

بررسی ضرایب تمرکز تنش مکانیکی و الکتریکی در برداشت انرژی از مواد پیزوالکتریک شامل ترک با استفاده از روش اجزا محدود

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۱/۲۲

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱۰/۱۴

مجید جباری^۱، امید رئوفی^۲

^۱ استادیار، گروه مکانیک، واحد خمینی شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، خمینی شهر، اصفهان، jabbari@iaukhsh.ac.ir

^۲ کارشناسی ارشد، گروه مکانیک، واحد خمینی شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، خمینی شهر، اصفهان

چکیده

با کاربرد پدیده پیزوالکتریک به عنوان مولد انرژی الکتریکی و یا مولد حرکت ارتعاشی تحقیقات برای افزایش کارایی این پدیده ادامه دارد. یکی از عوامل موثر در کارایی تولید انرژی، ایجاد ترک در مواد پیزوالکتریک به عنوان موقعیت تمرکز تنش می باشد. در این مقاله به بررسی ارتباط بین وجود نقاط تمرکز تنش و برداشت انرژی الکتریکی در مواد پیزوالکتریک پرداخته می شود. با توسعه کد عددی ضرایب شدت تنش مکانیکی و الکتریکی و رفتار آنها برای حالات مختلف قرارگیری ترک و طول آن در مواد پیزوالکتریک در شرایط بارگذاری های مکانیکی و الکتریکی با دو روش انطباق نقطه ای و انتگرال J حاصل می شود. طبق نتایج خطای حاصل از روش انطباق نقطه ای $4/6$ و انتگرال J مقدار $2/9$ درصد با ترک داخلی تحت بارگذاری مرکب می باشد. حالات دیگر نیز مورد بررسی قرار گرفت و ضرایب تمرکز تنش مکانیکی و الکتریکی با تغییر شرایط اعمال تنش و شرایط فیزیکی ترک تغییر می کند.

کلمات کلیدی: الگوریتم ژنتیک، روش عددی، پیزوالکتریک، بهینه سازی، ولتاژ.

۱۰۷

سال ۱۴ - شماره ۲

پاییز و زمستان ۱۴۰۴

نشریه علمی

دانش و فناوری هوا فضا



دانشگاه صنعتی امیرکبیر

بررسی ضرایب تمرکز تنش مکانیکی و الکتریکی در برداشت انرژی از مواد پیزوالکتریک شامل ترک با استفاده از روش اجزا محدود

Investigation of mechanical and electrical stress concentration coefficients of energy harvesting from piezoelectric materials including cracks using the finite element method

Majid Jabbari¹, Omid Raoufi²

1- Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Kho.C., Islamic Azad University, Khomeinishahr, Iran.

2- Master, Department of Mechanical Engineering, Kho.C., Islamic Azad University, Khomeinishahr, Iran, Iran.

Abstract

With the application of the piezoelectric phenomenon as a generator of electric energy or as a generator of vibrational motion, the research on increasing the efficiency of this phenomenon is always ongoing. One of the effective factors in the efficiency of energy production is the occurrence of cracks in piezoelectric materials, as a stress concentration situation. In the article, the relationship between the presence of stress concentration points and electrical energy harvesting in piezoelectric materials is investigated. From the results, it is possible to find the intensity coefficients of mechanical and electrical stress and study their for different conditions crack and its length in piezoelectric materials and in the conditions of mechanical and electrical loading. According to the results, the error obtained from the point matching method is 4.6 and the J integral is 2.9 percent with internal cracking under compound loading. The results show that the mechanical and electrical stress concentration coefficients change with the change of the stress application conditions, the crack and the material.

Keywords: Genetic algorithm, Numerical method, Piezoelectric, Optimization, Voltage.



۱. مقدمه

وجود نقص‌هایی مانند ترک، بریدگی‌ها، حفره‌های باریک و غیره در مواد واقعی ممکن است در برخی موارد منجر به انتشار سریع ترک و شکست در کل جسم شود. تئوری ریاضی ترک‌ها بر اساس روش انرژی گریفیث برای روش‌های عملی و مطالعات نظری و جنبه‌های مختلف فرآیند شکست و همچنین توسعه و گسترش شیوه‌های کاربردی آنالیز و تجزیه و تحلیل استحکام عناصر سازه‌ها بسیار مناسب می‌باشند.

در حال حاضر پیشرفت‌های قابل توجهی در بررسی شکست مواد تحت بارگذاری‌های مکانیکی و حرارتی به دست آمده است. با این حال، شکست مواد با میدان‌های دوگانه طبیعی مختلف (به عنوان مثال، الاستیک، حرارتی و الکتریکی) به طور کامل تحت مطالعه قرار نگرفته است. در عین حال پیزوالکتریک‌ها طبیعت ترد داشته و به دلیل وقوع شکست در آنها تعمیم روش مکانیک شکست مواد پیزوالکتریک سودمند و مفید می‌باشد. در این زمینه تحقیقاتی متعددی انجام گرفته است. لوکاتو و همکاران [۱] از نمونه‌هایی ماده PZT^۱ برای بررسی مقاومت شکست (منحنی R) به وسیله بارگذاری مکانیکی استفاده کردند. با توجه به اینکه نمونه‌هایی که به طور عمودی قطبی شده‌اند نسبت به جهت ترک، سختی کمتری در مقایسه با حالت غیرقطبی داشتند نتایج آنها نشان می‌دهد که قطبی‌سازی در طول در قسمت جلو ترک منجر به مقاومت بالاتر می‌شود. این رفتار می‌تواند به وسیله تعویض در

منطقه فرآیند توضیح داده شود که اگر جهت میدان‌ها تعویض شود انرژی بیشتری را جذب می‌کند. کوفی بونسی [۲] عمر خستگی مولدهای انرژی پیزوالکتریک ساخته شده از جنس سرامیک PZT را مورد مطالعه قرار داد. چنین سازه‌هایی در میکرو سیستم‌های الکتریکی به عنوان محرک و مولد انرژی برای تبدیل انرژی الکتریکی به مکانیکی و بالعکس به کار می‌روند. به این منظور سازه‌ای جهت تحریک و به ارتعاش درآوردن تیر یک سردرگیر PZT ساخته و روشی برای کشف رفتار الکتریکی و مکانیکی تیر تدوین و ارتباط بین تغییرات و رفتارها در شروع عیب مشخص شد. سپس به وسیله کاربرد عمر نهایی و تلورانس‌های عیب، روش‌هایی برای تعیین عمر خستگی تیر PZT جهت نزدیک شدن به تست خستگی تدوین شد. آزمایش‌های شکست با نمونه‌های DCB^۲ و BaTiO₃ توسط فوردیرچر و همکاران [۳] انجام شده است. آنها تاثیر میدان الکتریکی بر روی مقاومت شکست را در طی رشد ترک ثابت بررسی کردند. ضمن ایجاد ترک به طور مکانیکی، میدان الکتریکی به صورت عمودی برای ترک به کار گرفته می‌شود. در این حالت تاخیر قابل توجهی در سرعت ترک قابل مشاهده است. پارامترهای شکست مناسب توسط آنالیز اجزا محدود برای این نمونه‌های آزمایشی مورد محاسبه قرار گرفته است.

روش‌های تحلیلی، نیمه تحلیلی و عددی متفاوتی برای مدل‌سازی مسایل حاوی ترک وجود دارد. از جمله روش‌های عددی می‌توان به روش انتگرال مرزی، روش المان مرزی، روش اجزاء محدود و نیز

روش‌های بدون المان اشاره کرد. امروزه روش‌های اجزاء محدود از بین روش‌های عددی متداول، پرکاربردترین ابزار برای تحلیل مسایل مهندسی و فیزیکی شده است. روش اجزاء محدود به صورت ذاتی بر اساس پیوستگی المان‌ها استوار شده است. بنابراین در حل مسایلی که شرایط ناپیوستگی مانند ترک در آن‌ها وجود دارد تحلیل با این روش به سادگی میسر نخواهد بود. به طور کلی در مدل‌سازی ترک با استفاده از روش اجزاء محدود، المان‌ها در اطراف ناحیه ناپیوسته قرار داده می‌شوند و شبکه باید به طور کامل با ترک تطبیق پیدا کند. اصفهانی و محمدی [۴] در مقاله‌ای مدل مربوط توسط روش اجزاء محدود توسعه یافته با استفاده از توابع غنی‌سازی جدید مدل شده و ضرایب شدت تنش برای این نوع ترک به صورت عددی و با استفاده از روش انتگرال J را برآورد کردند. اقدامی و جباری [۵] به منظور بهینه‌سازی ابعاد هندسی میکرو تیر پیزوالکتریک از ابزار الگوریتم ژنتیک نرم افزار متلب استفاده کردند. آنها پارامترهای طول تیر، طول لایه پیزوالکتریک، پهنای تیر، ضخامت لایه پیزوالکتریک و ضخامت تیر برای بهینه‌کردن ولتاژ برداشت شده به عنوان تابع هدف در بهینه‌سازی در نظر گرفتند. موی و همکاران [۶] یک روش جدید برای مدل‌سازی ترک‌ها در چارچوب اجزای محدود ارائه کردند. در این روش یک تقریب مبتنی بر جابجایی استاندارد در نزدیکی شکاف با ترکیب میدان‌های ناپیوسته و میدان‌های جانبی نوک ترک از طریق تعامل هندسه ترک با مش حاصل می‌شود. این روش اجازه می‌دهد تا کل ترک به طور مستقل

از مش نمایش داده شود و بنابراین برای مدل‌سازی رشد ترک نیازی به لایه‌بندی مجدد نیست. بارگاو و همکاران [۷] به بررسی اثرات اندازه محدود بر محیط‌های پیزوالکتریک دو بعدی ترک‌خورده با استفاده از روش المان محدود پرداختند. آنها نشان دادند برای مقادیر کوچکتر نسبت عرض نوار به طول ترک، محدود بودن اندازه نمونه بر فاکتورهای شدت تأثیر می‌گذارد. بیشتر طرح‌های برداشت انرژی بر بهبود راندمان برداشت تمرکز می‌کنند و توجه کمتری به آسیب‌خستگی می‌شود. جباری و احمدی [۸] ماتریس سختی دینامیکی برای تیر پیزوالکتریک را توسعه داده و به وسیله ماتریس به دست آمده تأثیر محل قرارگیری جرم متمرکز بر خروجی الکتریکی و رفتار سیستم در برداشت انرژی را بررسی کردند. کای و همکاران [۹] یک برداشت‌کننده انرژی پیزوالکتریک جدید با پانل منحنی پیشنهاد دادند. پانل منحنی برداشت انرژی در طول فرآیند تغییر شکل، رفتار دوپایداری از خود نشان می‌دهد به طوری که انرژی ارتعاشی می‌تواند به طور موثر به انرژی الکتریسیته تبدیل شود. شاینگ و همکاران [۱۰] یک دستگاه برداشت‌کننده انرژی پیزوالکتریک کم‌هزینه را پیشنهاد کردند تا انرژی را از ارتعاشات فرکانس پایین دریافت کند و آن را به انرژی الکتریکی تبدیل کند و آسیب‌خستگی ناشی از تمرکز تنش را کاهش دهد. به منظور بهینه‌سازی راندمان تولید انرژی این برداشت انرژی، آنالیز اجزای محدود و آزمایش‌های تجربی انجام شد.





در این تحقیق با توجه به مدل عددی توسعه داده شده در این پژوهش، تعیین ضرایب شدت مکانیکی و الکتریکی در صفحات پیزوالکتریک همگن و غیرهمگن تحت بارگذاری الکتریکی، مکانیکی و مرکب حاصل می‌شوند. نوآوری حاصله را می‌توان حصول ضرایب شدت تنش در صفحات پیزوالکتریک تحت انواع بارگذاری‌ها بیان نمود. امکان حصول این نتایج به طور مستقیم در نرم‌افزارهای مهندسی برای شرایط مدل پیزوالکتریک با وجود ترک با روش‌های ذکر شده در این پژوهش وجود نداشته و بنابراین با توسعه کد مدل عددی با روش‌های محاسباتی برای حالات مختلف موقعیت ترک، بررسی ضرایب تنش برای صفحات همگن و غیرهمگن پیزوالکتریک بدست می‌آید.

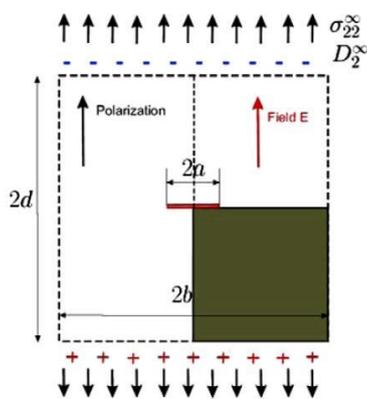
۲. تئوری

وجود نقص‌هایی مانند ترک، بریدگی‌ها، حفره‌های باریک و غیره در مواد واقعی ممکن است در برخی موارد منجر به انتشار سریع ترک و شکست در کل جسم شود. تئوری ریاضی ترک‌ها بر اساس روش انرژی گریفیث برای روش‌های عملی و مطالعات نظری و جنبه‌های مختلف فرآیند شکست و همچنین توسعه و گسترش شیوه‌های کاربردی آنالیز و تجزیه و تحلیل استحکام عناصر سازه‌ها، بسیار مناسب می‌باشند.

یک معیار شکست برای شروع ترک باید به صورت رابطه ۱ فرمول بندی شود [۱۱]:

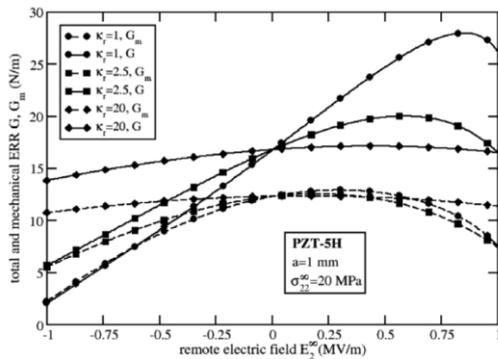
$$B(K_I, K_{II}, K_{IV}) \equiv B(G_m^I, G_m^{II}, G_e) = B_c(P_i^r, E_i, \Delta a, \dots) \quad (1)$$

در رابطه فوق K_I ، K_{II} و K_{IV} ضرایب شدت تنش در مود I، ضرایب شدت تنش در مود II و ضرایب شدت جابجایی-الکتریکی، G_e ، G_m^I و G_m^{II} انرژی رهایش مکانیکی و الکتریکی، P_i^r و E_i میدان‌های مکانیکی و الکتریکی و Δa اندازه طول ترک می‌باشد. خروجی این رابطه نیروی مناسب برای رشد ترک را به دست می‌آورد در حالی که کمیت‌های سمت راست مقاومت ماده را نشان می‌دهند. در هر دو سمت معادله ۱ میدان الکتریکی به کار گرفته می‌شود. در قسمت انتخاب بارگذاری عبارت‌های انرژی الکتریکی و ضریب شدت جابجایی-الکتریکی (K_{IV}) معین شده‌اند. همچنین بسیار ضروری است که مشخص شود چقرمگی شکست به چه چیزی بستگی دارد و این که شکست هنوز مثل یک گسیختگی مکانیکی عمل می‌کند. برای درک اساسی و بهتر، جوابی برای بارگذاری الکترومکانیکی برای ترک گریفیث در نظر گرفته می‌شود که در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱- ترک گریفیث با قطب عمودی و میدان الکتریک

نفوذ پذیری) با روغن سیلیکون $k_r = 2.5$ و یا برای محیط تقریباً نفوذپذیر $k_r = 50$ می‌باشد.



شکل ۲- نرخ رهاسازی انرژی در مقابل میدان الکتریکی برای روابط مختلف نفوذپذیری k_r با ترک گریفیت در PZT-5H در تنش دور دست ثابت σ_{zz}^{∞} [۱۲]

بر اساس اثر غیرخطی شار وجوه ترک و کشش‌ها، رفتار $G(E_2^{\infty})$ به صورت نامتقارن در می‌آید و بیشترین اتصال به مقدار بالا انجام می‌شود. طبق شکل ۲ بدون میدان الکتریکی تمام منحنی‌ها در یک نقطه به هم می‌رسند. برای مقایسه قسمت مکانیکی خاص G_m در ERR^T به صورت خط ناپیوسته نمایش داده شده است [۱۳].

در روش اجزاء محدود توسعه یافته، روند کار به این صورت است که در ابتدا شبکه اجزاء محدود بدون در نظر گرفتن ناپیوستگی که می‌تواند ترک یا حفره باشد ساخته می‌شود. سپس برای در نظر گرفتن ناپیوستگی، با استفاده از توابع غنی‌ساز تعدادی درجات آزادی اضافی در محل گره‌های موجود در شبکه که با ناپیوستگی درگیر هستند به مدل اضافه می‌گردد و بدین طریق ناپیوستگی،

جواب تحلیلی برای ضرایب شدت K_{IV} و K_I در حالت‌های مختلف به صورت رابطه ۲ نوشته می‌شود [۱۱].

$$K_I = (\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{22}^C) \sqrt{\pi a}$$

حالت نفوذناپذیری الکتریکی:

$$K_{IV} = D_2^{\infty} \sqrt{\pi a}$$

حالت نیمه نفوذپذیری الکتریکی: (۲)

$$K_{IV} = (D_2^{\infty} - D_2^C) \sqrt{\pi a}$$

حالت نفوذ پذیری الکتریکی

$$K_{IV} = f(K_I)$$

در حالت خاص دوبعدی وقتی که ترک به صورت عمودی قرار می‌گیرد، معادله بین ضریب شدت تنش و نرخ رهاسازی انرژی در معادله گریفیت می‌تواند به صورت رابطه ۳ با دو ضریب K بیان شود که در آن k, e و C_T ثابت‌های الاستیک، پیروزالکتریک و دی الکتریک هستند [۱۱]

$$G = G_m + G_e + \frac{1}{2} \left(\frac{K_I^2}{C_T} + \frac{K_I K_{IV}}{e} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{K_I K_{IV}}{e} + \frac{K_{IV}^2}{k} \right)$$

(۳)

در صورت علامت منفی در این رابطه، انرژی کلی کاهش می‌یابد. اگر معیار شکست بر اساس G و یا G_m تنظیم شود، تاثیر میدان انتخابی E_2^{∞} یا K_{IV} می‌تواند حاصل شود. بزرگی هر دو ضریب شدت از طریق معادلات ۳ و بر اساس شرایط مرزی وجوه ترک به دست می‌آید. در حالت نفوذناپذیری با توجه به علامت E_2^{∞} رفتار کاملاً متقارن بوده و اثر الکتریکی مقاومی را ارائه می‌دهد. برعکس برای حالت نفوذپذیری، $G(K_{IV} \approx 0)$ تقریباً به E_2^{∞} وابسته است. جواب‌های شبه‌نفوذپذیری درون این دو محدوده قرار می‌گیرد و از شکل ۲ قابل مشاهده است. برای ترک که با هوا پر شده $k_r = 1$ (ضریب



بدون آن که در شبکه به طور آشکار در نظر گرفته شده مدل می شود.

تابع تغییر مکان در مدل اجزا محدود به صورت رابطه ۴ تعریف می شود [۱۱].

$$u^h(x) = \underbrace{\sum_{n_I \in N} I \phi_I(x) u_I}_{\text{قسمت اجزای محدود معمولی}} + \underbrace{\sum_{n_J \in N^g} J \phi_J(x) \varphi(x) a_J}_{\text{قسمت غنی شده}} \quad (4)$$

u_I درجات آزادی تغییر مکانی در اجزای محدود متداول، a_J درجات آزادی تغییر مکانی اضافی نسبت به مدل اجزای محدود متداول و مربوط به غنی سازی، ϕ_I تابع شکلی مربوط به گروه I در اجزای محدود متداول، $\varphi(x)$ تابع غنی ساز و N^g مجموعه ای گره ها با تعریف رابطه ۵ می باشد.

$$N^g = \{n_J: n_J \in N, \omega_J \cap \Omega_g \neq \emptyset\} \quad (5)$$

در معادله ۵، ω_J دامنه اثر تابع شکلی ϕ_J در گره n_J و Ω_g حوزه وابسته به هندسه ناپیوستگی ها همچون سطح و یا نوک ترک می باشد. تعیین تابع غنی ساز $\varphi(x)$ با توجه به نوع ناپیوستگی و شرایط تحلیلی در دسترس مربوط به آن انجام می پذیرد. در واقع به صورت کاملاً کلی و ساده، N^g مجموعه ای از گره ها است که به نوعی با ناپیوستگی در ارتباط هستند.

روشی که برای تعیین ضرایب شدت تنش در حالت مود ترکیبی در اینجا استفاده می شود، استفاده از انتگرال J است که مقدار آن از معادله (۶) به دست می آید [۱۱]:

$$J = \int_{\Gamma} \left(W \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_j d\Gamma \quad (6)$$

که در آن Γ یک مسیر دلخواه در اطراف نوک ترک به نحوی که هیچ ترک یا ناپیوستگی دیگری را

شامل نشود، W چگالی انرژی کرنشی، n_j بردار عمود بر Γ به سمت خارج و δ_{1j} دلتای کرانیکر می باشد. برای سهولت بیشتر به جای انتگرال گیری روی خط، انتگرال بر روی سطح محاسبه می شود. برای تعیین ضرایب شدت تنش در حالت مود ترکیبی با استفاده از انتگرال J نیاز است که از یک حالت کمکی هم استفاده شود، زیرا انتگرال J به تنهایی فقط یک رابطه بین ضرایب شدت تنش در مودهای اول و دوم را تعیین می کند و لذا به یک معادله اضافی بین این دو ضریب نیاز می باشد. به همین علت فرض می شود که دو حالت تنش و تغییر مکان وجود دارد که یکی مربوط به تنش ها و تغییر مکان های مساله است و دیگری مربوط به حالت کمکی می باشد. بنابراین انتگرال J^S را زمانی که هر دو حالت با هم بر ماده تاثیر داده شوند، به صورت معادله ۷ خواهد شد و بنابراین با استفاده از انتگرال برهم کنش (M) می توان ضرایب شدت تنش در بین دو محیط دوسانگرد را محاسبه نمود.

$$J^S = J + J^{aux} + M \quad (7)$$

J و J^{aux} به ترتیب مقادیر انتگرال برای حالت های واقعی و کمکی می باشند.

برای استفاده از روش اجزا محدود توسعه یافته باید توابع غنی سازی مربوط به مدل سازی ترک بین دو ماده اورتوتروپ را معرفی کرد. این توابع غنی سازی جدید، از روابط دو بعدی تغییر مکان های نزدیک نوک ترک بین لایه ای استخراج شده اند. با استفاده از این توابع غنی سازی، قابلیت روش اجزای محدود توسعه یافته در آنالیز ترک بین دو لایه با رفتار الاستیک ارتقا پیدا کرد. همچنین می توان

گفت که آنالیز ترک بین لایه‌های تنها با اصلاح درجات آزادی در المان‌های حاوی ترک توسط توابع غنی‌سازی مناسب (روش اجزاء محدود توسعه یافته)، آسان‌تر از روش‌های مرسوم اجزاء محدود متداول می‌باشد.

به تازگی از روش المان محدود توسعه یافته برای مطالعه تابع‌های غنی‌سازی و همگرایی آنها برای ترک‌های نیمه بی‌نهایت یک ماده پیزوالکتریک استفاده می‌شود. در توابع غنی‌سازی چهارگانه، تنش کشش صفحه‌ای و بارگذاری الکتریکی مورد استفاده قرار می‌گیرد. دو مساله مهم مرکز و لبه ترک مورد تاکید می‌باشد. در این حالت ضریب شدت مود تنش سوراخ (K_I) و ضریب شدت جابجایی-الکتریکی (K_{IV}) با استفاده از تکنیک برهم‌کنش انتگرالی و رفتار نوک ترک توسط فرمولاسیون لخنیتسکی محاسبه می‌شود. برای کاهش مقدار محاسبات یک شبکه‌بندی به اصطلاح موضعی انجام شده و همچنین نتایج K_I و K_{IV} با شبکه‌بندی ساخت یافته مقایسه می‌گردد.

روش المان محدود توسعه یافته به توابع غنی‌سازی محلی اجازه می‌دهد که در تقریب‌سازی المان محدود به راحتی شرکت کند. بنابراین تقریب استاندارد در ناحیه مورد دلخواه توسط توابع محلی با درجات آزادی اضافی غنی‌سازی می‌شود. برای مسایل ترک، توابع غنی‌سازی، میدان‌های نزدیک نوک مجانبی هستند و توابع ناپیوسته برای بیان پرش در جابجایی در طول مرز ترک استفاده می‌شوند.

برای یک مساله با دامنه نامحدود در مکانیک شکست پیزوالکتریک تحت تنش کششی σ_∞ و جابجایی الکتریکی D_∞ بر روی مرز دور از دسترس، فاکتور شدت تنش مد $I(K_I)$ و فاکتور شدت جابجایی الکتریکی^۴ یعنی K_{IV} در نوک ترک به ترتیب $\sigma_\infty = \sqrt{\pi a}$ و $D_\infty = \sqrt{\pi a}$ می‌باشد. در حالی که نمونه‌هایی با ابعاد محدود باشد ضریب اصلاحی بی‌بعد که به نسبت $\frac{a}{w}$ وابسته است، برای ضریب شدت به صورت رابطه λ تعریف می‌شود [7]:

$$K_I = C \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \quad (8)$$

$$K_{IV} = C D_\infty \sqrt{\pi a} \quad (9)$$

$$C = \sqrt{\sec\left(\frac{\pi a}{2w}\right)} \left(1 - 0.025 \left(\frac{a}{w}\right)^2 + 0.06 \left(\frac{a}{w}\right)^4\right)$$

a طول نیمه ترک و w نصف عرض نمونه برای مسایل با ترک مرکزی است.

$$C = 1.12 - 0.231 \left(\frac{a}{w}\right) + 10.55 \left(\frac{a}{w}\right)^2 - 21.72 \left(\frac{a}{w}\right)^3 + 30.39 \left(\frac{a}{w}\right)^4 \quad (10)$$

در روابط فوق a طول ترک لبه‌ای و w عرض نمونه برای مسایل با ترک لبه‌ای است. درصد خطا و مقدار طبیعی ضرایب شدت تنش به ترتیب به صورت رابطه ۱۱ و ۱۲ محاسبه می‌شوند [7]:

$$IFs = \frac{(IFs_{X-FEM} - IFs_{Analytically})}{IFs_{Analytically}} \times 100 \quad (11)$$

$$IFs = \frac{IFs_{X-FEM}}{IFs_{Analytically}} \quad (12)$$

در ادامه نتایج عددی برای محاسبه ضرایب شدت در مواد پیزوالکتریک با استفاده از انتگرال برهم‌کنش آورده می‌شود که با ضرایب شدت که از روش تحلیلی در این قسمت محاسبه شده، مقایسه





می‌گردد. روش انتگرال برهم‌کنش یک ابزار موثر برای محاسبه ضرایب شدت تنش و ضرایب شدت جابجایی الکتریکی در مواد پیزوالکتریک همگن می‌باشد.

با استفاده از میدان‌های تنش، کرنش و تغییر در حوزه نوک ترک، ضرایب شدت تنش مکانیکی و الکتریکی تعیین می‌شوند. هدف این بخش، استخراج دقیق ضرایب شدت تنش با استفاده از روش‌های عددی در محدوده مکانیک شکست الاستیک خطی است. روش‌های متعددی برای تعیین عددی ضرایب شدت تنش ارائه شده است که در ادامه بررسی می‌شوند.

- روش انطباق نقطه‌ای (همبستگی تغییر مکان‌ها یا انطباق تغییر مکان)

- روش انتگرال J
این روش‌ها به خاطر سادگی و دقت آنها انتخاب شده‌اند. به طور کلی روش‌های استخراج شدت تنش به دو دسته تقسیم می‌شوند:

- روش‌های مستقیم: مقادیر ضرایب شدت تنش به طور مستقیم از نتایج عددی استخراج می‌شوند.

- رهیافت انرژی: ابتدا نرخ رهایش انرژی و پس از آن ضرایب شدت تنش محاسبه می‌شود.

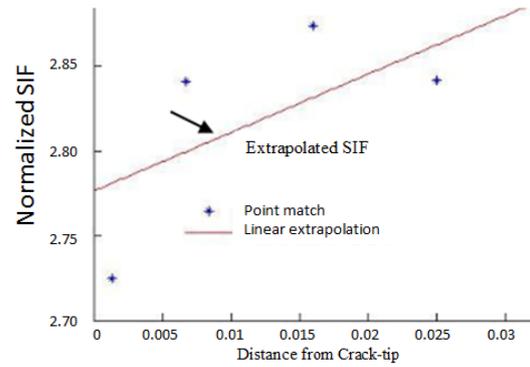
معمولا روش‌های با مبنای انرژی دقیق‌تر هستند و بر روش‌های مستقیم ترجیح داده می‌شوند. اما روش‌های مستقیم نیز قابلیت‌هایی دارند و به خصوص برای تایید نتایج رهیافت انرژی مفید می‌باشند. بیان این روش‌ها ساده است و می‌توان با

محاسبات دستی مقادیر ضریب شدت تنش را به دست آورد.

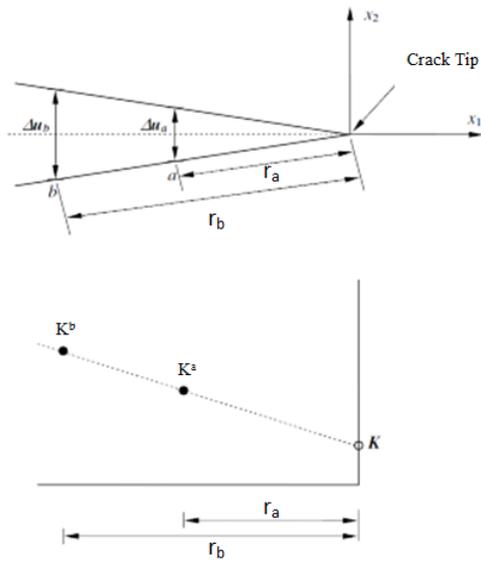
روش همبستگی تغییر مکان‌ها یکی از ساده‌ترین و اولین روش‌هایی است که برای استخراج ضریب شدت تنش از نتایج عددی به کار می‌رود و یک روش مستقیم است. در ساده‌ترین فرم این روش، تغییر مکان‌های حاصل از تحلیل عددی برای یک نقطه (نقطه همبستگی) به طور مستقیم در عبارت-های تحلیلی میدان تغییر مکان حوزه نوک ترک جایگزین می‌شود. این روش برای مواد پیزوالکتریک همگن و غیرهمگن یکسان است.

معمولا نقطه همبستگی روی سطح ترک و با تغییر مکان حداکثر انتخاب می‌شود تا خطای نسبی در محاسبه تغییر مکان‌ها به حداقل برسد. نتایج این روش به موقعیت نقطه همبستگی حساسیت زیادی دارد. لذا برای رسیدن به نتایج مطلوب در این روش باید در انتخاب نقطه همبستگی دقت به خرج داده شود تا با وجود قرار داشتن نقطه در ناحیه کنترل ضریب شدت تنش دارای تغییر مکان مناسب نیز باشد. کاربرد این روش برای المان‌های غیرتکین به شبکه بندی‌ریزی در حوزه نوک ترک نیاز دارد. مزیت اصلی این روش سادگی و محاسبه جداگانه ضریب شدت تنش برای هر سه مورد شکست است. یکی از روش‌هایی که برای افزایش دقت روش همبستگی تغییر مکان‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد، محاسبه ضریب شدت تنش برای تعدادی از نقاط در ناحیه کنترل ضریب شدت تنش است. سپس یک منحنی بر این نتایج برازش می‌شود و مقادیر ضریب شدت برای حالتی برون‌یابی می‌شود

که فاصله‌ی نوک ترک تا نقطه همبستگی (r) مطابق شکل ۳ به سمت صفر میل می‌کند.



شکل ۳- برون‌یابی ضریب شدت تنش در روش همبستگی تغییر مکان‌ها [۱۲]



شکل ۴- کاربرد روش همبستگی تغییر مکان [۱۲]

$$K^i = \sqrt{\frac{\pi}{8r_i}} Y^{-1} \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \\ \Delta \phi \end{Bmatrix} \quad (14)$$

همان‌طور که در شکل ۴ نشان داده شده است، مقادیر شدت تنش در دو نقطه a و b نزدیک نوک ترک به وسیله معادله ۱۵ و روش برون‌یابی به شرح زیر محاسبه می‌شوند [16]:

$$K = \frac{r_a K^b - r_b K^a}{r_a - r_b} \quad (15)$$

۳. مدل ریاضی مساله

جهت شبیه‌سازی از کدنویسی در نرم افزار اجزا محدود انسیس استفاده می‌شود. ابتدا هندسه مساله شامل ابعاد صفحه و ترک ایجاد شده و سپس به شبکه‌بندی مساله پرداخته می‌شود. در این مساله با توجه به شرایط مساله از شبکه‌بندی منظم و با فواصل ثابت استفاده شده است. آنگاه خواص مواد، بارگذاری، جنس صفحه پیزوالکتریک، شرایط مرزی

با به کارگیری روش برون‌یابی ضرایب شدت در مواد پیزوالکتریک در سراسر وجه ترک با استفاده از فرمول ۱۳ محاسبه می‌شود [14]:

$$K = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8r}} Y^{-1} \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \\ \Delta \phi \end{Bmatrix} \quad (13)$$

برای ترک افقی با توجه به شکل ۵، نقاط a و b نزدیک نوک ترک می‌باشند. مقادیر r_a و r_b فاصله‌ی نقاط a و b از نوک ترک می‌باشند.

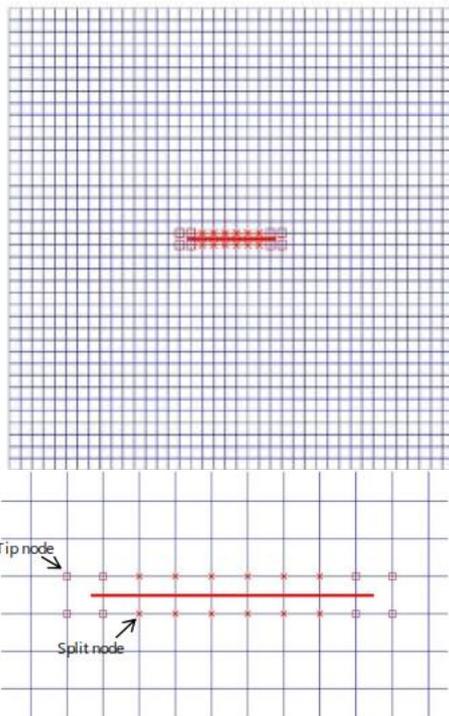
در محاسبات، جابجایی و پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه بر روی سطح ترک برای تعیین ضرایب شدت به کار می‌رود. برای مثال، از جابجایی مکانیکی و پتانسیل الکتریکی در نقطه i که بر روی سطح ترک واقع شده است، فاصله r_i از نوک ترک، ضرایب شدت K^i با استفاده از رابطه ۱۴ محاسبه می‌شود [15]:



و شرایط اولیه تعیین می‌شوند. سپس با استفاده از روش تنظیم سطح مطابق شکل ۵ المان‌های دوبعدی پوسته و گره‌های اطراف ترک تعیین و همچنین نوع آنها مشخص می‌شود. گره‌ها در اطراف ترک به صورت گره‌های برش شده تعریف می‌شوند. در الگوریتم حل در بخش حل مساله هسته حل‌گر به گسسته‌سازی معادلات و ساخت ماتریس‌های سفتی می‌پردازد. با استفاده از حلقه‌های تکرار بر روی هر یک از المان‌ها مقادیر ماتریس سفتی جزء برای هر گره به دست می‌آید. هسته حل‌گر نرم‌افزار در ادامه با ترکیب ماتریس‌های سفتی جزء، ماتریس سفتی کل را محاسبه می‌کند. از روی ماتریس سفتی کلی و با داشتن شرایط مرزی و نیروهای اعمال شده، ماتریس جابجایی محاسبه می‌شود. با مشخص شدن مقادیر جابجایی در تمامی گره‌ها، مقادیر تنش و کرنش برای هر کدام از گره‌ها محاسبه شده و پس از آن ضرایب شدت تنش حاصل می‌شود.

ماده پیزوالکتریک در این پژوهش از نوع ماده PZT استفاده شده است. بکارگیری از مواد همگن و غیرهمگن و بررسی رفتار آنها جز اهداف این تحقیق می‌باشد که حالت تغییر شکل یافته آنها در شکل ۶ نشان داده شده است.

مشاهده می‌شود که تغییر شکل صفحه‌ی پیزوالکتریک همگن نسبت به خط عمود، به صورت متقارن است. اما تغییر شکل صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن نامتقارن می‌باشد.



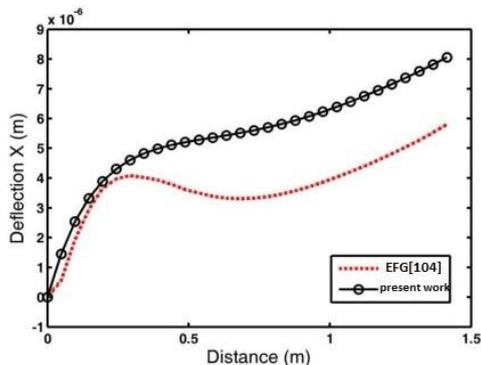
شکل ۵- المان‌ها و گره‌های اطراف ترک

به منظور اعتبارسنجی کد عددی توسعه داده شده، جابجایی‌های صفحه ساده پیزوالکتریک همگن با نتایج جابجایی ارایه شده توسط ریکویز و کونا [۱۷] مقایسه شده است. مطابق مرجع [18] و شکل ۷، خواص نمونه PZT-5H و ابعاد نمونه $2W=1$ انتخاب شده است. شرایط مرزی صفحه مورد نظر به صورتی است که در لبه بالایی مقدار ۱ مگاپاسکال تنش به آن وارد می‌شود و در لبه سمت راست به میزان دو واحد شار الکتریکی به آن اعمال شده است. در حالی که گره‌های لبه پایینی در راستای Y مقید شده و گره‌های لبه سمت چپ دارای پتانسیل مقدار واحد می‌باشند.

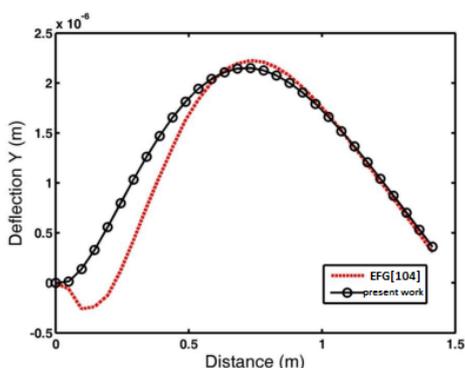


صفحه با نتایج در مرجع [۱۹]، مقایسه شده است. در مرجع، جابجایی‌ها به روش بدون المان گالرکین به دست آمده است که با نتایج در این تحقیق که از روش المان محدود به دست آمده، مقایسه شده است. لازم به ذکر است که این حالت همانند مرجع [۱۹] در هر راستا ۳۰ گره در نظر گرفته شده و تعداد المان‌ها ۸۴۱ المان می‌باشد.

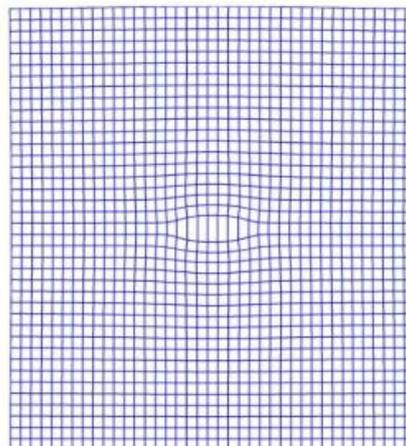
در شکل‌های ۸ تا ۱۰ مقدار اختلاف حاصله ناشی از اعمال شرایط مرزی در دو روش و همچنین ناشی از توابع غنی ساز می‌باشد.



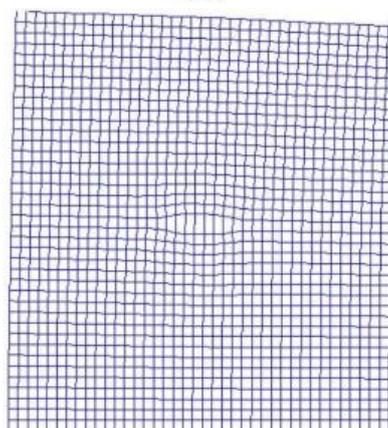
شکل ۸- جابجایی در جهت X بر روی قطر اصلی صفحه ساده پیزوالکتریک همگن و اعتبار سنجی مدل توسعه داده شده در پژوهش حاضر



شکل ۹- جابجایی در جهت Y بر روی قطر اصلی صفحه ساده پیزوالکتریک همگن و اعتبار سنجی مدل توسعه داده شده در پژوهش حاضر

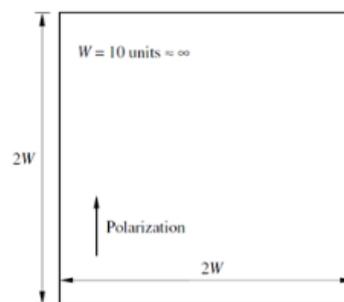


(الف)



(ب)

شکل ۶- مواد همگن و غیرهمگن و حالت تغییر شکل یافته آنها



شکل ۷- مشخصات ابعاد و جهت قطبی شدن مدل

در شکل‌های ۸، ۹ و ۱۰ به ترتیب جابجایی در جهت X، Y و پتانسیل الکتریکی بر روی قطر اصلی

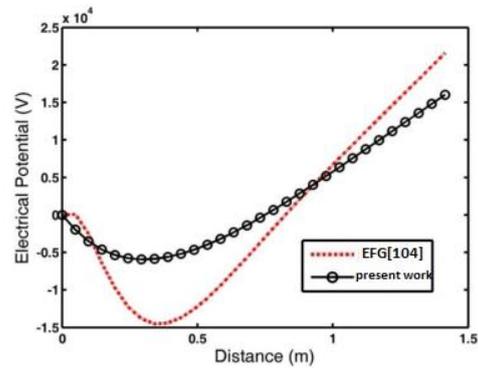
صفحه دو بعدی با طول و عرض مشابه، $2w=10$ ، طول ترک $2a=2$ و بارگذاری به صورت مکانیکی و الکتریکی به صورت زیر اعمال می‌شود:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{\infty} &= 1 \text{ MPa} & D_y^{\infty} &= 10^{-3} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \\ \sigma_{xx}^{\infty} &= 0 & D_x^{\infty} &= 0 \\ \sigma_{xy}^{\infty} &= 0 & & \end{aligned}$$

نوع ماده پیزوالکتریک در نظر گرفته شده از نوع PZT می‌باشد که خواص آن به صورت جدول ۱ معرفی شده است [۲۰ و ۲۱]. برای بررسی همگرایی، نسبت تعداد مش به عرض صفحه تغییر داده شده است. برای این منظور N تعداد مش در عرض صفحه در نظر گرفته می‌شود. همان‌طور که در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ مشاهده می‌شود در ابتدا ضرایب شدت تنش با واقعیت تفاوت زیادی داشته اما با افزایش نسبت مش-بندی ضریب شدت تنش مکانیکی و جابجایی الکتریکی به واقعیت نزدیک می‌شود. با افزایش نسبت مش-بندی ضرایب شدت همگرا می‌گردد. همگرایی ضرایب نشان‌دهنده صحت مدل عددی توسعه داده شده است. با توجه به نتایج این قسمت تعداد مش با نسبت $2/5$ در نظر گرفته می‌شود.

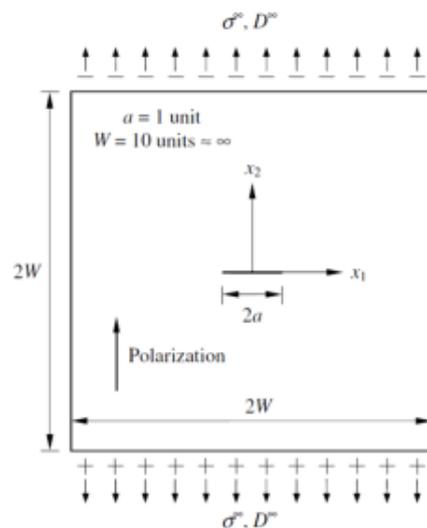
جدول ۱: خصوصیات ماده پیزوالکتریک

$c_{11} = 14.02 \text{ GPa}$	$c_{12} = 7.892 \text{ GPa}$
$c_{33} = 11.58 \text{ GPa}$	$c_{13} = 7.565 \text{ GPa}$
$c_{44} = 2.527 \text{ GPa}$	$e_{15} = 12.0 \frac{\text{N}}{\text{GVm}}$
$e_{31} = -5.268 \frac{\text{N}}{\text{GVm}}$	$e_{33} = 15.44 \frac{\text{N}}{\text{GVm}}$
$k_{11} = 6.368 \frac{\text{N}}{(\text{GV})^2}$	$k_{33} = 5.523 \frac{\text{N}}{(\text{GV})^2}$



شکل ۱۰- پتانسیل الکتریکی بر روی قطر اصلی صفحه ساده پیزوالکتریک همگن

پس از بررسی صحت و دقت مدل عددی توسعه داده شده برای صفحه بدون ترک، مدل عددی برای صفحه پیزوالکتریک دارای ترک توسعه داده می‌شود. در این جا برای اطمینان از صحت عملکرد، ابتدا همگرایی کد بررسی می‌شود. برای این منظور صفحه مربعی حاوی یک ترک مرکزی مطابق شکل ۱۱ در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۱۱- صفحه پیزوالکتریک با ترک داخلی تحت بار مکانیکی و الکتریکی

ابعاد نمونه و شرایط مرزی مطابق مرجع [۱۸] در نظر گرفته شده است. برای این منظور یک



ترک‌دار با ترک داخلی با شرایط مرزی فوق با استفاده از دو روش انتگرال J و روش انطباق نقطه-ای و نتایج مرجع و همچنین نتایج تحلیلی حاصل از معادلات ارایه شده در فصل قبل نشان داده شده است. لازم به ذکر است در حل تحلیلی ابعاد صفحه بی‌نهایت فرض شده است. در جدول ۳، خطای حاصل از مقایسه نتایج ضرایب شدت با استفاده از روش انتگرال J و انطباق نقطه‌ای برای مدل عددی توسعه داده شده با نتایج تحلیلی نشان داده شده است. خطای روش انتگرال J کمتر از روش انطباق نقطه‌ای است.

جدول ۲- نتایج حاصل از ضرایب شدت صفحه پیزوالکتریک همگن با ترک داخلی تحت بارگذاری مرکب

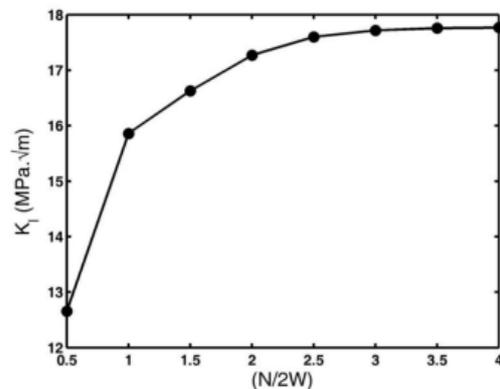
مرجع [۱۸]	انتگرال J	انطباق نقطه ای	تحلیلی [۱۹]	
1.772454×10^7	1.776599×10^7	1.452388×10^7	1.815845×10^7	K_I MPa.m ^{1/2}
1.772454×10^{-3}	1.81599×10^{-3}	1.023977×10^{-3}	1.815845×10^{-3}	K_{IV} C/m ^{3/2}

جدول ۳- خطای حاصل از مقایسه ضرایب شدت روش انتگرال J و انطباق نقطه ای با نتایج تحلیلی در صفحه پیزوالکتریک همگن با ترک داخلی تحت بارگذاری مرکب

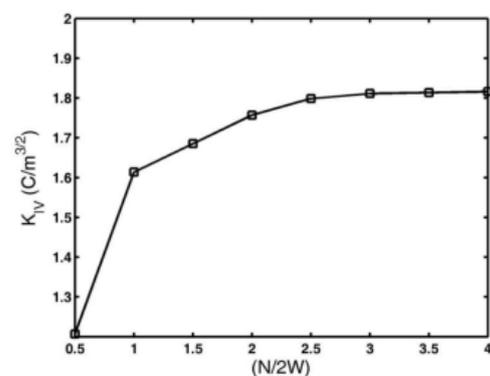
خطای روش انتگرال (%) J	خطای روش انطباق نقطه ای (%)	
2.3144	3.0159	K_I
2.9655	4.6089	K_{IV}

۲-۳. ترک داخلی زاویه‌دار در صفحه پیزوالکتریک

در بررسی ترک مایل در صفحه‌ی پیزوالکتریک همگن در شکل ۱۴، خواص نمونه PZT-5H و ابعاد نمونه $2a=2$ و $2w=10$ مشابه مرجع [۲۰] می‌باشد. با تغییر در مدل عددی توسعه داده شده و همچنین



شکل ۱۲- ضریب شدت تنش مکانیکی K_I در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی با مش بندی مختلف



شکل ۱۳- ضریب شدت جابجایی الکتریکی K_{IV} در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی با مش بندی مختلف

۳-۱. ترک داخلی در صفحه پیزوالکتریک همگن

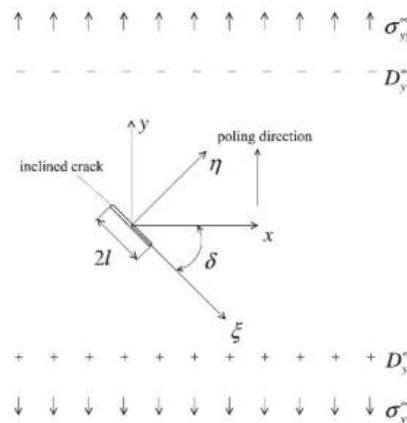
یک صفحه مربعی حاوی ترک مرکزی در نظر گرفته می‌شود و جهت قطبی شدن صفحه بر محور عمود منطبق است. برای اطمینان از صحت مدل عددی توسعه داده شده، نتایج حاصل از مدل عددی توسعه داده شده با نتایج مرجع [۱۸] و نتایج تحلیلی موجود مقایسه می‌شود. ابعاد نمونه و شرایط مرزی مشابه حالت قبل در نظر گرفته می‌شود. در جدول ۱، نتایج حاصل از ضرایب شدت نمونه



اعمال اثر زاویه در خواص ماده با توجه به مرجع نتایج حاصل از دو روش انطباق نقطه‌ای و انتگرال J در زاویه‌ی ترک $\delta = 0.1\pi$ با نتایج مرجع [۲۰] در جدول ۴ مقایسه شده است.

جدول ۴- مقایسه نتایج حاصل از ضرایب شدت K_{II} , K_I و K_{IV} در صفحه پیزوالکتریک همگن با دو روش انطباق نقطه‌ای و انتگرال J با مرجع [۲۰]

$\frac{K_{IV}}{\sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{l} \cos \delta}$	$\frac{K_{II}}{\sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{l} \cos \delta \sin \delta}$	$\frac{K_I}{\sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{l} \cos \delta^2}$	
1.685704	-0.5209111	1.603199	مرجع [۲۰]
1.6907079	-0.48693201	1.61480645	انطباق نقطه‌ای
1.6531578	-0.43602579	1.5688472	انتگرال J



شکل ۱۴- صفحه پیزوالکتریک با ترک مایل تحت بارگذاری مرکب

۳-۳. ترک داخلی در صفحات پیزوالکتریک غیر همگن

در این قسمت نمونه ترک‌دار با ترک داخلی مطابق شکل ۱۱ مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای اطمینان از صحت مدل عددی توسعه داده شده نتایج مدل عددی با نتایج ضرایب شدت در مرجع [۱۱] مقایسه گردیده است. مطابق مرجع یک صفحه دو بعدی با

طول و عرض مشابه، $2w=10$ و اندازه طول ترک $2a=2$ در نظر گرفته و خواص مواد به صورت جدول ۵ می‌باشد.

جدول ۵- خواص مواد پیزوالکتریک

$c_{11} = 12.6 \times 10^{10} \text{ Pa}$	$c_{22} = 11.7 \times 10^{10} \text{ Pa}$
$c_{12} = 5.3 \times 10^{10} \text{ Pa}$	$c_{13} = 5.5 \times 10^{10} \text{ Pa}$
$c_{44} = 3.53 \times 10^{10} \text{ Pa}$	$e_{21} = -6.5 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{GVm}}$
$e_{22} = 23.3 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{GVm}}$	$e_{16} = 17 \times 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{GVm}}$
$k_{11} = 15.1 \times 10^9 \frac{\text{N}}{(\text{GV})^2}$	$k_{22} = 13 \times 10^9 \frac{\text{N}}{(\text{GV})^2}$
$[C] = [C_0]e^{\beta x}$ $[e]$ $= [e_0]e^{\beta x}$	$[e] = [e_0]e^{\beta x}$
$[k] = [k_0]e^{\beta x}$	

در این حالت بارگذاری به صورت مرکب می‌باشد و در جدول ۶ ضرایب شدت به دست آمده با نتایج مرجع مقایسه شده است. مقدار $\beta = 0.5$ فرض شده است.

جدول ۶- نتایج حاصل از ضرایب شدت صفحه پیزوالکتریک غیر همگن با ترک داخلی تحت بارگذاری مرکب

انطباق نقطه‌ای	انتگرال J	مرجع [۲۲ و ۱۱]	
1.2778	1.3762	1.582647	$\frac{K_I}{\sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{\pi a}}$
0.5498	0.6749	0.545325	$\frac{K_{IV}}{\sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{\pi a}}$

۳-۴. صفحه پیزوالکتریک همگن حاوی ترک لبه‌ای

در این بخش، نمونه ترک‌دار با ترک لبه‌ای مطابق شکل ۱۵ مورد بررسی قرار می‌گیرد. مشابه مرجع [۷] طول صفحه برابر $L=4$ ، عرض صفحه $W=2$ ، طول ترک $a=0.4$ و بارگذاری به صورت مرکب

جدول ۷- خطای حاصل از مقایسه ضرایب شدت برای مدل عددی توسعه داده شده در پژوهش حاضر با نتایج تحلیلی در صفحه پیزوالکتریک همگن با ترک لبه‌ای تحت بارگذاری مرکب

خطای مدل عددی پژوهش حاضر با روش تحلیلی (%)	خطای مدل عددی پژوهش حاضر با مرجع [۷] (%)	مدل عددی پژوهش حاضر	مدل عددی پژوهش حاضر	مرجع [۷]	تحلیلی
53.9	24.2	0.98	2.12	1.29	K_I
26.6	24.9	32.24	43.94	42.93	K_{IV}

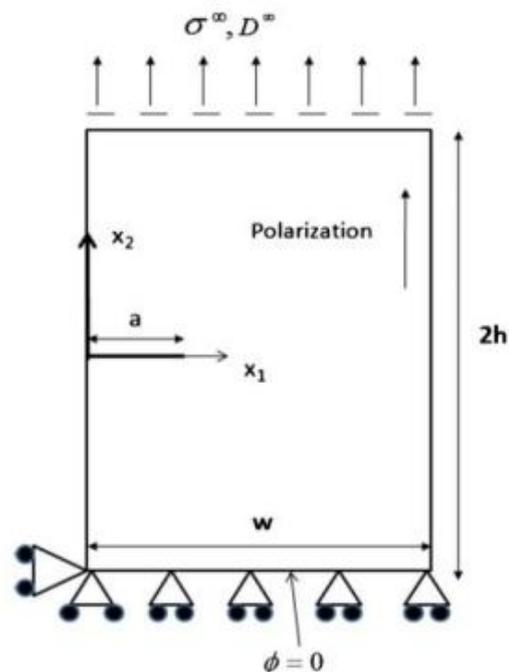
۳-۵. ترک لبه‌ای در صفحه پیزوالکتریک همگن تحت بارگذاری مکانیکی

در این قسمت صفحه دو بعدی پیزوالکتریک با ترک لبه‌ای فقط تحت بارگذاری مکانیکی مورد بررسی قرار گرفته است. در این حالت از خواص ماده PZT-5H استفاده شده است [۲۳ و ۲۴]. همچنین طول و عرض صفحه به ترتیب $L=4$ ، $W=2$ و طول ترک $a=0.4$ در نظر گرفته شده است.

طبق شکل (۱۶-الف) می‌توان مشاهده نمود بر اثر افزایش مقدار تنش دور دست در صفحه پیزوالکتریک مقدار ضریب شدت تنش K_I افزایش می‌یابد. همچنین بر اثر افزایش تنش مقدار K_{IV} (ضریب شدت الکتریکی) هم افزایش می‌یابد که این موضع در شکل (۱۶-ب) مشاهده می‌شود. این موضوع نشان‌دهنده آن است که در صفحه پیزوالکتریک افزایش تنها تنش مکانیکی بر روی جابجایی الکتریکی هم اثر گذاشته و منجر به افزایش آن می‌شود.

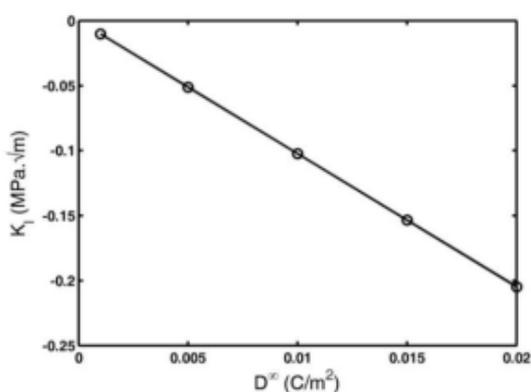
فرض می‌شود به طوری که شامل بار مکانیکی $\sigma = 10^7 Pa$ و بار الکتریکی $D = 10^{-3} \frac{C}{m^2}$ است. تعداد شبکه مطابق مرجع [۷]، 20×40 و از المان‌های ۴ گره‌ای در نظر گرفته شده است.

در جدول ۷، نتایج حاصل از ضرایب شدت نمونه ترک‌دار با ترک لبه‌ای با شرایط فوق با استفاده از مدل عددی توسعه داده شده در پژوهش حاضر، روش المان محدود ارایه شده در مرجع [۷] و نتایج تحلیلی آورده شده است. همچنین در این جدول خطای نتایج حاصل از ضرایب شدت در مرجع و مدل عددی توسعه داده شده در این پژوهش با نتایج تحلیلی بررسی گردیده و نتایج به دست آمده برای K_{IV} نیز مانند مرجع [۷] خطای قابل توجهی دارد که می‌تواند ناشی از کاربرد توابع غنی‌سازی مواد همسانگرد باشد.

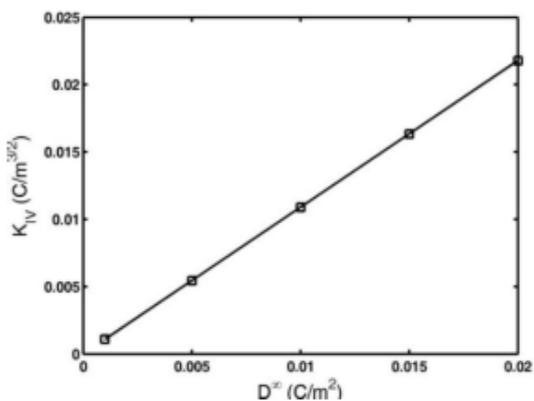


شکل ۱۵- صفحه پیزوالکتریک با ترک لبه‌ای تحت بار مکانیکی و الکتریکی

همچنین مطابق شکل (۱۷-ب) به طور طبیعی مشاهده می‌شود که مقدار ضریب شدت الکتریکی افزایش می‌یابد. با توجه به نتایج این قسمت می‌توان دریافت که افزایش جابجایی الکتریکی نه تنها بر روی ضریب شدت الکتریکی موثر است بلکه بر روی ضریب شدت تنش هم تاثیر می‌گذارد و منجر به افزایش آن می‌شود.

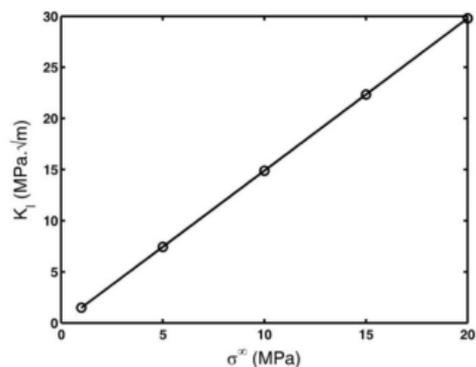


(الف)

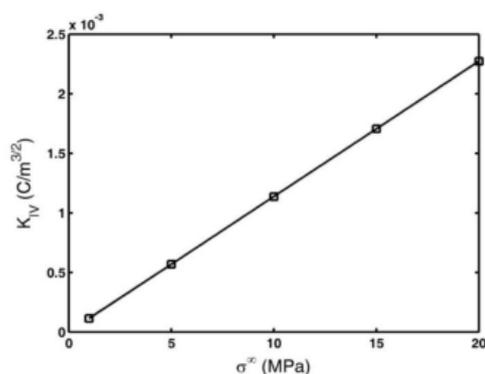


(ب)

شکل ۱۷-الف) ضریب شدت تنش K_I بر حسب تنش دور دست، (ب) ضریب شدت K_{IV} بر حسب تنش دور دست، در صفحه پیزوالکتریک با ترک لبه‌ای تحت بارگذاری الکتریکی



(الف)



(ب)

شکل ۱۶-الف) ضریب شدت تنش K_I بر حسب تنش دور دست، (ب) ضریب شدت K_{IV} بر حسب تنش در صفحه پیزوالکتریک با ترک لبه‌ای تحت بارگذاری مکانیکی

۳-۶. ترک لبه‌ای در صفحه پیزوالکتریک همگن تحت بارگذاری الکتریکی

در این قسمت صفحه دوبعدی پیزوالکتریک با ترک لبه‌ای فقط تحت بارگذاری الکتریکی مورد بررسی قرار گرفته است.

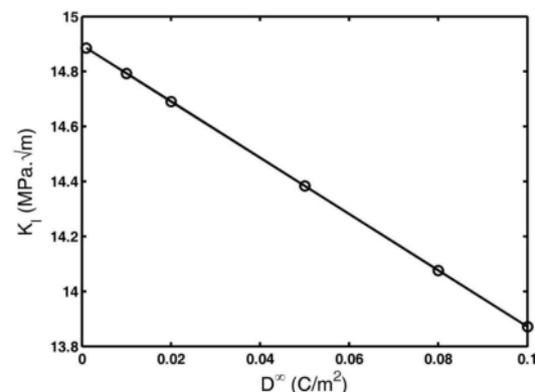
برای این حالت از شرایط مرزی و ابعاد حالت قبل استفاده شده است. همان طور که از شکل (۱۷-الف) می‌توان دریافت، بر اساس افزایش مقدار جابجایی الکتریکی (D^∞)، مقدار ضریب شدت تنش K_I از لحاظ مقداری در حال افزایش است و

۷-۳. ترک لبه‌ای در صفحات پیزوالکتریک همگن تحت بارگذاری مرکب

در این قسمت صفحه پیزوالکتریک با مشخصات حالت‌های قبل فرض شده و دو حالت برای آن در نظر گرفته می‌شود.

در حالت اول بار مکانیکی ثابت فرض می‌شود. برای این منظور در مدل عددی توسعه داده شده مقدار تنش دور دست برابر با $\sigma^\infty = 10MPa$ و بارهای الکتریکی مختلفی به صفحه وارد می‌شود.

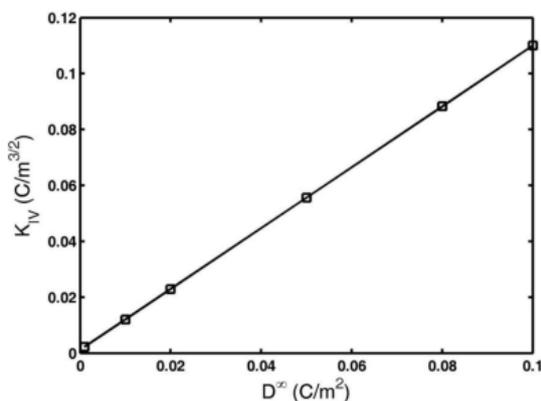
شکل ۱۸ نشان‌دهنده مقدار ضریب شدت تنش K_I بوده که دیده می‌شود در صفحه ی پیزوالکتریک با اعمال بار مکانیکی ثابت و افزایش بار الکتریکی مقدار ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد که علت آن به خواص مواد پیزوالکتریک مربوط می‌شود.



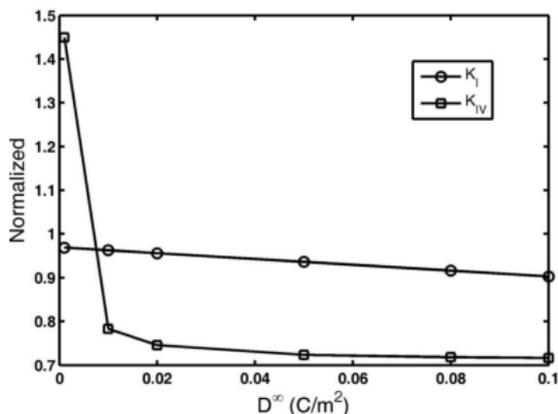
شکل ۱۸- ضریب شدت تنش K_I بر حسب بار الکتریکی در صفحه پیزوالکتریک با ترک لبه‌ای تحت بارگذاری مرکب با بار مکانیکی ثابت

در شکل ۱۹، ضریب شدت الکتریکی با افزایش بار الکتریکی افزایش می‌یابد. همچنین برای مقایسه بهتر، ضرایب شدت را بی‌بعد کرده و در شکل ۲۰ نشان داده است. با توجه به شکل ۲۰، مقدار K_{IV} بر

اثر افزایش بار الکتریکی کاهش یافته و این کاهش به صورتی بوده که در مقدار K_{IV} تغییرات بیشتری دیده می‌شود.



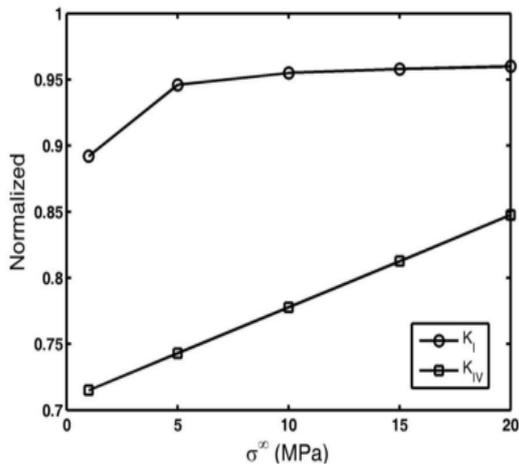
شکل ۱۹- ضریب شدت K_{IV} بر حسب بار الکتریکی در صفحه پیزوالکتریک با ترک لبه‌ای تحت بارگذاری مرکب با بار مکانیکی ثابت



شکل ۲۰- ضرایب شدت بی بعد شده K_I و K_{IV} بر حسب بار الکتریکی در صفحه پیزوالکتریک با ترک لبه‌ای تحت بارگذاری مرکب با بار مکانیکی ثابت

در حالت دوم بار الکتریکی ثابت فرض می‌شود. برای این منظور در مدل عددی توسعه داده شده، مقدار جابجایی الکتریکی $D^\infty = 10^{-3}$ و بارهای مکانیکی مختلفی به صفحه اعمال می‌شود.

می‌شود مقادیر ضرایب شدت با افزایش تنش دور دست رو به افزایش می‌باشد.



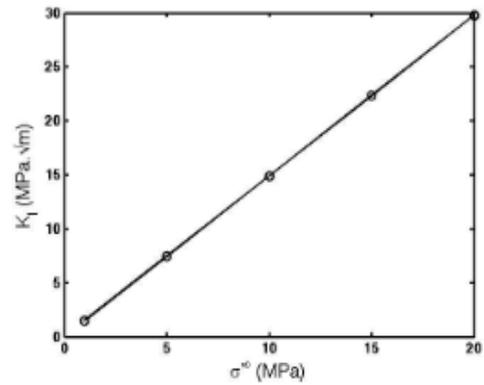
شکل ۲۲- ضرایب شدت بی بعد شده K_I و K_{IV} بر حسب تنش دور دست در صفحه پیزوالکتریک با ترک لبه‌ای تحت بارگذاری مرکب با بار الکتریکی ثابت

۳-۸. ترک مرکزی در صفحه پیزوالکتریک همگن تحت بارگذاری مکانیکی

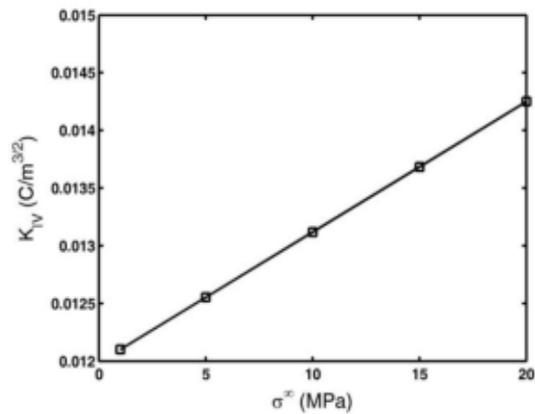
در این حالت یک صفحه پیزوالکتریک PZT-5H با مشخصات زیر در نظر گرفته شده است:

$$2L = 2W = 10, \quad 2a = 2$$

برای این منظور بعد از اعمال تنش دور دست به تنهایی و اعمال شرایط مرزی مکانیکی، بارگذاری مکانیکی افزایش یافته و مشاهده می‌شود که در ترک مرکزی هم بر اثر افزایش بار مکانیکی مقدار ضریب شدت تنش K_I و ضریب شدت الکتریکی K_{IV} مطابق شکل ۲۳ افزایش می‌یابد و در نتیجه با حضور تنها بار مکانیکی، ضرایب شدت تغییر پیدا کرده و به صورت خطی افزایش می‌یابند.



(الف)

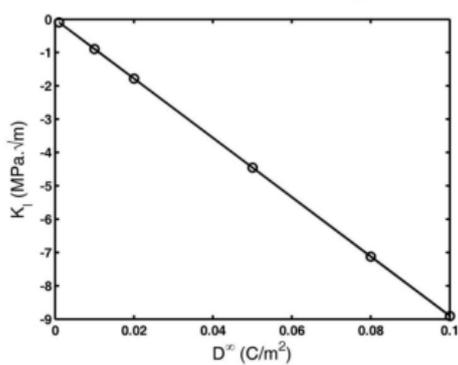


(ب)

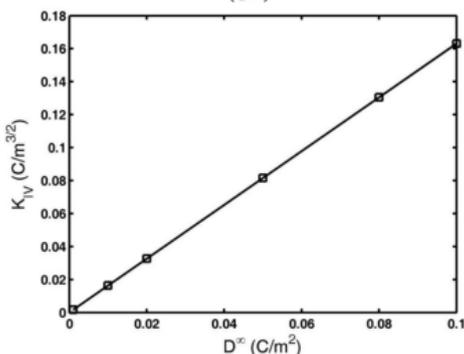
شکل ۲۱-الف) ضریب شدت تنش K_I بر حسب تنش دور دست، ب) ضریب شدت K_{IV} بر حسب تنش دور دست، در صفحه پیزوالکتریک با ترک لبه‌ای تحت بارگذاری مرکب با بار الکتریکی ثابت

همان‌طور که در شکل‌های (۲۱-الف) و (۲۱-ب) دیده می‌شود و در اثر افزایش مقدار تنش دور دست، مقدار ضریب شدت تنش مکانیکی و همچنین مقدار ضریب شدت تنش الکتریکی افزایش می‌یابد. برای درک بهتر، در شکل ۲۲ ضرایب شدت بی‌بعد شده و همان‌طور که مشاهده

مشاهده می‌شود با افزایش بار الکتریکی افزایش می‌یابد. لازم به ذکر است که نتایج به دست آمده برای ترک مرکزی مشابه نتایج به دست آمده برای ترک لبه‌ای می‌باشد.



(الف)

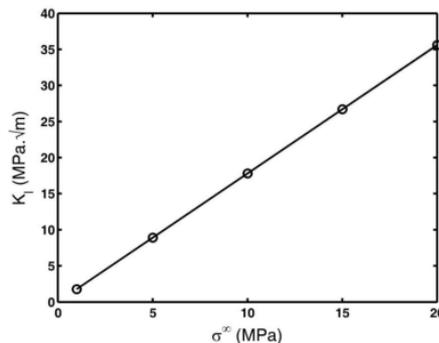


(ب)

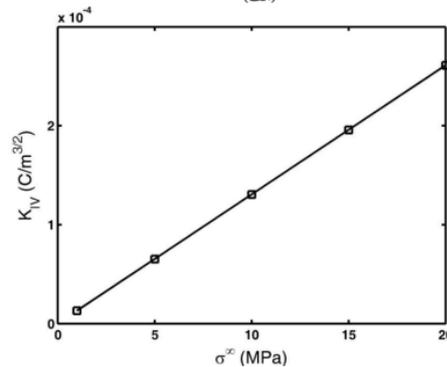
شکل ۲۴-الف) ضریب شدت تنش K_I بر حسب بار الکتریکی، ب) ضریب شدت K_{IV} بر حسب بار الکتریکی، در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی تحت بارگذاری الکتریکی

۳-۱۰. ترک مرکزی در صفحه پیزوالکتریک همگن تحت بارگذاری مرکب

در این بخش نیز برای بارگذاری مرکب دو حالت در نظر گرفته شده است. در حالت اول بار مکانیکی ثابت و برابر با $\sigma^\infty = 10 \text{ MPa}$ در نظر گرفته می‌شود. همان‌طور که در شکل (۲۵-الف) مشاهده



(الف)

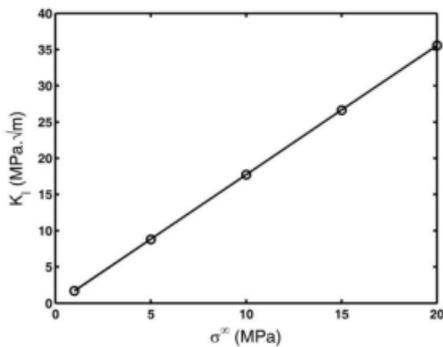


(ب)

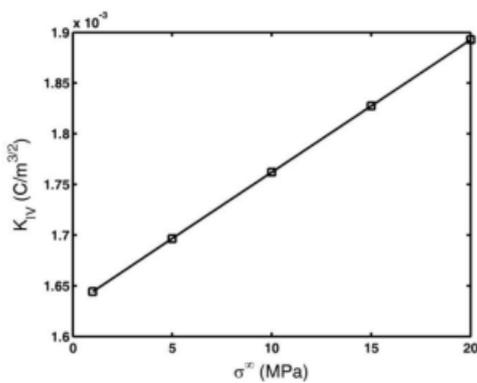
شکل ۲۳-الف) ضریب شدت تنش K_I بر حسب تنش دور دست، ب) ضریب شدت K_{IV} بر حسب تنش در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی تحت بارگذاری مکانیکی

۳-۹. ترک مرکزی در صفحات پیزوالکتریک همگن تحت بارگذاری الکتریکی

در این قسمت صفحه‌ای با مشخصات ذکر شده در بخش قبلی در نظر گرفته می‌شود و بار اعمالی به صفحه بار الکتریکی است. با دقت در شکل (۲۴-الف) مشاهده می‌شود با افزایش بار الکتریکی، ضریب شدت تنش از لحاظ مقداری افزایش می‌یابد. همچنین مقدار ضریب شدت الکتریکی همان‌طور که می‌توان انتظار داشت و در شکل (۲۴-ب)



(الف)



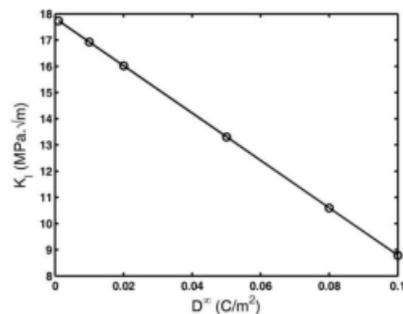
(ب)

شکل ۲۶-الف) ضریب شدت تنش K_I بر حسب بار الکتریکی، ب) ضریب شدت K_{IV} بر حسب بار الکتریکی، در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب با بار الکتریکی ثابت

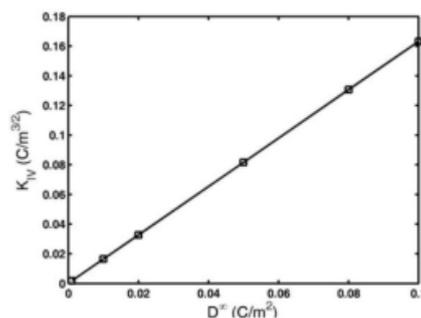
۳-۱۱. تاثیر طول ترک مرکزی در صفحه پیزوالکتریک همگن تحت بارگذاری مرکب

در این قسمت، یک صفحه دوبعدی با طول و عرض مشابه، $2W = 10$ ، طول ترک $2a = 2$ و بارگذاری به صورت مکانیکی و الکتریکی در نظر گرفته شده است. همچنین جهت قطبی شدن صفحه بر محور عمود منطبق است. همان طور که در شکل ۲۷ نیز مشاهده می‌شود با افزایش طول ترک مقادیر ضرایب شدت روند افزایشی دارند.

می‌شود، بر اثر افزایش بار الکتریکی، مقدار ضریب شدت تنش (K_I) کاهش می‌یابد و مطابق آنچه در شکل (۲۵-ب) قابل مشاهده است، ضریب شدت الکتریکی (K_{IV}) افزایش می‌یابد. پس از بررسی، نتایج در صفحه پیزوالکتریک تحت بارگذاری مرکب با ترک مرکزی همانند ترک لبه‌ای می‌باشد. علت کاهش ضریب شدت تنش همان طور که پیش‌تر نیز گفته شده مربوط به خواص مواد پیزوالکتریک می‌باشد. در حالت دوم بار الکتریکی ثابت در نظر گرفته می‌شود. با توجه به شکل ۲۶، همان طور که انتظار می‌رود مقادیر ضریب شدت تنش و ضریب شدت الکتریکی با افزایش تنش افزایش می‌یابد.

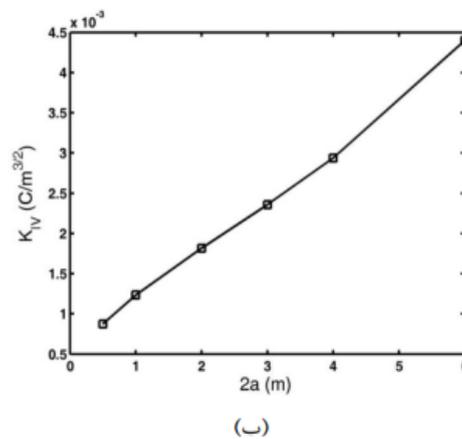
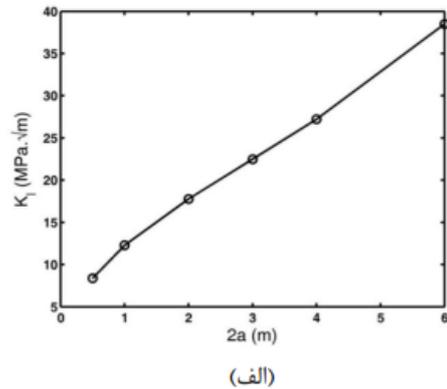


(الف)



(ب)

شکل ۲۵-الف) ضریب شدت تنش K_I بر حسب بار الکتریکی، ب) ضریب شدت K_{IV} بر حسب بار الکتریکی، در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب با بار مکانیکی ثابت



شکل ۲۷- الف) ضریب شدت تنش K_I بر حسب طول ترک، ب) ضریب شدت K_{IIV} بر حسب طول ترک، در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب

جدول ۸- خطای حاصل از مقایسه ضرایب شدت بی بعد برای مدل عددی توسعه داده شده در پژوهش حاضر با نتایج تحلیلی در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب با طولهای ترک مختلف

2a (m)	0.5	1	2	3	4	6
خطا در $(\%)K_I$	2.6165	2.4895	2.3149	2.3704	2.7006	2.8310
خطا در $(\%)K_{IIV}$	2.9372	2.8333	2.5655	2.1920	2.6286	2.8021

پس از بی بعد کردن ضرایب شدت با مقادیر ضرایب شدت تحلیلی و به دست آوردن خطای

ضرایب شدت نسبت به مقدار تحلیلی آن، نتایج جدول ۸ حاصل می شود. با توجه به جدول ۸، خطاهای ضرایب شدت در محدوده بین ۲/۳٪ تا ۲/۹۳٪ می باشد. با افزایش طول ترک تا محدوده ای، خطاهای ضریب شدت روندی کاهشی داشته و برای طول ترک $2a=2$ برای ضریب شدت مکانیکی و $2a=3$ برای ضریب شدت الکتریکی به کمینه رسیده و پس از آن روندی افزایشی دارد.

۱۲.۳. بررسی خطای ناشی از محدوده شعاع انتگرال ناحیه J در ترک مرکزی در صفحه پیزوالکتریک همگن تحت بارگذاری مرکب

در این قسمت به بررسی تاثیر محدوده شعاع انتگرال J پرداخته می شود. برای این منظور مقادیر شعاع ناحیه انتگرال گیری که شامل المان نوک ترک است را تغییر داده و با نتایج تحلیلی مقایسه می شود که خطای حاصل در جدول ۹ آورده شده است.

جدول ۹- خطای حاصل از مقایسه ضرایب شدت بی بعد برای مدل عددی توسعه داده شده در پژوهش حاضر با نتایج تحلیلی در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب با شعاعهای انتگرال گیری مختلف

$\frac{r_d}{a}$ (m)	0.5	0.6	0.7	0.8
خطا در $(\%)K_I$	2.3149	2.3247	2.1557	2.1557
خطا در $(\%)K_{IIV}$	2.9655	2.9721	2.8874	2.8874

با توجه به جدول ۹، خطا در مقادیر ضرایب شدت تنش K_I در مقادیر کوچک ناحیه ی





انتگرال گیری تقریبا یکسان بوده و پس از آن به مرزی می رسد که خطا بیشینه می شود و پس از آن خطا روند کاهشی دارد. همچنین خطا در مقادیر ضریب شدت الکتریکی K_{IV} در مقادیر کوچک ناحیه انتگرال گیری همانند ضریب شدت تنش یکسان بوده و پس از آن به مرزی می رسد که خطا دارای مقدار کمینه می باشد و پس از آن دوباره خطای شدت جابجایی الکتریکی روندی افزایشی دارد. با توجه به نتایج، بهترین ناحیه انتگرال گیری برای محاسبه ضرایب شدت تنش بین 0.7 تا 0.8 می باشد.

۴. نتیجه گیری

در این تحقیق نوآوری حاصله را میتوان حصول ضرایب شدت تنش در صفحات پیزوالکتریک تحت انواع بارگذاری ها بیان نمود. در این تحقیق با توجه به عدم حصول این نتایج به طور مستقیم در نرم افزارهای مهندسی، تلاش شد تا با توسعه کد مدل عددی با روش های محاسباتی برای حالات مختلف موقعیت ترک، بررسی ضرایب تنش برای صفحات همگن و غیرهمگن پیزوالکتریک حاصل نمود.

در این پژوهش با بررسی ضرایب شدت مکانیکی و الکتریکی در صفحات پیزوالکتریک همگن و غیرهمگن تحت بارگذاری الکتریکی، مکانیکی و مرکب نتیجه گیری های زیر حاصل شده است::

• با مقایسه نتایج تحلیلی و روش های انتگرال J و انطباق نقطه ای، خطای روش انتگرال J بسیار کمتر از روش انطباق نقطه ای است ($2/96$ نسبت

به $4/6$) و در نتیجه روش انتگرال J دقیق تر است.

• در صفحات پیزوالکتریک همگن با ترک لبه ای تحت بارگذاری مرکب با بار مکانیکی ثابت، با افزایش بار الکتریکی مقدار ضریب شدت تنش K_I کاهش و ضریب شدت الکتریکی K_{IV} به صورت خطی افزایش می یابد که علت آن به خواص مواد پیزوالکتریک مربوط می شود. همچنین دامنه ی تغییرات ضریب شدت بی بعد شده K_{IV} بیشتر از ضریب شدت تنش بی بعد شده K_I است.

• در صفحات پیزوالکتریک با ترک لبه ای تحت بارگذاری مرکب با بار الکتریکی ثابت، با افزایش تنش مقدار ضریب شدت تنش K_I و ضریب شدت الکتریکی K_{IV} به صورت خطی افزایش می یابد.

• در صفحات پیزوالکتریک همگن با ترک مرکزی تحت بارگذاری الکتریکی بر اثر افزایش بار الکتریکی، مقدار ضریب شدت تنش K_I نسبتا خطی کاهش یافته و مقدار ضریب شدت الکتریکی نسبتا خطی افزایش می یابد.

• در صفحات پیزوالکتریک همگن با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب با بار مکانیکی ثابت، با افزایش بار الکتریکی مقدار ضریب شدت تنش K_I کاهش به صورت خطی و ضریب شدت الکتریکی K_{IV} افزایش به صورت خطی خواهد داشت.

- beam featured in reducing stress concentration, *Micromachines*, Vol. 14, No. 1007, 2023.
- [11] J. Rice, A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, *Journal of applied mechanics*, pp. 379-386, 1968.
- [12] L. Kelvin, On the theory of pyro-electricity and piezo-electricity of crystals, *Phil. Mag. Ser. Vol. 5, No. 36*, pp. 453-459, 1893.
- [13] G. Pamnani, S. Bhattacharya, and S. Sanyal, Numerical simulation of tri-layer interface cracks in piezoelectric materials using extended finite element method, *Iranian journal of science and technology, Transactions of mechanical engineering*, Vol. 1, pp. 1-13, 2019.
- [14] C. F., H. G. Shih, D. Lorenzi, and M. D. German, Crack extension modeling with singular quadratic isoparametric elements, *International journal of fracture*, Vol. 12, No. 4, pp. 647-651, 1976.
- [15] Z. Suo, Fracture mechanics for piezoelectric ceramics, *Journal of the mechanics and physics of solids*, Vol. 40, No.4, pp. 739-765, 1992.
- [16] Z. C. O18u, and Y. H. Chen, Explicit expressions of eigenvalues and eigenvectors for transversely isotropic piezoelectric materials, *Acta mechanica*, Vol. 162, No. 1, pp. 213-219, 2003.
- [17] A. Ricoeur and M. Kuna, Electrostatic tractions at crack faces and their influence on the fracture mechanics of piezoelectrics, *International journal of Fracture*, Vol. 157, pp. 3-12, 2009.
- [18] E. Béchet, M. Scherzer, M. Kuna, Application of the X-FEM to the fracture of piezoelectric materials, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 77, pp. 1535-1565, 2009.
- [19] R.R. Bhargava K. Sharma, A study of finite size effects on cracked 2-D piezoelectric media using extended finite element method, *Computational material science*, Vol. 50, pp. 1834-1845, 2011.
- [20] J. Chessa, Programing the finite element method with Matlab, Northwestern university, 2002.
- [1] S. L. Lucato, D. E. Doru, C. Lupascu, and R. Jurgen, Effect of poling direction on R-curve behavior in lead zirconate titanate, *Journal of the american ceramic society*, Vol. 83, No.2, pp. 424-426, 2000.
- [2] A. KofiBonsi, Fatigue of piezoelectric beams used in vibration energy harvesting, Department of mechanical engineering McGill university montréal, Canada, 2010.
- [3] A. Förderreuther, R-curve effect, influence of electric field and process zone in BaTiO3 ceramics, *Journal of the european ceramic society*, Vol. 22, No. 12, pp.2023-2031, 2002.
- [4] S. Isfahani, and S. Mohammadi, Analysis of interlaminar cracking in composite materials using the extended finite element method, Fifth national congress of civil engineering, Foroudsi university of mashhad, Iran, 2010.
- [5] M. Eghdami, and M. Jabbari, Increasing the electrical power harvest from piezoelectric microbeam using genetic algorithm with geometric and material optimization, *Journal of aerospace science and technology*, Vol. 11, No. 2, pp. 165-181, 2022.
- [6] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko, A finite element method for crack growth without remeshing, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 46, No. 1, pp. 131-150, 1999.
- [7] R. R. Bhargava and S. Kuldeep, A study of finite size effects on cracked 2-D piezoelectric media using extended finite element method, *Computational materials science*, Vol. 50, No. 6, pp. 1834-1845, 2011.
- [8] M. Jabbari, and B. Ahmadi, Electrical response of piezoelectric beam using dynamic stiffness method. *Applied and computational sciences in mechanics*, Vol. 31, No. 2, pp. 127-140, 2010.
- [9] Y. Cai, J. Fu, N. Wu, C. Xiong, A. Liu and Y. He, A high-efficiency curved panel energy harvester featured by reduced stress concentration, *Energy conversion and management*, Vol. 271, No. 116334, ISSN 0196-8904, 2022.
- [10] C. Xiong, N. Wu, Y. He, Y. Cai, X. Zeng, P. Jin, M. Lai, Nonlinear energy harvesting by piezoelectric bionic 'M' shape generating



- [21] M. Jabbari and S. Jabbari, The Effect of boundary conditions and concentrated mass on the performance and vibration results of piezoelectric bimorph beam by parallel and series layers, International journal of advanced design and manufacturing technology, Vol. 17, No. 2, pp. 7-14, 2024.
- [22] S. Osher, A. James and A. Sethian, Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations, Journal of computational physics, Vol.79, No. 1, pp. 12-49, 1988.
- [23] C. F. Shih, H. G. De Lorenzi, and M. D. German, Crack extension modeling with singular quadratic isoparametric elements, International journal of fracture, Vol. 12, No. 4, pp. 647-651, 1976.
- [24] M. Kuna, Fracture mechanics of piezoelectric materials—where are we right now?, Engineering fracture mechanics, Vol. 77, No. 2, pp. 309-326, 2010.

۶. پی‌نوشت

1. Lead Zirconate Titanate
2. Direct Copper Bonding
3. Energy Release Rate
4. EDIF

۱۳۰

سال ۱۴ - شماره ۲
پاییز و زمستان ۱۴۰۴
نشریه علمی
دانش و فناوری هوا فضا

