

# مطالعه اثر بستر الاستیک بر روی ویژگی‌های ارتعاشی پوسته استوانه‌ای تقویت شده از جنس مواد مدرج تابعی بهینه

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۷/۰۵

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۱/۰۵

سعید بختیارآقاملکی<sup>۱</sup>، امیرحسین هاشمیان<sup>۲\*</sup>، مهدی فکور<sup>۳</sup>

۱- دانشجوی دکترای هوافضا، گروه مهندسی هوافضا، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران  
\*۲- استادیار، گروه مهندسی هوافضا، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران amir\_hashemian@srbiau.ac.ir  
۳- استاد، گروه مهندسی هوافضا دانشکده فناوری های نوین، دانشگاه تهران

## چکیده

بررسی رفتار ارتعاشی و بهینه‌سازی پوسته برای افزایش فرکانس‌های طبیعی بخش مهمی از مطالعات محققین سازه می باشد. در این تحقیق، بهینه‌سازی پوسته‌ای از جنس مواد مدرج تابعی که با تقویت کننده‌های افقی و عمودی تقویت شده است و بر روی بستر الاستیک قرار دارد مورد مطالعه قرار گرفته است. معادلات حاکم بر پوسته بر اساس تکنیک تقویت کننده‌های لختیتسکی و استفاده از اصل همپلتون با در نظر گرفتن نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول پوسته و با کمک روش اجزای محدود به دست آمده است. پوسته با استفاده از الگوریتم ژنتیک بهینه می‌شود. در بهینه‌سازی حاضر وزن سازه و فرکانس‌های آن بترتیب قید و تابع هدف می‌باشند و پارامترهای درصد کسر حجمی، ضخامت پوسته و تقویت کننده‌ها و ضریب سفتی بستر الاستیک متغیرهای بهینه‌سازی می‌باشند. نتایج بدست آمده نشان دهنده افزایش فرکانس در وزن ثابت بوده‌اند که کارایی الگوریتم بهینه‌سازی حاضر را نشان داده‌اند. همچنین میرایی برای بستر الاستیک در نظر گرفته شده‌است تا میزان تاثیر بهینه‌سازی در پاسخ زمانی پوسته تحت ارتعاش را نمایان کند.

واژه‌های کلیدی: پوسته استوانه‌ای تقویت شده، مواد مدرج تابعی، روش اجزا محدود، فرکانس طبیعی، الگوریتم ژنتیک، ارتعاشات میرا

## Study of the effect of elastic foundation on the vibration characteristics of a cylindrical shell reinforced with optimally functional graded materials

Saeid Bakhtiyar Aghamaleki<sup>1</sup>, Amir H. Hashemian<sup>2</sup>, Mahdi Fakoore<sup>3</sup>

1- Ph.D. Candidate, Department of Aerospace Engineering, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran  
2- Department of Aerospace Engineering, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran  
3- Faculty of New Sciences & Technologies, University of Tehran, Tehran, Iran

### Abstract

Investigating vibration behavior and optimizing the shell to increase natural frequencies is an important part of structural researchers' studies. In this research, the optimization of a shell made of functionally graded materials reinforced with horizontal and vertical reinforcements and placed on an elastic foundation has studied. The governing equations of the shell obtained based on the Lekhnitsky reinforcement technique and using Hamilton's principle, considering the first-order shear deformation theory of the shell and with the help of the finite element method. The shell optimized using a genetic algorithm. In the present optimization, the weight of the structure and its frequencies are the constraint and objective function, respectively, and the parameters of volume fraction percentage, shell and reinforcement thickness, and elastic foundation stiffness coefficient are the optimization variables. The results obtained showed an increase in frequency at constant weight, which demonstrated the effectiveness of the present optimization algorithm. Damping also considered the elastic foundation to show the effect of optimization on the time response of the shell under vibration.

**Keywords:** FGM stiffened cylindrical shell. Free vibration. FEM. Natural frequency. Genetic Algorithm. Damped vibrations.

۱۸۹

سال ۱۳- شماره ۲  
پاییز و زمستان ۱۴۰۳  
نشریه علمی  
دانش و فناوری هوافضا



مطالعه اثر بستر الاستیک بر روی ویژگی‌های ارتعاشی پوسته استوانه‌ای تقویت شده از جنس مواد مدرج تابعی بهینه



## ۱. مقدمه

سازه‌های پوسته‌ای و صفحه‌ای کاربردهای گسترده‌ای در رشته‌های مهندسی و صنایع مختلف دارند که مطالعات این نوع سازه‌ها به طور خاص توجه بسیاری از دانشمندان در سراسر جهان را به خود جلب کرده است. استفاده از مواد FG<sup>۱</sup> در دهه‌های اخیر در صنایع گوناگون از جمله هوافضا رشد فوق‌العاده‌ای پیدا کرده است. توانایی ایجاد خواص مکانیکی دلخواه و نیز مقاومت به وزن بالای آنها و تنوع در طراحی و ساخت با توجه به موقعیت مورد استفاده، جایگاه ویژه‌ای را برای این مواد در صنعت ایجاد کرده است [۱-۵]. مزیت استفاده از این مواد کاهش تمرکز تنش در جسم جامد و مقاومت بالا در برابر بارهای مکانیکی بالا، گرادیان دمایی بالا، رشد ترک، جدا شدن لایه شکننده بر روی مواد نرم، خوردگی، اصطکاک و شکست می‌باشد [۶]. ارتعاشات و کنترل آنها در شرایط کاری از پارامترهای مهمی است که در طراحی و تحلیل سازه مورد توجه قرار می‌گیرد. بنابراین رفتار ارتعاشی سازه، میرایی و به ویژه فرکانس‌های طبیعی سیستم و عوامل مؤثر بر مقادیر آنها باید مورد بررسی قرار گیرد [۷-۹]. اولین گام برای بررسی و شبیه‌سازی دقیق مسئله و انجام مطالعات پارامتریک، تعریف پارامترها و عوامل مؤثر است. همت نژاد و همکاران [۱۰] فرمول‌های نظری مبتنی بر نظریه پوسته FOSDT<sup>۲</sup>، اثرات تغییر شکل برشی عرضی و اینرسی چرخشی را مورد مطالعه قرار دادند. چیت و همکاران [۱۱] ارتعاشات میرا شده روی لایه‌های کامپوزیت پوسته استوانه‌ای را با استفاده از تئوری FOSDT، روش انرژی و اصل همپلتون مورد مطالعه قرار دادند. نجفی زاده و همکاران [۱۲] به منظور

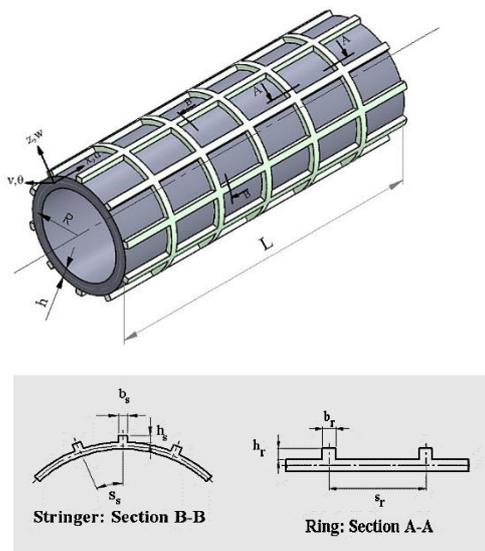
بررسی فرکانس‌های طبیعی و تأثیر کسر حجمی و پیکربندی مواد تشکیل دهنده، ارتعاش پوسته-های استوانه‌ای مدرج تابعی را بر اساس تئوری صفحه TOSDT<sup>۳</sup> با حضور رینگ‌ها بررسی کردند. معادلات حاکم با استفاده از تابع انرژی به دست آمده و سپس با بکار بردن روش ریلی ریتز حل شده است. ظفر اقبال و همکاران [۱۳] تغییرات فرکانس‌های پوسته را برای شرایط مرزی مختلف مورد مطالعه قرار دادند و فرکانس‌های ارتعاش پوسته‌های استوانه‌ای مدور مدرج تابعی را با استفاده از قانون کسر حجمی و روش انتشار موج بررسی نمودند. مقصودی و همکاران [۱۴] بهینه‌سازی پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده از جنس کامپوزیت چند لایه تحت قید وزن را با متغیرهای بهینه‌سازی ضخامت، شعاع، طول پوسته، تعداد تقویت کننده‌های طولی و محیطی، و ابعاد مقطع تقویت کننده‌ها، با استفاده از الگوریتم ژنتیک با هدف بیشینه نمودن فرکانس طبیعی را مورد مطالعه قرار دادند. همچنین معادلات را با روش ریلی ریتز و روابط سنדרز حل نمودند. آنها به ویژگی‌های ارتعاشی پوسته ایزوتروپیک دست یافتند و آن را با پوسته چند لایه مقایسه کردند. سوفیاف [۱۵] کمانش پوسته‌های نازک استوانه‌ای دارای مدرج تابعی متشکل از سرامیک و فلز را تحت بارگذاری ضربه‌ای غیر دوره‌ای<sup>۴</sup> تحت فشار خارجی با استفاده از معادلات دائل اصلاح شده و نظریه پوسته لاو مورد مطالعه و بررسی قرار داد. او همچنین از روش گالرکین و ریتز برای به دست آوردن مقادیر پارامتر بحرانی استفاده نمود. ژائو و همکاران [۱۶] ارتعاشات چرخش پوسته‌های استوانه‌ای دوار ورقه‌ای چند لایه را با تقویت کننده‌های حلقه‌ای و استرینگر بررسی نمودند و از روش‌های انرژی و ریلی ریتز استفاده نمودند. مصطفی

و همکاران [۱۷] مطالعه‌ای برای استفاده از روش انرژی برای آنالیز ارتعاش آزاد پوسته‌های استوانه‌ای مدور تقویت‌شده ارائه نمودند. معادلات انرژی منجر به یک مسئله مقدار ویژه می‌شود که به صورت عددی حل می‌شود. تران و همکاران [۱۸] ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای دایره‌ای مدرج تابعی تقویت شده که بر بستر وینکلر-پاسترناک با شرایط مرزی مختلف تحت محیط حرارتی قرار گرفته است، را بررسی نمودند. آنها در کارشان برای توسعه یک راه حل تحلیلی از فرکانس‌های طبیعی برای ساختار پوسته استوانه‌ای FG تقویت شده که بر بستر الاستیک قرار دارد، از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، تکنیک تقویت شده لخنیتسکی، اصل همپلتون و روش گالرکین استفاده کردند. نگوین و همکاران [۱۹] یک راه حل تحلیلی برای ارتعاش آزاد ساختار پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده که بر بستر الاستیک قرار دارد بدست آوردند. این مطالعه بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT)، یک راه حل تحلیلی بر بستر وینکلر-پاسترناک با چندین شرایط مرزی، با تکنیک تقویت‌کننده‌های لخنیتسکی و روش گالرکین را ارائه نمود. رویکرد ما در این تحقیق بررسی رفتار ارتعاشی پوسته استوانه‌ای تقویت شده FG بر بستر الاستیک شامل اثرات میرایی است که در مطالعات قبلی انجام‌شده توسط سایر محققین، ذکر نشده است. علاوه بر این، دستیابی به بالاترین فرکانس طبیعی به عنوان یک تابع هدف در بهینه‌سازی پارامترهای هندسی در نظر گرفته شد. همچنین تأثیر شاخص کسر حجمی در تحلیل فرکانس طبیعی و تأثیر پارامترهای بستر الاستیک مورد بررسی و اعتبارسنجی قرار گرفت. معادلات تعادل با استفاده از نظریه تغییر

شکل برشی مرتبه اول، اثر میرایی و اصل همپلتون به دست آمده است.

## ۲. شرح هندسه

در این بخش معادلات حاکم برای پوسته استوانه‌ای تقویت شده FG که بر بستر الاستیک قرار دارد، به دست آمده است. ابعاد هندسی ساختار پوسته استوانه‌ای به شرح زیر است: شعاع،  $h$  ضخامت و  $L$  طول ساختار پوسته استوانه‌ای FG در سیستم مختصات  $(x, \theta, z)$  است. سازه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی همانطور که در شکل ۱ نشان داده شده است، توسط رینگ‌ها (تقویت کننده‌های محیطی) و استرینگرها (تقویت کننده های طولی)، تقویت می‌شود.



شکل ۱. هندسه و سیستم مختصات مرجع پوسته استوانه ای FG تقویت شده [۱۸]

خواص مواد پوسته استوانه‌ای به طور مداوم و هموار در سراسر جهت ضخامت با توجه به توزیع قانون کسر حجمی اجزای تشکیل دهنده تغییر می‌کند. مدول الاستیسیته، نسبت پواسون و چگالی مواد FG باید تابعی از ضخامت ( $z$ ) باشد. این تغییر خواص مطابق رابطه زیر فرض



می‌شود [۱۸]:

$$P(z, T) = P_i + (P_o - P_i) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad (۱)$$

زیر مجموعه های "O" و "i" به ترتیب نشان دهنده خواص مادی سطوح بیرونی و داخلی است. مدول الاستیسیته، چگالی و نسبت پواسون مواد پوسته به صورت رابطه (۲) در نظر گرفته شده است [۱۹]:

$$E(z) = (E_1 - E_2) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_2$$

$$\rho(z) = (\rho_1 - \rho_2) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \rho_2 \quad (۲)$$

$v(z) = (v_1 - v_2) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + v_2$   
که در آن P شاخص کسر حجمی است و  $E_1, \rho_1, v_1$  به ترتیب مدول الاستیسیته، جرم چگالی و نسبت پواسون ماده در سطح خارجی پوسته استوانه‌ای هستند. همچنین  $E_2, \rho_2, v_2$  مدول الاستیسیته، جرم چگالی و نسبت پواسون ماده در سطح داخلی پوسته استوانه‌ای FG هستند.

### ۳. فرمول‌های تئوری

در این مطالعه، با توجه به تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT)، میدان جابجایی یک نقطه واقع در سطح میانی ساختار پوسته استوانه ای مدرج تابعی به صورت رابطه زیر تعریف می شود [۱۸ و ۲۴]:

$$u(x, \theta, z, t) = u_0(x, \theta, t) + z \cdot \phi_x(x, \theta, t)$$

$$v(x, \theta, z, t) = v_0(x, \theta, t) + z \cdot \phi_\theta(x, \theta, t) \quad (۳)$$

$u, v, w$  اجزای جابجایی در امتداد جهات  $x, \theta, z$  و هستند، در حالی که  $u_0, v_0, w_0$  اجزای جابجایی در نقطه‌ای هستند که در سطح میانی پوسته استوانه‌ای قرار دارند و  $\phi_x(x, \theta, t)$

به ترتیب چرخش‌های عرضی نرمال  $\Phi_\theta(x, \theta, t)$  به سطح وسط پوسته استوانه‌ای حول محور  $x$  و  $\theta$  می‌باشند. روابط بین کرنش‌ها و اجزای جابجایی پوسته به شکل زیر است:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z \cdot k_x$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^0 + z \cdot k_\theta \quad (۴)$$

$$\gamma_{x\theta} = \gamma_{x\theta}^0 + z \cdot k_{x\theta}$$

$$\gamma_{\theta z} = \gamma_{\theta z}^0$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{xz}^0$$

که در آن [۱۹]:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}; \quad \varepsilon_\theta^0 = \frac{\partial v_0}{R \partial \theta} + \frac{w_0}{R};$$

$$\gamma_{x\theta}^0 = \frac{\partial u_0}{R \partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial x};$$

$$k_x = \frac{\partial \phi_x}{\partial x}; \quad k_\theta = \frac{\partial \phi_\theta}{R \partial \theta};$$

$$k_{x\theta} = \frac{\partial \phi_x}{R \partial \theta} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x};$$

$$\gamma_{\theta z}^0 = \phi_\theta + \frac{\partial w_0}{R \partial \theta} - \frac{v_0}{R};$$

$$\gamma_{xz}^0 = \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

شکل ماتریسی میدان کرنش به شرح زیر است:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_\theta \\ k_{x\theta} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & z \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{R} & 0 & z \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & z \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & z \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (۶)$$

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \phi_x \\ \phi_\theta \end{bmatrix} = d_1 Q$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{\theta z}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \phi_x \\ \phi_\theta \end{bmatrix} \quad (۷)$$

$$= d_2 Q$$

که:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{\theta z} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}; \quad (14)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2};$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)};$$

با توجه به ضخامت کم پوسته، می‌توان با استفاده از روابط نیروها و گشتاورها، توزیع تنش را در ضخامت پوسته یکپارچه نمود. نیروها و گشتاورها به عنوان مولفه‌های تنش در واحد طول یک پوسته استوانه‌ای با توجه به معادله زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E_s \frac{\partial u_0}{\partial x} + E_s z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \sigma_\theta &= E_r \left( \frac{1}{R} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{w_0}{R} \right) + E_r z \frac{\partial \psi_\theta}{R \partial \theta} \end{aligned} \quad (15)$$

برایند گشتاورها و نیروها با ادغام مولفه‌های تنش در جهت z ارائه می‌شود [۲۰]:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix} dz;$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix} z dz; \quad (16)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_\theta \\ Q_x \end{Bmatrix} = K_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{\theta z} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dz;$$

که  $K_s = 5/6$  ضریب تصحیح برش می‌باشد و توسط معادله انتگرال (۱۶) در امتداد ضخامت [۱۸]، می‌توان موارد زیر را داشت:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \\ Q_\theta \\ Q_x \end{Bmatrix} =$$

$$Q = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \varphi_x \\ \varphi_\theta \end{Bmatrix},$$

$$d_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & z \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{R} & 0 & z \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & z \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & z \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$d_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{R} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \varphi_x \\ \varphi_\theta \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$= d_3 Q$$

$$\begin{Bmatrix} k_x \\ k_\theta \\ k_{x\theta} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \varphi_x \\ \varphi_\theta \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$= d_4 Q$$

$$d_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{R} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$d_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

روابط بین تنش و کرنش برای مواد FG در ناحیه الاستیک خطی عبارتند از [۱۸]:



$$M_x = \left( \bar{B}_{11} + \frac{E_s A_s z_s}{s_s} \right) \varepsilon_x^0 + \bar{B}_{12} \varepsilon_\theta^0 + \left( \bar{D}_{11} + \frac{E_s I_s}{s_s} \right) k_x + \bar{D}_{12} k_\theta \quad (20)$$

$$M_\theta = \bar{B}_{12} \varepsilon_x^0 + \left( \bar{B}_{22} + \frac{E_r A_r z_r}{s_r} \right) \varepsilon_\theta^0 + \bar{D}_{12} k_x + \left( \bar{D}_{22} + \frac{E_r I_r}{s_r} \right) k_\theta$$

$$M_{x\theta} = \bar{B}_{66} \gamma_{x\theta}^0 + \bar{D}_{66} k_{x\theta}$$

$$\begin{cases} Q_\theta = k_s \left( \bar{A}_{44} + \frac{G_r A_r}{s_r} \right) \gamma_{\theta z} \\ Q_x = k_s \left( \bar{A}_{55} + \frac{G_s A_s}{s_s} \right) \gamma_{xz} \end{cases} \quad (21)$$

که در آن:

$$\bar{A}_{11} = \bar{A}_{22} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{1 - \nu^2(z)} dz;$$

$$\bar{A}_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\nu(z) E(z)}{1 - \nu^2(z)} dz;$$

$$\bar{A}_{44} = \bar{A}_{55} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{2[1 + \nu(z)]} dz;$$

$$\bar{A}_{66} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{2[1 + \nu(z)]} dz;$$

$$\bar{B}_{11} = \bar{B}_{22} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{1 - \nu^2(z)} z dz;$$

$$\bar{B}_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\nu(z) E(z)}{1 - \nu^2(z)} z dz;$$

$$\bar{B}_{66} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{2[1 + \nu(z)]} z dz; \quad (22)$$

$$\bar{D}_{11} = \bar{D}_{22} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{1 - \nu^2(z)} z^2 dz;$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_s A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_s A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \\ k_x \\ k_\theta \\ k_{x\theta} \\ \gamma_{\theta z}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

که:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} C_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (18)$$

در این تحقیق ابعاد تقویت کننده‌ها در مقایسه با ابعاد هندسی پوسته کوچک فرض شده است. اتصال بین تقویت کننده‌ها و پوسته پیوسته است و تقویت کننده‌ها از همان مواد سطوح پوسته در ناحیه اتصال ساخته می‌شوند. با استفاده از تکنیک لخنیتسکی و با فرض تک محوری بودن تقویت کننده‌ها در حالت تنش، نتایج نیرو و ممان پوسته استوانه‌ای FG مطابق روابط زیر به دست آمد [۱۹]:

$$N_x = \left( \bar{A}_{11} + \frac{E_s A_s}{s_s} \right) \varepsilon_x^0 + \bar{A}_{12} \varepsilon_\theta^0 + \left( \bar{B}_{11} + \frac{E_s A_s z_s}{s_s} \right) k_x + \bar{B}_{12} k_\theta$$

$$N_\theta = \bar{A}_{12} \varepsilon_x^0 + \left( \bar{A}_{22} + \frac{E_r A_r}{s_r} \right) \varepsilon_\theta^0 + \bar{B}_{12} k_x + \left( \bar{B}_{22} + \frac{E_r A_r z_r}{s_r} \right) k_\theta \quad (19)$$

$$N_{x\theta} = \bar{A}_{66} \gamma_{x\theta}^0 + \bar{B}_{66} k_{x\theta}$$

$$\{Q_\theta \quad Q_x\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma_{\theta z} \sigma_{xz}\} dz \quad (25)$$

$$+ \left\{ \frac{1}{S_r} \int_{A_r} \sigma_{\theta z}^{(r)} dA_r \frac{1}{S_s} \int_{A_s} \sigma_{xz}^{(s)} dA_s \right\}$$

که در آن تمام پارامترها بوسیله رابطه زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \bar{A}_{11} + \frac{E_s A_s}{S_s}; & A_{12} &= \bar{A}_{12}; \\ A_{22} &= \bar{A}_{22} + \frac{E_r A_r}{S_r}; \\ A_{44} &= \bar{A}_{44} + \frac{G_r A_r}{S_r}; \\ A_{55} &= \bar{A}_{55} + \frac{G_s A_s}{S_s}; & A_{66} &= \bar{A}_{66}; \\ B_{11} &= \bar{B}_{11} + \frac{E_s A_s z_s}{S_s}; & B_{12} &= \bar{B}_{12}; \\ B_{22} &= \bar{B}_{22} + \frac{E_r A_r z_r}{S_r}; & B_{66} &= \bar{B}_{66}; \\ D_{11} &= \bar{D}_{11} + \frac{E_s I_s}{S_s}; & D_{12} &= \bar{D}_{12}; \\ D_{22} &= \bar{D}_{22} + \frac{E_r I_r}{S_r}; & D_{66} &= \bar{D}_{66} \end{aligned} \quad (26)$$

برای ایجاد معادلات حاکم بر حرکت پوسته استوانه‌ای تقویت شده FG که روی بستر الاستیک قرار دارد، از اصل همپلتون استفاده می‌شود:

$$\int_0^t (\delta K - \delta U - \delta W_e - \delta W_f) dt = 0 \quad (27)$$

که انرژی جنبشی ساختار پوسته، انرژی کرنش، کار نیروی خارجی و کار انجام شده توسط بستر می‌باشد. انرژی جنبشی ناشی از جابجایی برای یک پوسته استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_{eq}(z) (\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v \\ &+ \ddot{w} \delta w) dz R d\theta dx \end{aligned} \quad (28)$$

که در آن:

$$\bar{D}_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{v(z) E(z)}{1 - v^2(z)} z^2 dz;$$

$$\bar{D}_{66} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{2[1 + v(z)]} z^2 dz;$$

$$I_s = \frac{b_s h_s^3}{12} + A_s z_s^2;$$

$$I_r = \frac{b_r h_r^3}{12} + A_r z_r^2;$$

$$z_s = \pm \frac{h_s + h}{2};$$

$$z_r = \pm \frac{h_r + h}{2};$$

با توجه به رابطه (۲۲)،  $E_r, G_r$  و  $E_s, G_s$  به ترتیب نشان دهنده مدول برشی و الاستیک استرینگر و رینگ هستند. پارامترهای  $h_s, b_s, A_s$  و  $h_r, b_r, A_r$  به ترتیب سطح مقطع، عرض و ارتفاع استرینگر و رینگ هستند. بعلاوه  $S_s$  و  $S_r$  نشان دهنده فواصل بین استرینگرها و رینگها هستند، در حالی که  $z_s$  و  $z_r$  به ترتیب، فاصله‌ای از مرکز استرینگر و رینگ تا سطح میانی پوسته استوانه‌ای FG را نشان می‌دهند. نتایج نیرو و ممان پوسته استوانه‌ای FG تقویت شده با توجه به تکنیک تقویت کننده‌های لختی‌تسکی به صورت زیر ارائه می‌شود [۱۹ و ۱۸]:

$$\begin{aligned} \{N_x \quad N_\theta \quad N_{x\theta}\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma_x \sigma_\theta \sigma_{x\theta}\} dz \\ &+ \left\{ \frac{1}{S_s} \int_{A_s} \sigma_x^{(s)} dA_s \frac{1}{S_r} \int_{A_r} \sigma_\theta^{(r)} dA_r \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \{M_x \quad M_\theta \quad M_{x\theta}\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{z \sigma_x z \sigma_\theta z \sigma_{x\theta}\} dz \\ &+ \left\{ \frac{1}{S_s} \int_{A_s} z \sigma_x^{(s)} dA_s \frac{1}{S_r} \int_{A_r} z \sigma_\theta^{(r)} dA_r \right\} \end{aligned} \quad (24)$$



با استفاده از معادله (۲۹) و (۳۰) در اصل همیلتون، داریم:

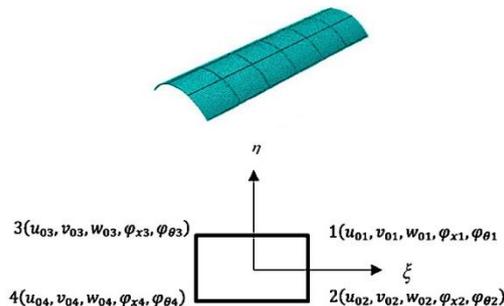
$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\theta} \rho_{eq} \left( \begin{array}{l} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) \\ \left( +z \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \right) \\ (\delta u_0 + z \delta \phi_x) \\ + \\ \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \right) \\ \left( +z \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial t^2} \right) \\ (\delta v_0 + z \delta \phi_\theta) \\ + \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \delta w_0 \end{array} \right) dt \quad (33)$$

$$+ \int_{s^{(e)}} \left( \begin{array}{l} ((d_3 Q)^T A^T \\ + (d_4 Q)^T B^T) \\ d_3 \delta Q + \\ ((d_3 Q)^T B^T \\ + (d_4 Q)^T D^T) \\ d_4 \delta Q + \\ (d_2 Q)^T e^T d_2 \delta Q \end{array} \right) Rd\theta dx$$

$$- \delta W_e - \delta W_f = 0$$

#### ۴. فرم المان محدود معادلات حاکم

برای حل معادلات حاکم بر پوسته تقویت شده استوانه‌ای FG از روش المان محدود استفاده می‌شود. یک المان ۲ بعدی ۴ گره‌ای با ۲۰ درجه آزادی برای مش بندی دامنه اعمال شد (شکل ۲). همچنین، یک سیستم مختصات محلی  $(\xi, \eta)$  برای بیان توابع شکل استفاده می‌شود.



شکل ۲. شماتیک مختصات جهانی و پوسته تقویت شده

$$\rho_{eq} = \rho(z) + \left(\frac{A_s}{S_{sh}}\right)\rho_s + \left(\frac{A_r}{S_{rh}}\right)\rho_r$$

$$\begin{cases} \delta u = \delta u_0 + z \delta \phi_x \\ \delta v = \delta v_0 + z \delta \phi_\theta \\ \delta w = \delta w_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{u} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \\ \ddot{v} = \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial t^2} \\ \ddot{w} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \end{cases} \quad (29)$$

$$\delta K = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int \rho \left( \begin{array}{l} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \right) \\ (\delta u_0 + z \delta \phi_x) \\ + \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial t^2} \right) \\ (\delta v_0 + z \delta \phi_\theta) \\ + \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \delta w_0 \end{array} \right) dz dA$$

همچنین انرژی کرنش برای پوسته استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود:

$$U = \frac{1}{2} \int_s \left[ \begin{array}{l} N_x \epsilon_x^0 + N_\theta \epsilon_\theta^0 \\ + N_{x\theta} \gamma_{x\theta}^0 + M_x k_x \\ + M_\theta k_\theta + M_{x\theta} k_{x\theta} \\ + Q_\theta \gamma_{\theta z} + Q_x \gamma_{xz} \end{array} \right] Rd\theta dx =$$

$$\int \left( \begin{array}{l} ((d_3 Q)^T A^T + (d_4 Q)^T B^T) \\ (d_3 \delta Q) \\ + ((d_3 Q)^T B^T + (d_4 Q)^T D^T) \\ (d_4 \delta Q) + (d_2 Q)^T e^T (d_2 \delta Q) \end{array} \right) Rdxd\theta \quad (30)$$

معادلات  $\delta W_e$  و  $\delta W_f$  به شرح زیر هستند:

$$\delta W_e = \int p_z \delta w_0 Rd\theta dx \quad (31)$$

$$W_f = \frac{1}{2} \int_s [k_w w_0^2] Rd\theta dx \quad (32)$$

$$+ \frac{1}{2} \int C_w \dot{w}_0^2 Rd\theta dx$$



$$\begin{aligned}
 u_0 &= \sum_{i=1}^4 \psi_i u_{0i}; \quad v_0 = \sum_{i=1}^4 \psi_i v_{0i}; \\
 w_0 &= \sum_{i=1}^4 \psi_i w_{0i} \\
 \varphi_\theta &= \sum_{i=1}^4 \psi_i \theta_{\theta i}; \quad \varphi_x = \sum_{i=1}^4 \psi_i \theta_{xi}
 \end{aligned} \quad (36)$$

جایگزینی معادله (36) در معادله (33) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\int_{S^{(e)}} \left[ \begin{array}{c} (d_3 \psi)^T A^T d_3 \psi \\ + (d_4 \psi)^T B^T d_3 \psi \\ + (d_3 \psi)^T B^T d_4 \psi \\ + (d_4 \psi)^T D^T d_4 \psi \\ + (d_2 \psi)^T E^T d_2 \psi \\ + \psi^T I \psi \ddot{q}^{(e)} \end{array} \right] q^{(e)} \quad (37)$$

$$R d x d \theta - \delta W_e - \delta W_f = 0$$

کار نیروی خارجی نیز برابر است با:

$$\delta W_e = \delta q^{(e)T} \Psi^T \bar{P} \quad (38)$$

که در آن با توجه به نیروی عرضی وارد بر پوسته استوانه‌ای، خواهیم داشت:

$$\bar{P} = [0 \quad 0 \quad P_z \quad 0 \quad 0]^T \quad (39)$$

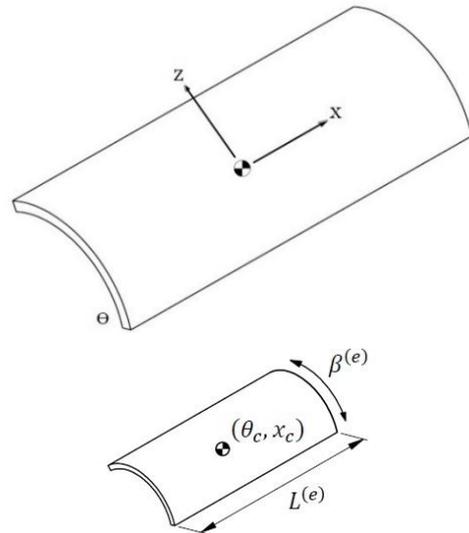
$$\begin{cases} d_2 \psi = B_2 \\ d_3 \psi = B_3 \\ d_4 \psi = B_4 \end{cases} \quad (40)$$

علاوه بر این، کار ناپایستار بستر عبارت است از:

$$\begin{aligned}
 \delta W_f &= \int_S k_w w_0 \delta w_0 R d \theta d x \\
 &+ \int_S C_w \dot{w}_0 \delta w_0 R d \theta d x = \\
 \delta q^{(e)T} &\left( \int_{S^{(e)}} k_w \bar{\Psi}^T \bar{\Psi} R d \theta d x \right) q^{(e)} \quad (41) \\
 &+ \delta q^{(e)T} \left( \int_{S^{(e)}} C_w \bar{\Psi}^T \bar{\Psi} R d \theta d x \right) q^{(e)}
 \end{aligned}$$

در معادله (41)، ترم اول کار مجازی بستر الاستیک و ترم دوم کار مجازی انجام شده توسط دمپینگ بستر (اثرات میرایی) می‌باشد. با مرتب-سازی معادله (37)، معادله زیر برای هر المان پوسته استوانه‌ای به دست آمد:

رابطه بین مولفه‌های سیستم مختصات محلی و سراسری، مطابق شکل ۲ و ۳ به شرح زیر است: [۲۰]



شکل ۳. سیستم مختصات محلی المان پوسته استوانه‌ای

$$\xi = \frac{2(-x_c)}{L^{(e)}}, \quad \eta = \frac{2(\theta - \theta_c)}{\beta^{(e)}} \quad (34)$$

که  $-1 \leq \xi \leq 1$ ،  $\eta \leq 1$  به ترتیب در جهت  $x$  و  $\theta$  فرض می‌شوند.  $\beta^{(e)}$  زاویه چرخش المان و  $(\theta_c, x_c)$  مختصات محیطی مرکز المان است. توابع شکل در مختصات محلی و بردار جابجایی المان به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} (1 + \xi)(1 - \eta) \\ (1 + \xi)(1 + \eta) \\ (1 - \xi)(1 + \eta) \\ (1 - \xi)(1 - \eta) \end{Bmatrix} \quad (35)$$

با توجه به استفاده از تئوری برشی مرتبه اول، برای هر گره دارای ۵ درجه آزادی در نظر گرفته شد (شکل ۲) که در آن  $\psi_i$ ،  $i=1,2,3,4$  توابع شکل هستند و  $\psi$  ماتریس توابع شکل هستند.  $u_{0i}$ ،  $v_{0i}$ ،  $w_{0i}$ ،  $\varphi_{\theta i}$  و  $\varphi_{xi}$  درجات آزادی گره هستند و به صورت تقریبی برابر است با:

$$C_{cr} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n \quad (49)$$

نسبت میرایی نیز از طریق آزمون جاروب فرکانس با روش پهنای باند نیمه توان<sup>۵</sup> طبق رابطه زیر تعیین می‌شود [۲۳]:

$$\zeta = \frac{\Delta f}{2f_n} \quad (50)$$

به ترتیب پهنای باند نقاط نیمه توان  $\Delta f$  و  $f_n$  مقدار فرکانس طبیعی هستند. این نقاط نیمه توان فرکانس هایی هستند که در آن پاسخ  $1/\sqrt{2}$  یا  $0.707$  برابر با بیشینه پاسخ است [۲۲]. در این تحقیق، پاسخ سیستم به تحریک اولیه برای مقادیر مختلف نسبت میرایی بررسی خواهد شد. همچنین فرکانس میرایی طبق رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n \quad (51)$$

## ۵. اعتبارسنجی مدل

برای مدلسازی FE، پارامترهای هندسی از مراجع [۱۹ و ۱۸] برای شبیه‌سازی پوسته تقویت شده FG، به منظور تجزیه و تحلیل فرکانس‌های طبیعی استفاده می‌شود. همچنین، تأثیر کسرهای حجمی، پارامترهای بستر و بهینه‌سازی پارامترهای هندسی پوسته استوانه‌ای FG با تقویت‌کننده متعامد بر بستر الاستیک در بسیاری از مطالعات مورد بررسی قرار گرفته است [۹-۱]. پارامترهای هندسی مانند ضخامت پوسته ۲ میلی‌متر و شعاع داخلی و بیرونی به ترتیب ۱۹۹ میلی‌متر و ۲۰۱ میلی‌متر در نظر گرفته شده است. تأثیر کسرهای حجمی و پارامترهای بستر برابر ۲۰ و شرایط مرزی به شکل SS در نظر گرفته شده است. جدول ۱ و ۲ مشخصات مواد پوسته تقویت شده FG مورد استفاده برای این مطالعه را نشان می‌دهد [۱۹ و ۱۸]. همانطور که

$$M^{(e)}\ddot{q}^{(e)} + C^{(e)}\dot{q}^{(e)} + (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)q^{(e)} = F^{(e)} \quad (42)$$

در نهایت، با اضافه کردن ترم‌های سفتی، جرم و مقادیر ماتریس نیرو، معادلات اجزای محدود پوسته تقویت شده FG استوانه‌ای به صورت زیر بدست می‌آید:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)q = F \quad (43)$$

که در آن  $K_4$  ماتریس سفتی به دلیل خواص کشسانی بستر است و  $C$  ماتریس میرایی به دلیل خاصیت میرایی بستر می‌باشد. ماتریس‌های جرم، سفتی، میرایی و نیرو در پیوست آورده شده‌اند. سه نوع مختلف شرایط مرزی ضروری در هر دو انتهای پوسته استوانه‌ای ( $x = 0, L$ ) به شرح زیر است [۱۸]:

$$CC): \quad u_0 = v_0 = w_0 = \varphi_x = \varphi_\theta = 0|_{x=0,L} \quad (44)$$

$$SS): \quad v_0 = w_0 = \varphi_\theta = N_x = M_x = 0|_{x=0,L} \quad (45)$$

$$CS): \quad u_0 = v_0 = w_0 = \varphi_x = \varphi_\theta = 0|_{x=0,L}; \quad v_0 = w_0 = \varphi_\theta = N_x = M_x = 0|_{x=0,L} \quad (46)$$

روش یکپارچه نیومارک با توجه به زمان [۲۱] برای حل معادله (۴۳) استفاده می‌شود. تجزیه و تحلیل فرکانس طبیعی پوسته تقویت شده استوانه‌ای FG به یک مسئله مقدار ویژه تبدیل می‌شود:

$$((k_1 + k_2 + k_3 + k_4) - M\omega^2)q = 0 \quad (47)$$

که  $\omega$  فرکانس طبیعی دایره‌ای و  $q$ ، شکل‌های مد ارتعاش می‌باشد.

برای یک رابطه بی‌بعد، می‌توان از رابطه بین میرایی بحرانی و ضریب میرایی استفاده کرد که به صورت معادله رابطه (۴۸) تعیین می‌شود:

$$\zeta = \frac{C}{C_{cr}} \quad (48)$$

حالت میرایی بحرانی به شرح زیر است:



برای مواد FG شناخته شده است، خواص مواد در ضخامت (z) به گونه‌ای که در جدول ۱ آورده شده است، متفاوت است.

جدول ۱. خواص مواد FGM در مقاله مرجع [۱۹]  
p=20, h=0.002m

ضخامت (متر)	E (Pa)	$\nu$	$\rho(\text{kg/m}^3)$
۰	$7E+10$	۰/۳	۲۷۰۲
$1/100 E-4$	$7E+10$	۰/۳	۲۷۰۲
$2/100 E-4$	$7E+10$	۰/۳	۲۷۰۲
$3/1000 E-4$	$7E+10$	۰/۳	۲۷۰۲
$4/100 E-4$	$7E+10$	۰/۳	۲۷۰۲
$5/100 E-4$	$7E+10$	۰/۳	۲۷۰۲
$6/1000 E-4$	$7E+10$	۰/۳	۲۷۰۲
$7/100 E-4$	$7E+10$	۰/۳	۲۷۰۲
$8/100 E-4$	$7E+10$	۰/۳	۲۷۰۲
$9/1000 E-4$	$7E+10$	۰/۳	۲۷۰۲
$1/100 E-3$	$7E+10$	۰/۳	۲۷۰۲/۰۰
$1/10 E-3$	$7E+10$	۰/۳	۲۷۰۲/۰۱
$1/100 E-3$	$7E+10$	۰/۳	۲۷۰۲/۱۱
$1/30 E-3$	$7E+10$	۰/۳	۲۷۰۲/۵۴
$1/40 E-3$	$7/10 E+10$	۰/۳	۲۷۰۴/۳۹
$1/100 E-3$	$7/04 E+10$	۰/۳	۲۷۱۱/۵۰
$60 E-3$	$7/15 E+10$	۰/۳	۲۷۳۶/۵۶
$1/70 E-3$	$7/5 E+10$	۰/۳	۲۸۱۸/۲۰
$1/100 E-3$	$8/58 E+10$	۰/۳	۳۰۶۶/۴۸
$1/90 E-3$	$1/17 E+11$	۰/۳	۳۷۷۶/۷۴
$2/100 E-3$	$2 E+11$	۰/۳	۵۷۰۰

جدول ۲. مشخصات هندسی و مواد تقویت کننده‌ها

[۱۸]

ویژگی‌های هندسی تقویت کننده‌ها		
رینگ‌ها	استرینگرها	نوع تقویت کننده‌ها
۵	۱۰	تعداد تقویت کننده‌ها
۰/۰۱۲	۰/۰۱۲	ارتفاع تقویت کننده‌ها (m)
۰/۰۰۲	۰/۰۰۲	عرض تقویت کننده‌ها (m)
مشخصات هندسی سیلندر		
ضخامت (m)	طول (m)	شعاع (m)
۰/۰۰۲	۱	۰/۲
خواص مواد سیلندر تقویت شده		
مقدار	مشخصات	
۲۰۰	$E_0(\text{Gpa})$	
۰/۳	$\nu_0$	
۵۷۰۰	$\rho_0(\text{kg/m}^3)$	

$E_i(\text{Gpa})$	۷۰
$\nu_i$	۰/۳
$\rho_i(\text{kg/m}^3)$	۲۷۰۲

پس از انجام تحلیل فرکانس با شرایط ذکر شده، نتایج آنالیز به همراه مقادیر مرجع [۱۸] در جدول ۳ فهرست شده است. در این جدول دو حالت آنالیز (با و بدون تقویت کننده) ارائه شده است. همانطور که در این جدول مشخص شده است، فرکانس‌های طبیعی برای پوسته FG شامل شاخص کسر حجمی، به ترتیب ضریب  $2/4$  و  $3/65$ ٪ برای پوسته‌های تقویت شده و تقویت نشده افزایش می‌یابد. همچنین به این نتیجه رسیدیم که مدل اجزای محدود مورد استفاده در این مطالعه با مقایسه نتایج به دست آمده با مرجع [۱۸] معتبر می‌باشد. ابعاد تقویت کننده‌ها کوچک است، اما همانطور که در جدول ۳ نشان داده شده است، اختلاف زیادی میان فرکانس طبیعی در شرایط با و بدون تقویت کننده بر اساس این مطالعه و مرجع [۱۸] وجود دارد.

جدول ۳. مقایسه فرکانس طبیعی مدل المان محدود و مرجع [۱۸]

شرایط ها	تقویت نشده	تقویت شده
مرجع [۱۸]	۱۹۳/۸۷	۳۴۴/۹۰
کار حاضر	۲۰۰/۹۵	۳۵۳/۱۹
اختلاف (%)	۳/۶۵	۲/۴۰

همچنین برای اعتبارسنجی مدل، پارامتر دیگری مانند ضریب الاستیک در بستر الاستیک در نظر گرفته شده است. بنابراین، نتایج به دست آمده از مدل تشکیل شده با نتایج مطالعه شده در مرجع [۱۹] مقایسه شده است. در این تحقیق مدل‌های هندسی مختلف مانند مدل هندسی R6 با مشخصات هندسی ذکر شده در جدول ۴ مورد تحلیل و اعتبارسنجی قرار گرفت. در این مدل،



Al/ZrO<sub>2</sub> به عنوان ماده پوسته استوانه‌های FG انتخاب شده است.

جدول ۴. خواص هندسی و مواد برای ساختار پوسته

استوانه‌های FG تقویت شده [۱۹]

رینگ‌ها / استرینگرهای عمودی	نوع تقویت کننده‌ها
R6	مدل
۵/۱۰	تعداد تقویت کننده‌ها
۰/۲	شعاع (m)
۰/۰۰۲	ضخامت (m)
۱	طول (m)
۰/۰۰۶ / ۰/۰۰۶	ارتفاع تقویت کننده‌ها (m)
۰/۰۰۲ / ۰/۰۰۲	عرض تقویت کننده‌ها (m)
۲۰۰	E <sub>0</sub> (Gpa)
۰/۳	ν <sub>0</sub>
۵۷۰۰	ρ <sub>0</sub> (kg/m <sup>3</sup> )
۲۰۰	E <sub>1</sub> (Gpa)
۰/۳	ν <sub>1</sub>
۵۷۰۰	ρ <sub>1</sub> (kg/m <sup>3</sup> )
۷۰	E <sub>2</sub> (Gpa)
۰/۳	ν <sub>2</sub>
۲۷۰۲	ρ <sub>2</sub> (kg/m <sup>3</sup> )
خارجی	نوع تقویت کننده

ضریب بستر الاستیک، مقدار فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد و این نتایج، تطابق خوبی با بستر الاستیک پوسته‌های استوانه‌های تقویت شده دارد.

جدول ۵. مقایسه فرکانس‌های طبیعی با ضریب

الاستیک متفاوت در بستر الاستیک و شرایط مرزی

مختلف پوسته FG با مرجع [۱۹]

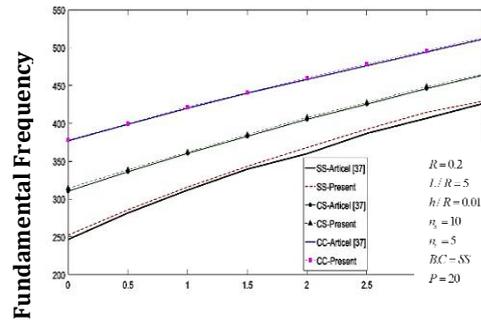
اختلاف (%)	شرایط مرزی SS	کارحاضر	مرجع [۱۹]	K <sub>w</sub> × 10 <sup>7</sup>
۲/۳۱	۲۵۲/۲۹	۲۴۴/۵۷	۰	۰
۱/۵۱	۲۸۵/۸۷	۲۸۱/۶۰	۰/۵	۰/۵
۱/۲۹	۳۱۵/۸۹	۳۱۱/۸۴	۱	۱
۱/۱۰	۳۴۳/۲۸	۳۳۹/۵۳	۱/۵	۱/۵
۲/۲۵	۳۶۸/۱	۳۵۹/۹۸	۲	۲
۱/۴۵	۳۹۲/۳۵	۳۸۶/۷۴	۲/۵	۲/۵
۱/۹۵	۴۱۴/۷	۴۰۶/۷۵	۳	۳
۰/۶۸	۴۳۰/۳۳	۴۲۷/۳۹	۳/۵	۳/۵
اختلاف (%)	شرایط مرزی CS	کارحاضر	مرجع [۱۹]	K <sub>w</sub> × 10 <sup>7</sup>
۱/۲۴	۳۱۴/۲۶	۳۱۰/۳۹	۰	۰
۰/۷۸	۳۳۸/۶۵	۳۳۶/۰۲	۰/۵	۰/۵
۰/۴۳	۳۶۱/۹۸	۳۶۰/۳۹	۱	۱
۰/۵۵	۳۸۵/۰۱	۳۸۲/۸۸	۱/۵	۱/۵
۰/۶۱	۴۰۷/۸۶	۴۰۵/۳۷	۲	۲
۰/۴۸	۴۲۷/۴۱	۴۲۵/۳۵	۲/۵	۲/۵
۰/۵۶	۴۴۸/۴۷	۴۴۵/۹۶	۳	۳
۰/۳۰	۴۶۶/۱۱	۴۶۴/۶۹	۳/۵	۳/۵
اختلاف (%)	شرایط مرزی CC	کارحاضر	مرجع [۱۹]	K <sub>w</sub> × 10 <sup>7</sup>
۰/۲۹	۳۷۸/۰۱	۳۷۶/۸۸	۰	۰
۰/۱۸	۳۹۹/۴۷	۳۹۸/۷۴	۰/۵	۰/۵
۰/۴۱	۴۲۱/۷۱	۴۱۹/۹۸	۱	۱
۰/۱۲	۴۴۰/۴۹	۴۳۹/۹۶	۱/۵	۱/۵
۰/۴۰	۴۵۹/۹۱	۴۵۸/۰۶	۲	۲
۰/۴۳	۴۷۸/۲۵	۴۷۶/۱۶	۲/۵	۲/۵
۰/۳۵	۴۹۵/۹۹	۴۹۴/۲۶	۳	۳
۰/۳۷	۵۱۴/۲۷	۵۱۲/۳۶	۳/۵	۳/۵

در تحقیق حاضر، نتایج به دست آمده برای تحلیل دینامیکی و مقایسه آن با مرجع [۱۹] در شکل ۴ نشان داده شده است. با توجه به تحلیل دینامیکی، شکل مد فرکانس‌های طبیعی به دست آمده در روش اجزای محدود به صورت جدول ۵ نشان داده شده است. حداکثر اختلاف بین فرکانس‌های طبیعی مطالعه حاضر با مرجع [۱۹]، ۲/۳۱٪ است. روابط حاکم برای مدل اجزای محدود در بستر الاستیک که با روش‌های ریاضی و عددی حل شده، نتیجه قابل قبولی را نشان می‌دهد. علاوه بر این، جدول ۶ و شکل ۵ نتایج را برای سه فرکانس طبیعی اول با فرض ضریب الاستیک  $K_w = 3 \times 10^7$  را نشان می‌دهد. اثر  $K_w$  بر فرکانس طبیعی در حالت مذکور و شرایط مرزی مشخص شده قابل مشاهده است. با افزایش

طبیعی در سازه پوسته FG تقویت شده را نشان می‌دهد، در جدول ۱۳ ارائه شده است. برای این منظور دو مقوله در نظر گرفته شد که در زیر به آن پرداخته شده است. همانطور که در جدول ۷ نشان داده شده است، پارامترهای هندسی ثابت و متغیر به عنوان ورودی به DOE برای روش تحلیلی ارائه می‌شوند.

جدول ۷. پارامترهای متغیر و ثابت

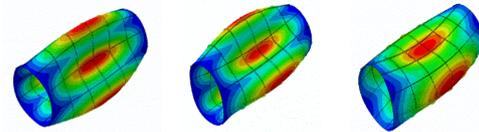
پارامترهای متغیر	
پارامتر	بازه تغییر
شاخص کسر حجمی (p)	۰-۵-۱۰-۱۵-۲۰ (%)
طول (mm)	۵۰۰-۱۰۰۰-۱۵۰۰-۲۰۰۰-۲۵۰۰
ضخامت (mm)	۰/۵-۱/۰-۱/۵-۲/۰-۲/۵
ضریب بستر الاستیک ( $10^7 \text{ N/m}^3$ )	۰-۱-۲-۳-۴
شرایط مرزی (B.C)	SS - CC - CS
پارامترهای ثابت	
پارامتر	مقدار
شعاع (mm)	۲۰۰
تعداد رینگ‌ها ( $n_r$ )	۵
تعداد استرینگرها ( $n_s$ )	۱۰
ارتفاع تقویت کننده‌ها ( $h_s$ (mm)	۶
عرض تقویت کننده‌ها ( $w_s$ (mm)	۲



شکل ۴. مقایسه مدن امان محدود و مرجع [۱۹] با مقادیر مختلف بستر الاستیک

جدول ۶. شماره مد و فرکانس‌های طبیعی ( $R=0.2, L/R=5, h/R=0.01, n_s=10, n_r=5$ )

شماره مد	ضریب بستر الاستیک $K_w$ ( $\text{N/m}^3$ )	فرکانس طبیعی (Hz)
۱	$3 \times 10^7$	۴۱۴/۷
۲	$3 \times 10^7$	۴۱۴/۹۵
۳	$3 \times 10^7$	۴۵۸/۷۷



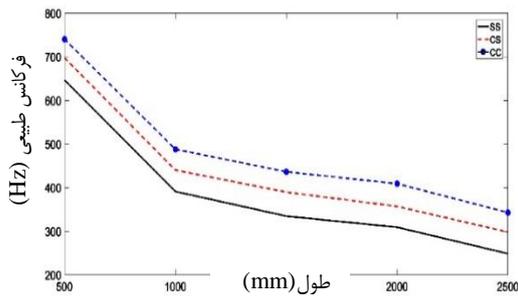
شکل مد سوم (۳) شکل مد دوم (۲) شکل مد اول (۱) شکل ۵. شکل سه حالت اول با ضریب الاستیک  $K_w=3 \times 10^7$

## ۶. مقایسه FE و نتایج تحلیلی

به منظور اعتبارسنجی نتایج فرکانس طبیعی مدلسازی FE، از روش  $RSM^6$  در نرم افزار  $DOE^7$  استفاده شده است. پارامترهای مربوط به مرجع [۱۹و۱۸] برای مدلسازی در نرم‌افزار FE استفاده می‌شوند. بنابراین فرکانس‌های طبیعی از روش FE و تحلیلی برای ضریب الاستیک  $K_w=2 \times 10^7$  به دست آمده و با یکدیگر مقایسه شده‌اند. این مقایسه که میزان فرکانس‌های

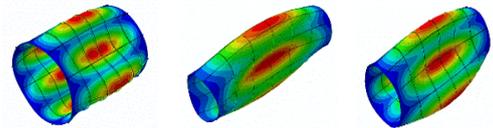
۲	۱۰۰۰	۴۸۷/۹۹
۳	۱۵۰۰	۴۳۶/۲۸
۴	۲۰۰۰	۴۰۸/۹۶
۵	۲۵۰۰	۳۴۲/۸۹

همانطور که در شکل ۶ نشان داده شده است با افزایش طول پوسته تقویت شده FG و کسر حجمی ثابت و شرایط مرزی SS برای همه مدل ها، میزان فرکانس های طبیعی کاهش می یابد. شکل ۷ فرکانس های طبیعی از طریق طول پوسته را نشان می دهد. علاوه بر این، همانطور که در این شکل نشان داده شده است انتظار می رود با افزایش طول پوسته استوانه ای و افزودن شرایط مرزی مختلف در جدول ۸، سفتی کاهش یافته و جرم افزایش یابد و در نتیجه، فرکانس طبیعی بر اساس نسبت  $\sqrt{\frac{K}{M}}$  کاهش می یابد.

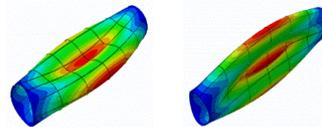


شکل ۷. تغییرات فرکانس طبیعی با افزایش طول استوانه جدول ۹ فرکانس های طبیعی به دست آمده از روش های فوق را نشان می دهد. طول های مختلف و پارامترهای ثابت مانند کسر حجمی و شرایط مرزی، ضخامت و ضریب بستر الاستیک برای محاسبه فرکانس های طبیعی در نظر گرفته شده است. مقدار تفاوت ها می تواند مدل سازی دقیق FE را برای تأیید توضیح دهد.

همانطور که مشاهده می شود برای ضخامت  $z=2$  و  $z=0$  شعاع درونی و بیرونی به ترتیب  $0.199$  و  $0.2010$  متر است. شکل ۶، شکل مد پوسته استوانه ای را در مقادیر مختلف طول آن و مقدار فرکانس طبیعی به صورت جدول ۸ نشان می دهد.



شکل مد اول (۱)  $\omega_n=646.66$  Hz  
شکل مد دوم (۲)  $\omega_n=391.15$  Hz  
شکل مد سوم (۳)  $\omega_n=334.67$  Hz



شکل مد چهارم (۴)  $\omega_n=309.16$  Hz  
شکل مد پنجم (۵)  $\omega_n=248.41$  Hz

شکل ۶. پنج مد فرکانسی اول پوسته استوانه ای با مقادیر متفاوت طول را نشان می دهد.

$$(p=10, h=1.5\text{mm}, B.C=SS, K_w=2e7\text{N/m}^3)$$

جدول ۸. شماره های مد و فرکانس های طبیعی با شرایط مرزی مختلف

$$(p=10, h=1.5\text{mm}, B.C=SS, K_w=2e7\text{N/m}^3)$$

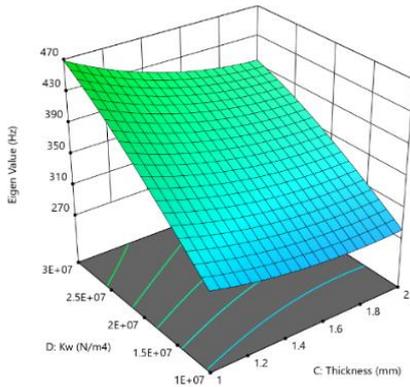
شماره	طول (mm)	فرکانس طبیعی (Hz) شرایط مرزی: SS
۱	۵۰۰	۶۴۶/۶۶
۲	۱۰۰۰	۳۹۱/۱۵
۳	۱۵۰۰	۳۳۴/۶۷
۴	۲۰۰۰	۳۰۹/۱۶
۵	۲۵۰۰	۲۴۸/۴۱
شماره	طول (mm)	فرکانس طبیعی (Hz) شرایط مرزی: CS
۱	۵۰۰	۶۹۷/۴۸
۲	۱۰۰۰	۴۴۰/۱۴
۳	۱۵۰۰	۳۸۹/۶۳
۴	۲۰۰۰	۳۵۶/۹۷
۵	۲۵۰۰	۲۹۸/۰۱
شماره	طول (mm)	فرکانس طبیعی (Hz) شرایط مرزی: CC
۱	۵۰۰	۷۴۰/۲۹

جدول ۹. مقایسه فرکانس‌های طبیعی برای مدل‌سازی

تحلیلی و FE

شماره مدها	المان محدود (Hz)	حل تحلیلی (Hz)	اختلاف (%)
(۱،۱)	۶۴۶/۶۶	۶۴۴/۰۹	۰/۳۹
(۱،۲)	۳۹۱/۱۵	۳۸۸/۵۹	۰/۶۵
(۱،۳)	۳۳۴/۶۷	۳۳۱/۷۸	۰/۸۷
(۱،۴)	۳۰۹/۱۶	۳۰۳/۷۴	۱/۷۸

D: Kw (N/m<sup>3</sup>) ۴۸/۴۱      C: ضخامت (mm) ۲

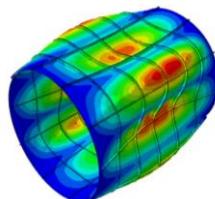


شکل ۹. تأثیر متقابل ضریب بستر الاستیک و ضخامت پوسته‌استوانه‌ای روی مقدار فرکانس‌های طبیعی

فرکانس‌های بهینه سازه شبیه‌سازی شده با مدل‌سازی FE پس از بهینه‌سازی به دست آمد. با توجه به بهینه‌سازی، مقایسه‌ای بین نتایج به دست آمده از FEM و حل تحلیلی انجام شده است (جدول ۱۰). با توجه به بهینه‌سازی پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده FG، بهترین حالت، کاهش یا ثابت نگه داشتن وزن سازه و همچنین به حداکثر رساندن فرکانس طبیعی است. شکل ۱۰ فرکانس طبیعی بدست آمده از مدل بهینه شده در FEM را نشان می‌دهد.

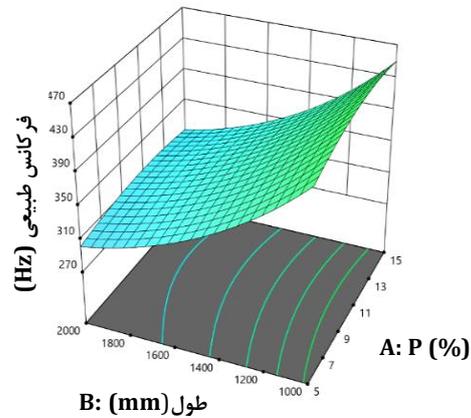
جدول ۱۰. مقایسه نتایج حاصل از حداکثر مقدار فرکانس طبیعی

شاخص کسر حجمی (p)	طول (mm)	ضخامت (mm)
۱۰	۵۰۰	۰/۵
حل تحلیلی (Hz)	المان محدود (Hz)	اختلاف (%)
۸۲۹/۷۳	۸۰۰/۶۴	۳/۶۳



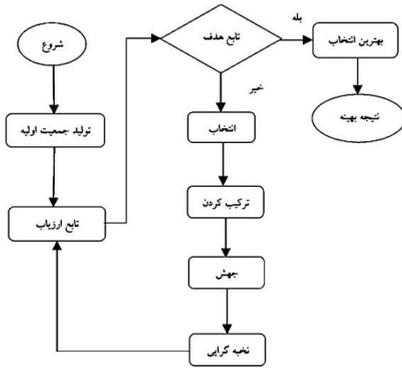
شکل ۱۰. فرکانس طبیعی مدل FEM بهینه شده با نتیجه ۸۰۰/۶۴ (هرتز)

شکل ۸ و ۹ نمودارهای سه بعدی ترسیم شده را نشان می‌دهد که تأثیر متقابل دو پارامتر به طور همزمان بر فرکانس طبیعی نشان داده شده است. مطابق شکل ۸، با ثابت ماندن شاخص کسر حجمی و افزایش طول، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. علاوه بر این، شکل ۹ نشان می‌دهد که با افزایش ضریب بستر الاستیک و ثابت ماندن ضخامت، فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابد.



شکل ۸. اثر متقابل شاخص کسر حجمی و طول پوسته استوانه‌ای بر مقدار فرکانس‌های طبیعی

## ۷. بهینه‌سازی الگوریتم ژنتیک



شکل ۱۱. فلوچارت پیشنهادی GA

در مرحله اول، دامنه تغییرات متغیرها در آرایه‌ها با توجه به ماهیت گسسته آنها ذخیره می‌شود و تنظیمات الگوریتم ژنتیک که شامل اندازه جمعیت و حداکثر تولید قابل انجام است، ذخیره می‌شود. در مرحله دوم تابع ارزیاب تعریف شد. تابع هدف GA به حداکثر رساندن فرکانس‌های طبیعی به دلیل متغیرهای مشخص شده و یافتن بهترین راه حل برای به حداقل رساندن وزن پوسته FG تقویت شده می‌باشد. در نهایت، مطابق جدول ۱۱، مقادیر بهینه فرکانس طبیعی برای مسئله به دست آمده است.

جدول ۱۱. راه حل فرکانس طبیعی بهینه شده برای سازه پوسته FG تقویت شده با استفاده از GA

شاخص کسر حجمی (p)	طول (mm)	ضخامت (mm)
۱۰	۵۰۰	۰/۵
شرایط مرزی	ضریب بستر الاستیک $K_w$ (N/m <sup>3</sup> )	فرکانس طبیعی (Hz)
CC	$۲/۵E+۰۷$	۸۹۲/۵۳

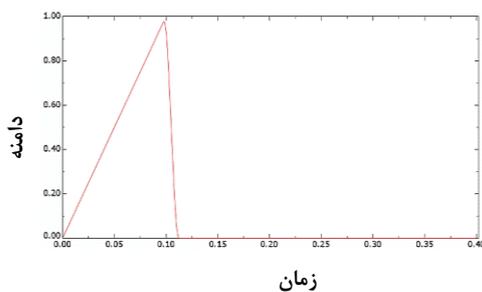
جدول ۱۲. بهینه‌سازی ضرایب الگوریتم ژنتیک مورد استفاده

نسبت جهش	نسبت ترکیب	حداکثر تکرار	اندازه جمعیت
۰/۲	۰/۵	۲۰۰	۱۰۰
ضریب بستر الاستیک $K_w$ (N/m <sup>3</sup> )	ضخامت (mm)	شاخص کسر حجمی (p)	محدوده طول (mm)
$(۰/۵-۲/۵) \times ۱۰^۷$	۰/۵-۲/۵	۰-۲۰	۵۰۰-۲۵۰۰

GA یک روش جستجو و بهینه‌سازی است که پردازش کروموزوم‌ها را در ژنتیک طبیعی تقلید می‌کند. در مهندسی بهینه‌سازی، مدل سازی GA یک تکنیک برنامه نویسی است که از تکامل ژنتیکی به عنوان یک مدل حل مسئله استفاده می‌شود. در فرآیند GA، گروهی از پارامترهای ورودی (matingpool) به عنوان جمعیت اولیه داده می‌شود. به طور کلی، این یک الگوریتم مبتنی بر تکرار است. بیشتر بخش‌های آن به عنوان فرآیندهای تصادفی انتخاب می‌شوند و این الگوریتم‌ها شامل تابع ارزیاب، انتخاب، ترکیب کردن یا تولید مثل، جهش و نخبه‌گزینی هستند. روش GA برای بهینه‌سازی پوسته استفاده می‌شود. بهینه‌سازی پوسته استوانه‌ای تقویت شده با قید وزن به منظور بیشینه نمودن فرکانس‌های طبیعی با متغیرهای بهینه‌سازی شاخص کسر-حجمی (p)، طول، ضخامت پوسته و تقویت کننده‌ها، ضریب بستر الاستیک ( $K_w$ ) در شرایط مرزی‌های مختلف به ازای مقادیر پارامتری متفاوت ارائه شده در جدول ۷، مورد بررسی قرار گرفت. فلوچارتی از رویه الگوریتم مورد استفاده برای GA در شکل ۱۱ نشان داده شده است. برای این منظور پوسته استوانه‌ای تقویت شده تحت محدودیت وزن و بیشینه فرکانس با اندازه جمعیت ۱۰۰ و نسبت جهش ۰/۲ یک کد کامپیوتری در نرم افزار MATLAB توسعه داده شده است.

## ۸. تجزیه و تحلیل ارتعاشات میرا شده

در مطالعه حاضر، اثرات میرایی بر روی پوسته بهینه و غیر بهینه مطالعه شده است. تحریک اولیه تحت ساختار پوسته بهینه‌سازی شده که در شکل ۱۰ نشان داده شده است برای اندازه‌گیری پاسخ‌ها در بازه زمانی قرار می‌گیرد. به منظور بررسی فرکانس‌های مد ارتعاشی، از ضرایب میرایی مختلف (به عنوان میرایی بحرانی) تحت عنوان فرضی برای حلگر دینامیک مدال در نرم افزار تجاری FE استفاده شد. این فرآیند برای بررسی وضعیت میرایی در ارتعاشات پوسته استوانه‌ای بهینه‌سازی شده FG، است. این حلگر تجزیه و تحلیل حوزه زمانی را قبل از استفاده از آن انجام می‌دهد که برای استخراج مقادیر فرکانس طبیعی نیاز به تحلیل فرکانس دارد. ساختار پوسته FG تقویت شده با پارامترهای هندسی، شعاع  $0/2$  (متر)،  $L/R=2/65$ ،  $h/R=0/02$ ،  $P=14/95$ ،  $K_w=3/5EY$ ،  $n_s=10$ ،  $n_r=5$ ، تحت تأثیر نیروی  $100$  نیوتن در انتها قرار می‌گیرد که در شکل ۱۳ نشان داده شده است. این اثر در بازه زمانی  $0/1$  ثانیه و پس از  $0/11$  ثانیه به طور کامل حذف شد. نتایج مقایسه برای نسبت میرا نشده ( $\xi=0$ ) و نسبت میرایی  $0/001$  در شکل ۱۴ نشان داده شده است.



شکل ۱۳. نمودار تحریک اولیه در بررسی ارتعاش میرایی

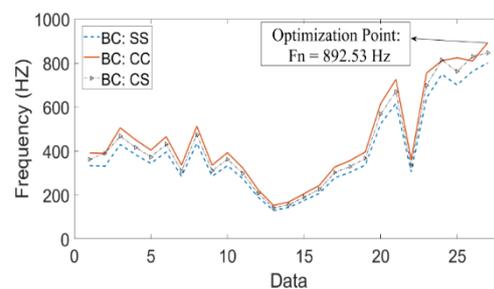
علاوه بر این، پس از بدست آوردن و مقایسه مقدار بهینه نتایج فرکانس طبیعی با روش‌های اجزا محدود و الگوریتم ژنتیک در جدول ۱۳، نشان می‌دهد که با بهینه‌سازی پارامترهای طراحی برای پوسته FG تقویت شده، راه حل دقیق‌تری به دست آمده است که تطابق خوبی با نتیجه تحلیلی دارد.

جدول ۱۳. مقایسه نتایج حاصل از حداکثر مقدار

فرکانس طبیعی

شاخص کسر حجمی (p)	طول (mm)	ضخامت (mm)
۱۰	۵۰۰	۰/۵
حل تحلیلی (Hz)	الگوریتم ژنتیک (Hz)	اختلاف (%)
۸۲۹/۷۳	۸۹۲/۵۳	۷/۰۳

بمنظور بررسی کارایی الگوریتم بهینه‌سازی مورد استفاده، شکل شماره ۱۲ ترسیم شده که در آن تغییرات تابع هدف (مقدار فرکانس طبیعی) با تغییر متغیرهای بهینه‌سازی (شرایط مرزی، شاخص کسر حجمی، طول و ضخامت استوانه، ضریب بستر الاستیک) ارائه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود الگوریتم بهینه‌ساز موفق به کشف حالتی شده که در آن مقدار فرکانس طبیعی به بیشینه خود رسیده است.



شکل ۱۲. نمودار تغییرات تابع هدف با تغییر متغیرهای بهینه‌سازی

۲۰۵

سال ۱۳ - شماره ۴

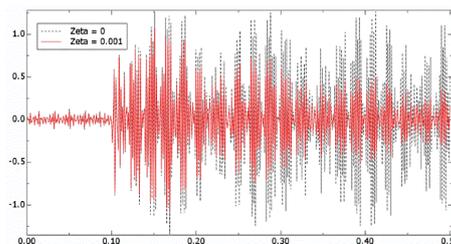
پاییز و زمستان ۱۴۰۳

نشریه علمی

دانش و فناوری هوا فضا

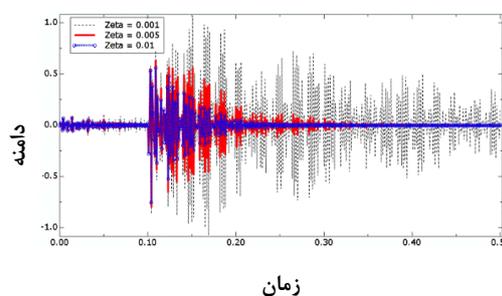


مطالعه اثر بستر الاستیک بر روی ویژگی‌های ارتعاش پوسته استوانه‌ای  
تقریب شده از جنس مواد مدرج تابعی بهینه



شکل ۱۴. مقایسه میرایی نتایج پوسته FG تقویت شده و میرا نشده

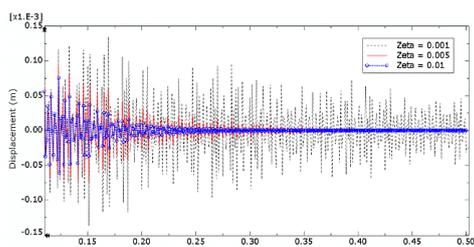
در حضور میرایی، دامنه ارتعاش با افزایش زمان شروع به کاهش خواهد کرد. کاهش پاسخ دینامیکی بگونه‌ای می‌باشد که در طول مدت زمان ۰.۵ ثانیه تحلیل شده ۵۰ درصد کاهش دامنه داشته است. این اثرات میرایی با استفاده از تقویت کننده‌ها در زمان ناهای پوسته FG را نشان می‌دهد. در شکل ۱۵ وضعیت پوسته FG تقویت شده با نسبت میرایی متفاوت بدست آمده است. همانطور که در این شکل نشان داده شده است، با افزایش نسبت میرایی، کاهش دامنه نوسان سریعتری را باعث می‌شود. بنابراین با نسبت میرایی ۰/۰۱ ارتعاشات سازه پس از ۰/۲۵ ثانیه به طور کامل متوقف می‌شود. هنگامی که نسبت میرایی به ۰/۰۰۵ تغییر می‌کند، دامنه پس از ۰/۴۱ ثانیه ناپدید می‌شود و با فرض اینکه نسبت میرایی برابر با ۰.۰۰۱ باشد، می‌توان آن را به ۰.۵ ثانیه افزایش داد.



شکل ۱۵. مقایسه اثرات نسبت‌های مختلف میرایی بر دامنه ارتعاش سازه

شکل‌های ۱۴ و ۱۵ مقدار دامنه بدست آمده

از تابع شتاب را از طریق مدت زمان نشان می‌دهند. شکل ۱۶ وضعیت جابجایی سازه را با نسبت‌های میرایی مختلف نشان می‌دهد که نمودار ارتعاشات شتاب مطابقت دارد. در نهایت، افزایش میرایی، مصدوم‌تری افزایش یافته و دامنه ارتعاش کاهش می‌یابد. علاوه بر این، جابجایی سازه با افزایش میرایی کاهش می‌یابد.



شکل ۱۶. مقایسه جابجایی برای نسبت‌های مختلف میرایی

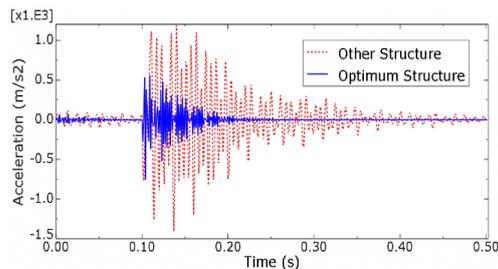
به منظور بررسی تأثیر بهینه‌سازی سازه در شرایط ارتعاشی، نوسانات سازه بهینه شده با سازه دیگری مقایسه شده است. این استوانه دارای طولی برابر با طول استوانه بهینه می‌باشد و با تغییر ضخامت  $th=2.5mm$  و  $K_w=1E7$  می‌باشد. نمودار ترسیم شده در شکل ۱۷ وضعیت ارتعاش این دو استوانه با ضریب میرایی ۰.۰۱ را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، با اعمال تحریک یکسان بر روی هر دو سازه، استوانه بهینه شده دارای پاسخ با سطح شتاب کمتری بوده که علاوه بر آن این مقدار شتاب، در مدت زمان کمتری خنثی خواهد شد. ضمناً شکل ۱۸ میزان نوسانات (جابجایی) این دو سازه در اثر تحریک یکسان انجام شده را نشان می‌دهد. مطابق نمودار ترسیم شده، دامنه نوسانات در سازه بهینه شده کاهش یافته و علاوه بر آن، سریعاً خنثی خواهد شد. در صورتیکه در سازه بهینه نشده، سازه پس از جابجایی اولیه، تا انتهای زمان تحلیل دارای نوسان می‌باشد.

شامل می‌شود. برای بهینه‌سازی پارامترهای هندسی پوسته تقویت شده FG که روی بستر الاستیک قرار دارد، از برنامه GA استفاده شده است. مقایسه حل تحلیلی و FEM و فرم بهینه انجام شده است. علاوه بر این، اثراتی شامل بر تاثیر میرایی برای پوسته استوانه‌ای FG تقویت شده و همچنین بررسی اثر میرایی منجر به نتایج جدیدی می‌شود که در نمودارها نشان داده شده است. علاوه بر این، تأثیر متقابل دو پارامتر به طور همزمان بر فرکانس طبیعی نشان داده شده است. برای تایید نتایج در هر مرحله، مقایسه انجام شده و توافق خوبی در نظر گرفته شده است. یافته‌ها و اظهارات مهم زیر را می‌توان بیان کرد:

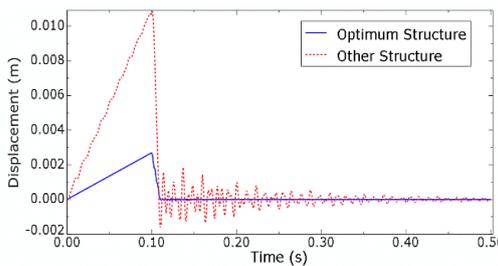
همانطور که در شکل‌ها نشان داده شده است، با افزایش طول پوسته استوانه‌ای تقویت شده FG، مقدار فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابد. پارامترهای شاخص کسر حجمی و طول به ترتیب کمترین و بیشترین تأثیر را بر روی مقدار فرکانس‌های طبیعی سازه دارند.

به دلیل تأثیر متقابل دو پارامتر به طور همزمان، با ثابت ماندن شاخص کسر حجمی و افزایش طول پوسته استوانه‌ای، فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابد. علاوه بر این، با ثابت ماندن ضخامت پوسته استوانه‌ای، با افزایش ضریب بستر الاستیک، فرکانس‌های طبیعی سازه افزایش می‌یابد.

مقایسه بین فرکانس‌های طبیعی روش FEM و تحلیلی تفاوت ۳/۶۳٪ را بیان می‌کند که حل آن تطابق خوبی را نشان می‌دهد. علاوه بر این مقایسه دیگری بین حل تحلیلی و حل بهینه GA انجام شده است که در آن تفاوت ۷/۰۳٪ محاسبه شده است. همانطور که قبلاً ذکر شد، برای رسیدن به هدف طراحی پوسته استوانه‌ای



شکل ۱۷. مقایسه پاسخ زمانی دامنه شتاب در پوسته بهینه و غیر بهینه



شکل ۱۸. مقایسه پاسخ زمانی دامنه جابجایی در پوسته بهینه و غیر بهینه

## ۹. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این تحقیق، معادله حاکم بر تحلیل فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای تقویت شده FG با استفاده از روش تحلیلی استخراج شده است. بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT)، در مختصات قطبی برای تجزیه و تحلیل پوسته استوانه‌ای استفاده شده است. رابطه کرنش-جابجایی خطی برای مدل‌سازی مسئله استفاده بکار رفته است. روش اصل همپلتون و المان محدود برای استخراج معادلات حرکت حاکم استفاده شده و مدل‌سازی المان محدود برای اعتبارسنجی و مقایسه نتایج انجام شده است. یک المان دو بعدی ۴ گره با ۲۰ درجه آزادی برای مش بندی دامنه اعمال شده است. برای مدل‌سازی FE، دو دسته مانند مدل‌سازی FE با و بدون میرایی پیشنهاد شد. تاثیر پارامترهای هندسی مختلف از جمله شاخص کسر حجمی، طول، ضخامت و شرایط مرزی مختلف را

- 4, 1997.
- [7] Rastogi, N., Johnson, E. R.: Analysis of an internally pressurized orthogonally stiffened cylindrical shell with an asymmetrical section ring. *Mechanics of Composite Materials and Structures an international Journal*, 3(1), 29-64, 1996.
- [8] Roundy, S., et al.: Energy scavenging for wireless sensor networks: with special focus on vibrations. Kluwer Academic, Boston, 2004.
- [9] Wang, W., et al.: Development and Prospect of Smart Materials and Structures for Aerospace Sensing Systems and Applications. *Sensors*, 23(3), 1545, 2023.
- [10] Hemmatnezhad, M., Rahimi, G. H., & Ansari, R. On the free vibrations of grid-stiffened composite cylindrical shells. *Acta Mechanica*, 225(2), 609-623, 2014.
- [11] Chate, A., et al.: Analysis of free damped vibrations of laminated composite cylindrical shells. *Mechanics of composite materials*, 31, 474-484, 1996.
- [12] Najafizadeh, M. M., & Isvandzibaei, M. R. Vibration of functionally graded cylindrical shells based on higher order shear deformation plate theory with ring support. *Acta Mechanica*, 191(1), 75-91, 2007.
- [13] Iqbal, Z., Naeem, M. N., & Sultana, N. Vibration characteristics of FGM circular cylindrical shells using wave propagation approach. *Acta Mechanica*, 208(3), 237-248, 2009.
- [14] Mehrabani, M. M., et al.: Multidisciplinary optimization of a stiffened shell by genetic algorithm. *Journal of mechanical science and technology*, 26, 517-530, 2012.
- [15] Sofiyev, A. H. Dynamic buckling of functionally graded cylindrical thin shells under non-periodic impulsive loading. *Acta Mechanica*, 165(3), 151-163, 2003.
- [16] Zhao, X., et al.: Vibrations of rotating cross-ply laminated circular cylindrical shells with stringer and ring stiffeners. *International Journal of Solids and Structures*, 39(2), 529-545, 2002.
- [17] Mustafa, B. A. J., Ali, R.: An energy method for free vibration analysis of stiffened circular cylindrical shells. *Computers & structures*, 32(2), 355-363, 1989.
- [18] Tran, M. T., et al.: Free vibration of stiffened functionally graded circular cylindrical shell resting on Winkler-Pasternak foundation with different boundary conditions under thermal environment. *Acta mechanica*, 231, 2545-2564, 2020.
- [19] Nguyen, V. L., Hoang, T. P.: Analytical solution for free vibration of stiffened functionally graded cylindrical shell

تقویت شده FG، بهینه سازی پارامترهای هندسی پوسته FG تقویت شده باعث افزایش فرکانس های طبیعی می شود.

با در نظر گرفتن اثرات میرایی و بستر الاستیک در حالت بهینه، دامنه نوسانات پوسته استوانه‌ای تقویت شده FG حداکثر ۵۰٪ کاهش می یابد.

پس از بررسی وضعیت ارتعاشی پوسته بهینه و غیر بهینه تحت تحریک واحد در حضور میرایی با توجه به پاسخ زمانی دامنه شتاب، این نتایج حاصل شد که دامنه شتاب بوجود آمده در حالت بهینه کاهش یافته است که نشان دهنده وارد آمدن نیروی کمتری به سازه می باشد. همچنین زمان میرا شدن در حالت بهینه نیز کاهش می یابد که به نوبه خود بیانگر این است که سازه زمان کمتری را تحت بار قرار دارد که از نقطه نظر خستگی حائز اهمیت می باشد، نتایج مشابهی نیز از گراف پاسخ زمانی دامنه جابجایی نیز قابل برداشت است.

## ۱۰. مآخذ

- [1] Mashat, Daoud S., et al.: Free vibration of FGM layered beams by various theories and finite elements. *Composites Part B: Engineering* 59,269-278, 2014.
- [2] Eltahir, M. A. M., et al.: Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. *www.Elsevier.com/locate/apm*, 2011.
- [3] Mahamood, RM., Akinlabi, ET.: Types of functionally graded materials and their areas of application. *Functionally graded materials*, 2017.
- [4] Yang, Q., et al.: Stress analysis of a functional graded material plate with a circular hole. *Archive of Applied Mechanics*, 80, 895-907, 2010.
- [5] Li, Q., & Popov, V. L.: Boundary element method for normal non-adhesive and adhesive contacts of power-law graded elastic materials. *Computational Mechanics*, 61(3), 319-329, 2018.
- [6] Koizumi, M.: FGM activities in Japan. *Composites part B: engineering*, 28(1-2), 1-

$h_s, b_s$	ارتفاع و عرض استرینگر
$h_r, b_r$	ارتفاع و عرض رینگ
$A_s, A_r$	سطح مقطع استرینگر و رینگ
$S_s, S_r$	فاصله بین رینگ و استرینگر
$Z_s, Z_r$	فاصله از مرکز استرینگر و رینگ تا سطح میانی پوسته استوانه‌ای
$k_w$	ضریب بستر الاستیک
$C_w$	ضریب دمپینگ بستر
$Q^{(e)}$	بردار جابجایی المانی
$\psi$	ماتریس توابع شکلی
$\xi, \eta$	سیستم مختصات محلی
$q^{(e)}$	بردار جابجایی های گرهی المانی
$t$	مختصه زمانی
$I$	ماتریس اینرسی جرمی
$\omega_n$	فرکانس طبیعی
$C$	ضریب میرایی (دمپینگ)
$\zeta$	نسبت میرایی

- structure resting on elastic foundation. SN Applied Sciences, 1(10), 1150, 2019.
- [20] Babaei, M., Asemi, K.: Static, dynamic and natural frequency analyses of functionally graded carbon nanotube annular sector plates resting on viscoelastic foundation. SN Applied Sciences, 2, 1-21, 2020.
- [21] Zienkiewicz, O. C., et al.: The finite element method: its basis and fundamentals. Elsevier, 2005.
- [22] SIMULIA User Assistance, 2021.
- [23] Yu, D., et al.: High-cycle fatigue life prediction for Pb-free BGA under random vibration loading. Microelectronics Reliability, 51(3), 649-656, 2011.
- [24] Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S.: Theory of plates and shells (Vol. 2, pp. 240-246). New York: McGraw-hill, 1959.

## ۱۱. فهرست علائم

$L$	طول پوسته استوانه‌ای
$R$	شعاع متوسط پوسته استوانه‌ای
$h$	ضخامت پوسته استوانه‌ای
$\rho$	جرم حجمی ماده پوسته استوانه‌ای
$E$	مدول الاستیسیته ماده پوسته استوانه‌ای
$u$	ضریب پوآسون ماده پوسته استوانه‌ای
$x$	مختصه مکانی در راستای طولی پوسته استوانه ای
$y$	مختصه مکانی در راستای محیطی پوسته استوانه‌ای
$z$	مختصه مکانی در راستای شعاعی پوسته استوانه ای
$u(x, t)$	تغییر مکان وابسته به زمان در راستای طولی پوسته استوانه‌ای
$v(x, t)$	تغییر مکان وابسته به زمان در راستای محیطی پوسته استوانه‌ای
$w(x, t)$	تغییر مکان وابسته به زمان در راستای شعاعی پوسته استوانه‌ای
$\varphi_x$	مولفه چرخش پوسته در راستای $\theta$
$\varphi_\theta$	مولفه چرخش پوسته در راستای $x$
$\sigma_x, \sigma_\theta, \tau_{x\theta}$	مولفه های تنش
$\varepsilon_x, \varepsilon_\theta, \gamma_{x\theta}$	مولفه های کرنش
$N_x, N_\theta, N_{x\theta}$	نیروهای داخلی لبه‌ای پوسته استوانه ای
$M_x, M_\theta, M_{x\theta}$	گشتاورهای خمشی لبه‌ای پوسته استوانه ای
$k_s$	ضریب تصحیح برش
$0$	مشخصه لایه میانی پوسته استوانه‌ای
$P$	شاخص کسر حجمی مواد در ضخامت پوسته استوانه ای

## ۱۲. پیوست

$$M^e = \int_{S^{(e)}} \psi^T I \psi R dx d\theta \quad (52)$$

$$k_1^{(e)} = \int_{S^{(e)}} \left[ (B_3)^T A^T + (B_4)^T B^T \right] B_3 R dx d\theta \quad (53)$$

$$k_2^{(e)} = \int_{S^{(e)}} \left[ (B_3)^T B^T + (B_4)^T D^T \right] B_4 R dx d\theta \quad (54)$$

$$k_3^{(e)} = \int_{S^{(e)}} [(B_2)^T e^T d_2 \psi] R dx d\theta \quad (55)$$

$$k_4^{(e)} = \int_{S^{(e)}} k_w \bar{\psi}^T \bar{\psi} R dx d\theta \quad (56)$$

$$C^{(e)} = \int_{S^{(e)}} C_w \bar{\psi}^T \bar{\psi} R dx d\theta \quad (57)$$

$$F^{(e)} = \int_{S^{(e)}} \psi^T \bar{P} R dx d\theta \quad (58)$$

$I$  یک ماتریس اینرسی جرم است و از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$I = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & I_1 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & I_1 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad (59)$$

که:  $I_i, i=0, 1, 2$

$$\begin{Bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} \rho_{eq} dz \quad (60)$$

### ۱۳. پی نوشت

1. FG: Functionally Graded Material
2. FOSDT: First Order Shear Deformation Theory
3. TOSDT: Third Order Shear Deformation Theory
4. Non-Periodic
5. Half Power Bandwidth Method
6. RSM: Responsible Separation Method
7. DOE: Design of Expert

