, and F. Kiarasi, *Static, natural frequency and dynamic analyses of functionally graded porous annular sector plates reinforced by graphene platelets*. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2020: pp. 1-29.
- [68] Shariyat, M. and K. Asemi, *Three-dimensional non-linear elasticity-based 3D cubic B-spline finite element shear buckling analysis of rectangular orthotropic FGM plates surrounded by elastic foundations*. *Composites Part B: Engineering*, 2014. 56: pp. 934-947.
- [69] Zhou, Z., et al., *Natural vibration of circular and annular thin plates by Hamiltonian approach*. *Journal of Sound and Vibration*, 2011. 330(5): pp. 1005-1017.

vibration and buckling analyses of FGM plates—A state-of-the-art review. *Composite Structures*, 2015. 120: pp. 10-31.

- [57] Arefi, M., *The effect of different functionalities of FGM and FGPM layers on free vibration analysis of the FG circular plates integrated with piezoelectric layers*. *Smart Structures and Systems*, 2015. 15(5): pp. 1345-1362.
- [58] Arshid, E., et al., *Asymmetric free vibration analysis of first-order shear deformable functionally graded magneto-electro-thermo-elastic circular plates*. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2019. 233(16): pp. 5659-5675.
- [59] Singh, PP. and M.S. Azam, *Buckling and free vibration characteristics of embedded inhomogeneous functionally graded elliptical plate in hygrothermal environment*. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*, 2021. 235(5): pp. 1046-1065.
- [60] Czarnocki, P. and T. Zagrajek, *Sequence of damage events occurring in the course of low energy impact*. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 2016. 16: pp. 825-834.
- [61] Ashby, M.F., et al., *Metal foams: a design guide*. 2000: Elsevier.
- [62] Kiarasi, F., et al., *A review on functionally graded porous structures reinforced by graphene platelets*. *Journal of Computational Applied Mechanics*, 2021. 52(4): pp. 731-750.
- [63] Khatounabadi, M., M. Jafari, and K. Asemi, *Low-velocity impact analysis of functionally graded porous circular plate reinforced with graphene platelets*. *Waves in Random and Complex Media*, 2022: pp. 1-27.
- [64] Kiarasi, F., et al., *Free vibration analysis of FG porous joined truncated conical-cylindrical shell reinforced by graphene platelets*. *Advances in nano research*, 2021. 11(4): pp. 361-380.
- [65] Shen, H-S, F. Lin, and Y. Xiang, *Nonlinear vibration of functionally graded graphene-reinforced composite laminated beams resting on elastic*

۵. پی‌نوشت

- 1 Carbon Nano-Tubes
- 2 Graphene Platelets
- 3 First-Order Shear Deformation Theory
- 4 Functionally Graded Material
- 5 Hyperbolic Higher-Order shear Deformation Theory
- 6 Differential Quadrature Method
- 7 Halpin-Tsai
- 8 Clamp
- 9 Simple
- 10 Clamped Support
- 11 Simple Support

