ارائه یک روش سریع و جدید در همراستاسازی انتقالی ایستای سیستم ناوبری اینرسی متصل به بدنه یک پرنده پیش از پرواز

تاریخ دریافت: ۱۴۰۵/۰۳/۰۲
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۸/۰۴

مهدی معصومین[۱]، سید کمال حسینی ثانی[۲]، غلامرضا محمددادی[۳]
۱ دانشجوی دوره دکترا ، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران، Mahdi.massoumin@mail.um.ac.ir
۲ استاد، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران
۳ استادیار، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه آزاد اسلامی، گناباد، ایران

چکیده

در این مقاله یک روش جدید و سریع برای بهبود همراستاسازی انتقالی سیستم‌های ناوبری اینرسی متصل به بدنه یک پرنده پیش از پرواز و در حالت ایستا ارائه شده است. بسیاری از پرنده‌ها و پرتابه‌ها می‌توانند فرایند همراستاسازی اولیه سیستم ناوبری اینرسی خود را پیش از پرتاب به صورت ایستا و با استفاده از اطلاعات وضعیت و سمت حامل انجام دهند و خطاهای ناشی از بایاس حسگرهای اینرسی خود را جبران‌سازی نمایند. در روش پیشنهادی، معادلات فضای حالت همراستاسازی نرم سیستم ناوبری اینرسی با یک باز آرایی چیدمانی، به دو بخش خطاهای سرعت و وضعیت و بخش بایاس حسگرهای اینرسی تقسیم می‌شود. با استفاده از یک روش تحلیلی معادلات بخش اول محاسبه می‌شوند و پس از تلفیق با فیلتر، بخش دوم معادلات فضای حالت محاسبه خواهند شد. کارایی و مزیت این روش با روش‌های متداول مقایسه شده و عملکرد آن با شبیه‌سازی‌ها و اجرای مونت کارلو بررسی شده است.

واژه‌های کلیدی: *سامانه ناوبری اینرسی، همراستاسازی نرم، همراستاسازی انتقالی سریع، تخمین بایاس.*

A new and fast stationary transfer alignment method of strapdown inertial navigation system

Mahdi Massoumin[1], Seyyed Kamal Hosseini Sani[2], Gholamreza Mohammaddadi[3]

1- Faculty of Electrical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.
2- Professor, Faculty of Electrical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.
3- Asistant professor, Faculty of Electrical Engineering, Islamic Azad University, Gonabad, Iran.

Abstract

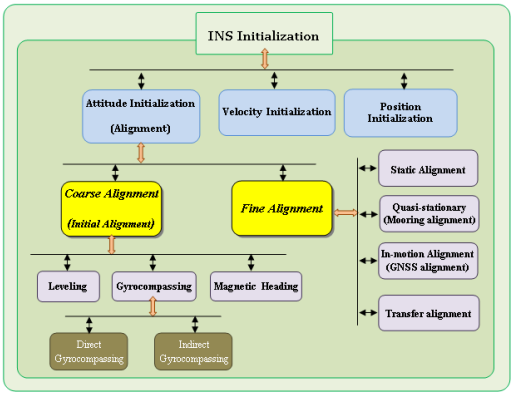
This paper presents a new and fast method to improve the stationary transfer alignment of strapdown inertial navigation systems (SINS). Many aircraft can perform the initial alignment process of their SINS before launch statically, using the carrier's attitude and heading information, and compensate for errors caused by bias in their inertial sensors. By this approach, the stationary fine alignment of SINS error state vector is divided into two parts: sensors biases and errors of attitude and velocities. To obtain the first part, an analytical method is proposed and a filter is used to the second part. The efficiency and advantage of this method is compared with traditional methods and its applicability examined with some simulations.

Keywords: *Strapdown inertial navigation systems, fine alignment, rapid transfer alignment, bias estimation.*

۱. مقدمه

در ناوبری یک پرنده، محاسبه پارامترهای موقعیت، زوایای جهت‌گیری و سرعت وسیله نسبت به یک دستگاه مرجع خاص مورد بررسی قرار می گیرد. این چارچوب مرجع خاص در ناوبری‌های نزدیک به سطح زمین می‌تواند دستگاه مختصات جغرافیایی یا دستگاه مختصات زمینی باشد. ناوبری اینرسی به صورت محاسبه موقعیت و سرعت فعلی از موقعیت و سرعت اولیه و تاریخچه زمانی شتاب وارد بر وسیله تعریف می شود. در سامانه ناوبری اینرسی (INS) سرعت (لحظه ای) برابر است با سرعت اولیه به علاوه انتگرال شتاب نسبت به زمان و موقعیت (لحظه ای) برابر با موقعیت اولیه به علاوه انتگرال سرعت نسبت به زمان می‌باشد. زوایای جهت‌گیری بدنه پرنده اگر نسبت به دستگاه ناوبری محلی محاسبه شوند زوایای چرخ ، فراز و سمت را ارائه می‌نمایند که در ناوبری‌های زمینی و هوایی بسیار پرکاربرد می‌باشد [۲-۱].

یک INS که گاهی اوقات در پرنده‌ها به عنوان واحد ناوبری اینرسی (INU) شناخته می‌شود، یک سیستم ناوبری محاسبه‌ای است که شامل یک واحد اندازه‌گیری اینرسی (IMU) و یک واحد پردازنده ناوبری است. واحد IMU مجموعه ای از شتاب‌سنج‌ها و ژیروسکوپ‌ها را در برمی‌گیرد که با فرض پیکربندی متصل به بدنه، اندازه‌گیری‌های نیروی ویژه و سرعت زاویه‌ای را تولید می کند. به این خوشه ابزار اینرسی، واژه سکو نیز اطلاق می‌شود. اگر حسگرهای شتاب‌سنج-ژیروسکوپ بر روی قاب یا چارچوب وسیله قرار گیرد، به نام سیستم ناوبری اینرسی متصل به بدنه (SINS) شناخته می‌شود. اگر بر ساختار حلقه داخلی یک ساختار چند حلقه ای یا بر ساختار داخلی گوی شناور قرار گیرد، این سیستم ناوبری به سیستم سکوی پایدار شناخته می‌شود. امروزه در طراحی‌ها استفاده از SINS بسیار متداول می‌باشد. فرایند محاسباتی اساسی در یک SINS از ادغام معادلات سرعت، وضعیت و موقعیت تشکیل شده است که ابتدا باید در شروع ناوبری مقداردهی اولیه شوند. اساساً مقداردهی اولیه سرعت و موقعیت بر اساس اطلاعات یک سامانه خارجی مانند سامانه‌های موقعیت‌یاب جهانی (GNSS) موجود بر روی وسیله و یا سرعت‌سنج‌های وسیله از قبیل سرعت‌سنج‌های داپلری و غیره انجام می‌شود [۳]. به طور خاص در مورد فرایند مقداردهی اولیه زوایای وضعیت و سمت، تعبیر همراستاسازی یا تنظیم به‌کار رفته است. همراستاسازی خود به دو بخش همراستاسازی درشت و همراستاسازی نَرم تقسیم‌بندی می‌شود. همراستاسازی درشت که در برخی از مراجع از آن به عنوان همراستاسازی اولیه نیز یاد شده است از دو قسمت همترازسازی و شمال یابی ژیروسکوپی تشکیل شده است. همراستاسازی نرم نیز به چهار حالت مختلف با نام‌های همراستاسازی ایستا، همراستاسازی شبه‌ایستا (که البته در برخی مراجع به همراستاسازی حالت لنگر نیز به آن اطلاق می‌شود)، همراستاسازی متحرک و همراستاسازی انتقالی تقسیم‌بندی می‌شود [۶-۴]. در شکل ۱ مراحل مقداردهی اولیه در SINS یک پرنده نشان داده شده است. مرحله پس از مرحله مقداردهی اولیه که کلیه مقادیر موقعیت، سرعت و وضعیت با دقت مطلوب محاسبه می‌شود، مرحله ناوبری نام دارد. در این مرحله با استفاده از انتگرال‌های موقعیت، سرعت و وضعیت، پارامترهای ناوبری به‌روزرسانی و محاسبه می‌شوند [۷].



شکل ۱. مراحل مقداردهی اولیه در یک SINS

۲. معرفی مسئله

در مسئله همراستاسازی انتقالی، هدف تعیین پارامترهای ناوبری یک INS خواهد بود که از یک مرجع اندازه‌گیری ثابت و یا مرجع کمک ناوبری به میزان بازوی اهرمی فاصله داشته باشد. البته در این پژوهش، به همراستاسازی انتقالی ایستای SINS یک پرنده پیش از پرواز و جدا شدن از سکو، که به میزان بازوی اهرمی از مرجع کمک ناوبری حامل فاصله دارد پرداخته شده است [۸]. حسگرهای بلوک IMU را می توان بر اساس میزان بایاس و خطای موجود در آن به پنج دسته یا رده کلی تقسیم کرد: دریایی، هوانوردی (هوایی)، متوسط، تاکتیکی و مصرف‌کننده. بسته به زمان پرواز و دقت ناوبری مورد نیاز، در طراحی SINS یک پرنده از حسگرهای رده هوایی، متوسط و یا تاکتیکی استفاده می‌شود. در جدول ۱ دسته بندی حسگرهای مختلف بر حسب مقادیر بایاس حسگرهای اینرسی ارائه شده است [۹].

جدول ۱. ارتباط بایاس حسگرهای اینرسی با رده‌بندی مختلف IMU

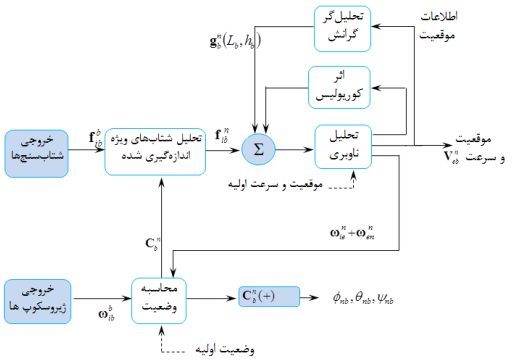
رده IMU	بایاس شتاب‌سنج (mili g)	بایاس ژیروسکوپ (deg/h)
دریایی	0.01	0.001
هوایی	0.03-0.1	0.01
متوسط	0.1-1	0.1
تاکتیکی	1-10	1-100
مصرف‌کننده	> 10	>100

۲-۱. تحلیل معادلات ناوبری در دستگاه جغرافیایی

معادلات ناوبری شامل چهار مرحله می‌باشد: به روزرسانی وضعیت، تبدیل دستگاه مختصات نیروی ویژه، به‌روزرسانی سرعت و به‌روزرسانی موقعیت. علاوه بر این، یک مدل گرانش یا جاذبه برای تبدیل نیروی ویژه به شتاب نیز مورد نیاز است. به طور کلی، وضعیت با ادغام اندازه‌گیری‌های سرعت‌زاویه‌ای به‌روزرسانی می‌شود؛ سرعت با ادغام شتاب به‌روزرسانی می‌شود؛ و موقعیت با ادغام سرعت به روزرسانی می شود. شکل معادلات ناوبری اینرسی به این بستگی دارد که راه حل ناوبری در کدام چارچوب مختصات بیان می شود. این معادلات ناوبری می‌تواند در چارچوب اینرسی (ECI) یا چارچوب مرجع زمینی (ECEF) و یا چارچوب ناوبری محلی (LN) بیان و توصیف شوند. با توجه به این که خروجی حسگرهای اینرسی در دستگاه بدنی وسیله ارائه می‌شود، توصیف معادلات وضعیتی نیز در دستگاه بدنی انجام می‌شود. خطاها می‌توانند از IMU، فرآیند مقداردهی اولیه و معادلات ناوبری ناشی شوند. سپس این خطاها از طریق معادلات ناوبری منتشر می‌شوند تا خطاهای موقعیت، سرعت و وضعیت را که با زمان تغییر می کنند، ایجاد کنند.

یکی از متداول‌ترین روش‌های تحلیل معادلات ناوبری اینرسی تحلیل این معادلات در دستگاه مختصات LN می‌باشد که محورهای آن در جهت‌های شمال، شرق و جنوب (NED) و بر مرکز پرنده ثابت شده است که با نماد n نمایش داده می شود [۹]. این دستگاه مختصات در بعضی

از مراجع به دستگاه مختصات جغرافیایی شناخته می‌شود [۳، ۵]. در این تحلیل ۶ کمیت در هر لحظه به طور مستقیم از معادله ناوبری استخراج شده که مربوط به کمیت های موقعیت جسم می‌باشند. همچنین با استفاده از موقعیت‌های به دست آمده با استفاده از معادلات چرخشی می‌توان وضعیت و سمت جسم را نسبت به مرجع ناوبری به طور دقیق تعیین کرد. از مزایای این روش دقت آن می باشد ولی از معایب آن حجم بیشتر معادلات و زمان شبیه سازی آن در مقایسه با دو روش قبل می‌باشد. در شکل ۲ بلوک دیاگرام معادلات ناوبری اینرسی در دستگاه ناوبری محلی نمایش داده شده است.



شکل ۲. معادلات ناوبری در دستگاه ناوبری محلی

۲-۱-۱. به‌روزرسانی وضعیت

نرخ تغییرات ماتریس کسینوس هادی (DCM) دستگاه بدنی به ناوبری محلی به صورت زیر می‌باشد.

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{nb}^b = \mathbf{C}_b^n \left(\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times\right) \qquad (۱)$$

که در آن $\boldsymbol{\Omega}_{nb}^b = \left(\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times\right)$ یک ماتریس پادمتقارن از بردار سرعت زاویه‌ای دستگاه بدنی به ناوبری محلی به صورت زیر می‌باشد.

$$\boldsymbol{\Omega}_{nb}^b = \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b - \mathbf{C}_n^b \left(\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\Omega}_{en}^n\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{nb,z}^b & \omega_{nb,y}^b \\ \omega_{nb,z}^b & 0 & -\omega_{nb,x}^b \\ -\omega_{nb,y}^b & \omega_{nb,x}^b & 0 \end{pmatrix} \qquad (۲)$$

که در آن بردار سرعت زاویه ای دستگاه ECEF نسبت به ECI در دستگاه NED به صورت زیر می‌باشد.

$$\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n = \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times\right) = \omega_{ie} \begin{pmatrix} 0 & -\sin L_b & 0 \\ \sin L_b & 0 & -\cos L_b \\ 0 & \cos L_b & 0 \end{pmatrix} \qquad (۳)$$

که در آن $\omega_{ie} = 7.292115 \times 10^{-5}\ rad/s$ و برابر با اندازه بردار سرعت زاویه ای زمین و L_b عرض جغرافیایی دستگاه مختصات بدنی وسیله می باشد. همچنین بردار سرعت زاویه ای دستگاه ناوبری به زمینی در دستگاه NED نیز به صورت زیر می‌باشد.

$$\boldsymbol{\Omega}_{en}^n = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{en,z}^n & \omega_{en,y}^n \\ \omega_{en,z}^n & 0 & -\omega_{en,x}^n \\ -\omega_{en,y}^n & \omega_{en,x}^n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{v_{eb,E}^n}{R_E(L_b)+h_b} & \dfrac{-v_{eb,N}^n}{R_N(L_b)+h_b}, \\ \dfrac{-v_{eb,E}^n \tan L_b}{R_E(L_b)+h_b} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad (۴)$$

که در آن مقادیر h_b ارتفاع ژئودتیک و پارامترهای $R_N(L_b)$ و $R_E(L_b)$ به ترتیب شعاع نصف‌النهاری و شعاع عرضی زمین می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$R_N(L_b) = \frac{R_e\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2 \sin^2 L_b\right)^{3/2}}$$
$$R_E(L_b) = \frac{R_e}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 L_b}} \qquad (۵)$$

که در آن پارامترهای بیضی‌گون مرجع بر اساس WGS 84 به صورت زیر می‌باشد [۹].

$R_e = R_0 = 6{,}378{,}137.0\ \ m,$
$R_P = 6{,}356{,}752.3142\ \ m,$
$f = 1/298.257223563$
$e = 0.0818191908425$

۲-۱-۲. به‌روزرسانی سرعت

تغییرات بردار سرعت بدنی وسیله نسبت به زمین در دستگاه NED به صورت زیر می‌باشد.

$$\dot{\mathbf{V}}_{eb}^{n}=\mathbf{C}_{b}^{n}\mathbf{f}_{ib}^{b}+\mathbf{g}_{b}^{n}(L_b,h_b)-\left(2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^{n}+\boldsymbol{\Omega}_{en}^{n}\right)\mathbf{V}_{eb}^{n} \quad (۶)$$

که در آن مدل گرانشی در دستگاه ناوبری با تقریب مناسب به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbf{g}_{b}^{n}(L_b,h_b)\approx\begin{bmatrix}0 & 0 & g_{b,D}^{n}(L_b,h_b)\end{bmatrix}^{T}=g_{b,D}^{n}(L_b,h_b)\mathbf{u}_{n,D}^{n} \quad (۷)$$

که معادله گرانش آن به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$g_{b,D}^{n}(L_b,h_b)=g_{0,D}^{n}(L_b)\times\left[1-\frac{2}{R_0}\left(1+f+\frac{\omega_{ie}^{2}R_0^{2}R_P}{\mu}\right)h_b+\frac{3}{R_0^{2}}h_b^{2}+\ldots\right] \quad (۸)$$

که در آن $\mu=3.986004418\ \mathrm{m^2s^{-3}}$ برابر با ثابت گرانشی زمین می‌باشد. بسط جملات معادله گرانش رابطه (۸) تا مرتبه چهارم به ازای هر نقطه دلخواه با عرض L_b و ارتفاع h_b بالاتر از سطح بیضی‌گون مرجع به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}g_{b,D}^{n}(L_b,h_b)&=g_{0,D}^{n}(L_b)-c_1h_b+c_2h_b^{2}-c_3h_b^{3}+c_4h_b^{4},\\ c_1&=3.08338788871\times10^{-6}+4.429743963\times10^{-9}\cos^2(L_b)-1.9964614\times10^{-11}\cos^4(L_b),\\ c_2&=7.2442777999\times10^{-13}+2.116062\times10^{-15}\cos^2(L_b)-3.34306\times10^{-17}\cos^4(L_b)-1.908\times10^{-19}\cos^6(L_b)-4.86\times10^{-22}\cos^8(L_b),\\ c_3&=1.51124922\times10^{-19}+1.148624\times10^{-21}\cos^2(L_b)+1.4975\times10^{-23}\cos^4(L_b)+1.66\times10^{-25}\cos^6(L_b),\\ c_4&=2.95239\times10^{-26}+4.167\times10^{-28}\cos^2(L_b)\end{aligned} \quad (۹)$$

دقت این رابطه تا ارتفاع h_b کمتر از ۲۰ کیلومتر بالاتر از سطح بیضی‌گون برابر $0.1\times10^{-8}\ m/\mathrm{s^{-2}}$ و به ازای ارتفاع h_b کمتر از ۷۰ کیلومتر بالاتر از سطح بیضی‌گون برابر با $1\times10^{-8}\ m/\mathrm{s^{-2}}$ خواهد بود. همچنین در رابطه (۹)، عبارت $g_{0,D}^{n}(L_b)$ برابر با مقدار گرانش بر روی سطح بیضی‌گون مرجع می‌باشد که از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned}g_{0,D}^{n}(L_b)=\gamma_e\times(1+0.005279042982\times\sin^2L_b+0.000023271800\times\sin^4L_b+0.000000126218\times\sin^6L_b+0.000000000730\times\sin^8L_b+0.000000000004\times\sin^{10}L_b)\end{aligned} \quad (۱۰)$$

که در آن $\gamma_e=9.7803253349\ m/\mathrm{s^{-2}}$ برابر با مقدار گرانش استوایی بر روی سطح بیضی‌گون می‌باشد. خطای محاسبه گرانش با استفاده از رابطه (۱۰) برابر با $0.001\times10^{-8}\ m/\mathrm{s^{-2}}$ می‌باشد [۱۰].

۲-۱-۳. به‌روزرسانی موقعیت

تغییرات زمانی طول و عرض جغرافیایی و ارتفاع وسیله نسبت به سرعت‌های محاسبه شده در دستگاه NED به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned}\dot{L}_b&=\frac{v_{eb,N}^{n}}{R_N(L_b)+h_b}\\ \dot{l}_b&=\frac{v_{eb,E}^{n}}{(R_E(L_b)+h_b)\cos L_b}\\ \dot{h}_b&=-v_{eb,D}^{n}\end{aligned} \quad (۱۱)$$

با حل معادلات بالا، پارامتر وضعیت، سرعت و موقعیت وسیله محاسبه و به‌روزرسانی خواهد شد [۹، ۱۱].

۲-۲. مدل‌سازی حسگرهای اینرسی

۲-۲-۱. مدل خطای بلوک IMU

همه انواع شتاب‌سنج‌ها و ژیروسکوپ‌ها تا حد معینی دارای بایاس، ضریب مقیاس، خطاهای تزویج متقابل و نویز تصادفی هستند. خطاهای مرتبه بالاتر و نیز حساسیت‌های متقابل سرعت زاویه ای-شتاب نیز ممکن است برای برخی از حسگرهای دیگر و بسته به نوع آن‌ها ممکن است اتفاق بیفتد. بخش های مختلف منابع خطای

خروجی یک شتاب‌سنج و ژیروسکوپ به صورت زیر می‌تواند مدل شود.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{f}}_{ib}^{b} &= (\mathbf{I}_3 + \mathbf{M}_a^b)\mathbf{f}_{ib}^{a} + \mathbf{b}_a^b + \mathbf{w}_a^b \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^{b} &= (\mathbf{I}_3 + \mathbf{M}_g^b)\boldsymbol{\omega}_{ib}^{g} + \mathbf{b}_g^b + \mathbf{G}_g^b\mathbf{f}_{ib}^{b} + \mathbf{w}_g^b\end{aligned} \quad (۱۲)$$

که در آن $\tilde{\mathbf{f}}_{ib}^{b}$، بردار نیروی ویژه خروجی IMU، $\mathbf{b}_a$ بردار بایاس شتاب‌سنج، $\mathbf{I}_3$ ماتریس یکه، $\mathbf{M}_a^b$ ماتریس ضرایب خطای ناهمراستایی و ضریب‌مقیاس، $\mathbf{f}_{ib}^{a}$ نیروی ویژه واقعی و $\mathbf{w}_a$ بردار نویز تصادفی شتاب‌سنج است. به طور مشابه پارامترهای معادل ژیروسکوپ‌ها هم با زیر ونـد g نمایش داده‌شده است. تنها $\mathbf{G}_g^b$ ماتریس ضرایب خطاهای وابسته به گرانش در ژیروسکوپ‌ها می‌باشد که در IMUهایی با ژیروسکوپ‌های مکانیکی تأثیرگذار می‌باشد و در ژیروسکوپ‌های فیبر نوری می‌توان از آن صرف‌نظر نمود. در خصوص بایاس $\mathbf{b}_{a/g}$ باید گفت که بایاس یک خطای معین است که توسط همه شتاب‌سنج‌ها و ژیروسکوپ‌ها نشان داده می‌شود [۱۲-۱۳]. بایاس در بیشتر موارد، بخش غالب در خطاهای کلی یک بلوک اینرسی می باشد که تخمین آن جزو یکی از مهم‌ترین بخش‌های یک سامانه ناوبری اینرسی می‌باشد. بایاس شتاب‌سنج‌ها و ژیروسکوپ‌ها به دو قسمت مؤلفه‌های ایستا و پویا تقسیم‌بندی می‌کنند.

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_a &= \mathbf{b}_{as} + \mathbf{b}_{ad} \\ \mathbf{b}_g &= \mathbf{b}_{gs} + \mathbf{b}_{gd}\end{aligned} \quad (۱۳)$$

مؤلفه‌های ایستای بایاس $\mathbf{b}_{g/a,s}$، همچنین با نام بایاس ثابت، بایاس روشن شدن و تکرارپذیری بایاس نیز شناخته می شوند که شامل بایاس اجرا به اجرای هر حسگر به اضافه بایاس ثابت باقیمانده بعد از کالیبراسیون هر حسگر می باشد. بایاس ایستا در طول یک دوره عملیات IMU ثابت اما از اجرا به اجرا متفاوت است. مؤلفه پویای بایاس $\mathbf{b}_{g/a,d}$، همچنین با نام های بایاس حین اجرا و ناپایداری بایاس نیز شناخته می شوند. این بایاس در بازه‌های زمانی یک دقیقه تغییر می‌کند و مجموع بایاس حین اجرای حسگرها به اضافه بایاس وابسته به دمای باقیمانده از جبران‌سازی دمایی کالیبراسیون حسگرها می‌باشد. این مؤلفه در اغلب حسگرها بر اساس مدل گاوس مارکوف مرتبه اول در نظر گرفته می‌شود [۱۴].

$$\dot{\mathbf{b}}_{a/g,d} = -\frac{1}{\tau}\mathbf{b}_{a/g,d} + w_c \quad (۱۴)$$

۲-۲-۲. مدل‌سازی خطای تصادفی حسگر

به لحاظ سیگنالی می‌توان مدل خطای رابطه (۱۲) را به صورت زیر نوشت.

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}(t) + d(\mathbf{u}(t)) + \mathbf{z}(t) \quad (۱۵)$$

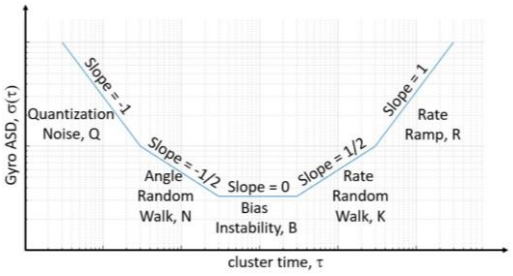
در این رابطه سیگنال ورودی (نیروی ویژه واقعی و سرعت‌زاویه‌ای واقعی) تحت تأثیر خطاهای قطعی $d(\mathbf{u}(t))$ و تصادفی $\mathbf{z}(t)$ بوده و در نتیجه آن سیگنال اندازه‌گیری، تولید شده است. خطاهای قطعی در رابطه (۱۵)، ترکیبی از سطرهای ماتریس $\mathbf{M}_a^b$ و بایاس ایستا برای هر حسگر می‌باشد. لذا با استفاده از یک مدل قطعی با ضرایب نامعین می‌توان اثرات آن‌ها را جبران‌سازی کرد. البته در مواردی می‌توان اثرات مربوطه را در کارخانه و قبل از تولید محصول نهایی با استفاده از کالیبراسیون‌های کارخانه‌ای حذف کرد. در این صورت خطاهای قطعی تنها شامل بایاس ایستا خواهد بود [۹، ۱۶-۱۵].

در مقابل، مقادیر خطاهای تصادفی در هر بار استفاده از حسگر، تغییر پیدا می کند و قابل پیش‌بینی نمی‌باشد. این خطاها در واقع همان مقادیر بایاس‌های پویا و نویز تصادفی شتاب‌سنج و ژیروسکوپ می‌باشند که با توجه به تغییرات این نوع خطاها با گذشت زمان، لازم است در هر بار استفاده از حسگرها عملیات جبران‌سازی آن‌ها به صورت برخط انجام شده و تأثیرات مربوطه حذف

و یا کاهش پیدا کنند. بدین منظور می بایست مدل های تصادفی مناسبی برای خطای مربوطه طراحی کرده و در کنار معادلات فضای حالت SINS استفاده کرد. خطاهای تصادفی بر روی هر حسگر به صورت مستقل از حسگرهای دیگر می‌تواند در نظر گرفته می‌شوند. در عمل ۵ جزء خطای تصادفی شناخته شده وجود دارد. در شکل ۳ یک نمونه انحراف استاندارد آلن (ASD) پر کاربرد که شامل ۵ منبع مهم نویز برای یک ژیروسکوپ است، نشان داده شده است. این نویزها عبارتند از [۱۷]:

- Quantization noise (Q)
- Angle Random Walk (N)
- Bias Instability (B)
- Rate Random Walk (K)
- Rate Ramp (R)

هر کدام از این نویز ها یک منشاء فیزیکی دارد [۱۸].



شکل ۳. خطاهای تصادفی حسگر اینرسی ژیروسکوپ

برای شتاب‌سنج‌ها، نویزهای فوق به همین گونه می باشد با این تفاوت که ARW تبدیل به خطای قدم تصادفی سرعت (VRW) و RRW به خطای قدم تصادفی شتاب (ACRW) تبدیل می‌شود. با توجه به اینکه مدل‌سازی فضای حالت برای یک سیستم تصادفی با استفاده از تابع چگالی طیفی توان (PSD) آن انجام می‌شود، لذا لازم است ارتباط بین PSD یک خطا با نمودارهای ASD مشخص شود. این رابطه توسط معادله زیر بیان می‌شود.

$$\sigma_u^2(\tau) = 4\int_0^\infty S_u(f)\frac{\sin^4(\pi f\,\tau)}{(\pi f\,\tau)^2}df \qquad (۱۶)$$

که در آن $S_u(f) = S_u(s)\big|_{s=j2\pi f}$ تابع PSD سیگنال u و فرکانس $f \in R$ با واحد هرتز است. به منظور استفاده از این رابطه در استخراج ASD خطاها و نویز ها می بایست PSD هر کدام از آن ها محاسبه شده و سپس مقدار ASD مربوطه استخراج شود. با توجه به اینکه $S_u(f)$ یک عبارت کسری با صورت و مخرج از نوع چندجمله‌ای می‌باشد، می‌توان آن را با استفاده از کسرهای جزئی به صورت سری زیر تجزیه کرد.

$$S_u(f) = \ldots + (2\pi f)^2 Q^2 + N^2 + \frac{B^2}{2\pi f} + \frac{K^2}{(2\pi f)^2} + \ldots \qquad (۱۷)$$

که در آن N، B و K اعداد ثابت هستند. بر اساس اصل برهم نهی این PSD مربوط به سیگنال زیر است.

$$u(t) = \ldots + z_Q(t) + z_N(t) + z_B(t) + z_K(t) + \ldots \qquad (۱۸)$$

که در آن $z_Q(t)$، $z_N(t)$، $z_B(t)$ و $z_K(t)$ متغیرهای تصادفی دو به دو مستقل از هم با میانگین صفر هستند. با جایگذاری رابطه (۱۷) در (۱۶) می‌توان گفت ASD شامل موارد زیر است.

$$\sigma_u^2(\tau) = \ldots + \sigma_{z_Q}^2(\tau) + \sigma_{z_N}^2(\tau) + \sigma_{z_B}^2(\tau) + \sigma_{z_K}^2(\tau) + \ldots \qquad (۱۹)$$

در IMU های رده میانی و تاکتیکی معمولاً از بین تمامی نویزها، نویزهای N ، B و K غالب بوده و در عملکرد SINS تأثیر مستقیمی دارند. نویز کوانتیزه کردن یا همان Q معمولاً در τ های بسیار کوچک وجود دارند. نویزهای Rate Ramp نیز در مدت‌زمان‌های طولانی و τ های زیاد وجود داشته و معمولاً برای بررسی عملکرد INS ها در مدت زمان طولانی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در این پژوهش در پیاده‌سازی مدل خطای IMU، خطاهای قطعی $(d(\mathbf{u}(t)))$ به صورت تنها

خطاهای باقیمانده از مرحله کالیبراسیون و بایاس اجرا به اجرا در نظر گرفته شده است و خطاهای تصادفی ($\mathbf{z}(t)$) حسگرها به صورت کامل و به صورت ۵ منبع مهم نویز در نظر گرفته شده است. این به این دلیل است که همگرایی پارامترهای حالت سیستم مشابه مدل یک IMU واقعی بررسی شوند. بنابراین مدل خطای حسگرهای ورودی به صورت ذیل خواهد شد [۲۰-۱۹].

$$\hat{\mathbf{u}}(t)=\mathbf{u}(t)+d(\hat{\mathbf{u}}(t))+\mathbf{z}(t)$$
$$\mathbf{z}(t)=\mathbf{z}_Q(t)+\mathbf{z}_N(t)+\mathbf{z}_B(t)+\mathbf{z}_K(t)+\mathbf{z}_R(t) \quad (۲۰)$$

۳. تحلیل همراستاسازی

۳-۱. تحلیل همراستاسازی اولیه

در بسیاری از کاربردها، همراستاسازی اولیه پرنده تحت شرایط ایستا و زوایای وضعی نزدیک به تراز با کیفیت بهتری انجام می شود. علم به وجود ایستایی SINS، اجازه می‌دهد که فرایند مقداردهی اولیه وضعیت و سرعت به طور مستقل (یعنی بدون اعمال ورودی‌های وضعیت و سرعت) از طریق عملیات نرم‌افزاری روی سیگنال‌های حسگرهای اینرسی سیستم انجام شود. به عبارتی می توان تحت این شرایط طی فرایند خود-همراستایی، مقداردهی اولیه وضعیت SINS را محاسبه و انجام نمود. در همراستاسازی انتقالی در صورت وجود مشاهدات وضعیت و سمت، می‌توان مقادیر خطاهای قطعی و تصادفی حسگرها را نیز تعیین نمود [۲۱].

۳-۱-۱. همترازسازی شتاب‌سنجی

در حالت ایستا (صفر بودن سرعت زمینی $\mathbf{V}_{eb}^n=\mathbf{0}$) یا سرعت زمینی ثابت، با اندازه‌گیری‌های نیروی ویژه در امتداد محورهای دستگاه بدنه و تخمین مدل گرانش در امتداد دستگاه ناوبری محلی، رابطه (۶) به صورت زیر خلاصه می‌شود.

$$\mathbf{f}_{ib}^b=-\mathbf{C}_n^b\mathbf{g}_b^n(L_b,h_b) \quad (۲۱)$$

با اصلاح رابطه گرانش شاقولی و ماتریس کسینوس هادی دستگاه ناوبری محلی به بدنه، معادلات همترازسازی رابطه (۲۱) به صورت زیر خواهد شد.

$$\begin{pmatrix} f_{ib,x}^b \\ f_{ib,y}^b \\ f_{ib,z}^b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin\theta_{nb} \\ -\cos\theta_{nb}\sin\phi_{nb} \\ -\cos\theta_{nb}\cos\phi_{nb} \end{pmatrix} g_{b,D}^n(L_b,h_b) \quad (۲۲)$$

و زوایای فراز و چرخ اولیه پرنده از معادله ذیل محاسبه خواهد شد.

$$\theta_{nb}=\arctan\left(\frac{f_{ib,x}^b}{\sqrt{{f_{ib,y}^b}^2+{f_{ib,z}^b}^2}}\right), \quad (۲۳)$$
$$\phi_{nb}=\arctan_2\left(-f_{ib,y}^b,-f_{ib,z}^b\right)$$

برای زاویه چرخ از تابع آرک تانژانت چهار ربعی ($\arctan_2$) باید استفاده شود. زاویه سمت را نمی‌توان با همترازسازی تعیین کرد زیرا جهت گیری بردار گرانش در دستگاه بدنه مستقل از آن است.

۳-۱-۲. شمال‌یابی ژیروسکوپی

هنگامی که SINS ثابت باشد، تنها چرخشی که ژیروسکوپ‌های آن حس می کنند بردار چرخش زمین است که در راستای محور z دستگاه مختصات ECEF می‌باشد. اندازه‌گیری این چرخش در دستگاه بدنی سبب تعیین زاویه سمت می شود، به جز نزدیک به قطب‌ها، که محور چرخش و بردار گرانش زمین بر هم منطبق می‌شوند. در شمال یابی ژیروسکوپی مستقیم، گردش زمین به طور مستقیم توسط ژیروسکوپ‌ها اندازه‌گیری می‌شود. با فرض ساکن بودن INS ($\boldsymbol{\omega}_{en}^n=\boldsymbol{\omega}_{nb}^n=0$) و جایگذاری مقدار $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$ و $\boldsymbol{\omega}_{ie}^b$ به صورت فرم برداری، معادله (۲) به صورت زیر خواهد شد.

$$\begin{pmatrix} \omega_{ie}\cos(L_b) \\ 0 \\ -\omega_{ie}\sin(L_b) \end{pmatrix} = \mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}(\phi_{nb},\theta_{nb},\psi_{nb}) \begin{pmatrix} \omega_{ib,x}^b \\ \omega_{ib,y}^b \\ \omega_{ib,z}^b \end{pmatrix} \quad (۲۴)$$

جایگزین کردن زوایای اویلر متناظر با $\mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}(\phi_{nb},\theta_{nb},\psi_{nb})$ در رابطه بالا، امکان تعیین زاویه سمت پرنده را بدون نیاز به داشتن عرض جغرافیایی آن را فراهم می‌کند، به شرطی که زوایای چرخ و فراز معلوم باشند (پس از انجام فرایند ترازیابی). بنابراین شمال یابی ژیروسکوپی مستقیم پرنده به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} &\psi_{nb} = \arctan_2(\sin\psi_{nb},\cos\psi_{nb}) \\ &\sin\psi_{nb} = \omega_{ib,y}^b\cos\phi_{nb} + \omega_{ib,z}^b\sin\phi_{nb} \quad , \\ &\cos\psi_{nb} = \begin{pmatrix} \omega_{ib,x}^b\cos\theta_{nb} + \omega_{ib,y}^b\sin\phi_{nb}\cos\theta_{nb} + \\ \omega_{ib,z}^b\cos\phi_{nb}\sin\theta_{nb} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (۲۵)$$

۳-۲. همراستاسازی نَرم

بیشتر کاربردهای ناوبری اینرسی نیاز به محاسبه زوایای وضعیت و سمت بهتر از یک میلی رادیان (0.05°) می‌باشند. این در حالی است که اکثر مقداردهی‌های اولیه وضعیت و همراستاسازی‌های اولیه، به این دقت منتهی نخواهند شد. بنابراین لازم است که پس از فرایند همراستاسازی اولیه، یک بازه زمانی را جهت کالیبره نمودن مقادیر خام وضعیت محاسبه شده اختصاص نمود. این فرایند تحت عنوان همراستاسازی نرم شناخته می‌شود. در تکنیک‌های همراستاسازی نرم، باقیمانده خطاهای وضعیت از طریق رشد خطاهای سرعت حس می‌شوند.

در همراستاسازی انتقالی در یک پرنده، اندازه‌گیری‌های اختلاف بین خروجی‌های SINS و مقادیر مرجع، به عنوان ورودی یک الگوریتم تخمین مانند فیلتر کالمن (KF) می‌باشند که این اندازه‌گیری‌ها در جبران نمودن مقادیر سرعت و وضعیت پرنده (و گاهی اوقات موقعیت) استفاده می‌شود. همچنین اغلب خطاهای حسگرهای اینرسی از قبیل بایاس ژیروسکوپ‌ها و شتاب‌سنج‌ها به‌خوبی تخمین زده می‌شود [۲۳-۲۲].

۳-۲-۱. تحلیل معادلات انتشار خطای ناوبری

معادلات انتشار خطای ناوبری با فرض ایستایی سکو به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود.

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbf{V}}_{eb}^n = \mathbf{V}_{eb}^n + \delta\mathbf{V}_{eb}^n \\ &\tilde{\mathbf{g}}_b^n(L_b,h_b) = \mathbf{g}_b^n(L_b,h_b) + \delta\mathbf{g}_b^n(L_b,h_b) \\ &\tilde{\mathbf{C}}_b^n = \delta\mathbf{C}_b^n\mathbf{C}_b^n = (\mathbf{I}_3 + \delta\boldsymbol{\varphi}_{nb}^n\times)\mathbf{C}_b^n \\ &\tilde{\mathbf{C}}_e^n = \delta\mathbf{C}_e^n\mathbf{C}_e^n = (\mathbf{I}_3 - \delta\boldsymbol{\vartheta}_{en}^n\times)\mathbf{C}_e^n \\ &\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n = \boldsymbol{\omega}_{en}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n \\ &\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n = \boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n \\ &\tilde{\mathbf{f}}_{ib}^n = \tilde{\mathbf{C}}_b^n\tilde{\mathbf{f}}_{ib}^b = (\mathbf{I}_3 + \delta\boldsymbol{\varphi}_{nb}^n\times)\mathbf{C}_b^n(\mathbf{f}_{ib}^b + \delta\mathbf{f}_{ib}^b) \end{aligned} \quad (۲۶)$$

که در این روابط $\delta\mathbf{C}_b^n$ ماتریس خطای وضعیتی و $\delta\boldsymbol{\varphi}_{nb}^n$ نیز بردار ناهمراستایی به جامانده از خطاهای مرحله همراستاسازی اولیه است که فرم برداری آن به صورت $\delta\boldsymbol{\varphi}_{nb}^n = \begin{bmatrix}\varphi_{nb,N}^n & \varphi_{nb,E}^n & \varphi_{nb,D}^n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ می‌باشد. بر این اساس معادله خطای سرعت زمینی در دستگاه NED به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$\begin{aligned} \delta\dot{\mathbf{V}}_{eb}^n \approx &-\hat{\mathbf{C}}_b^n\hat{\mathbf{f}}_{ib}^b\times\delta\boldsymbol{\varphi}_{nb}^n - (2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\Omega}_{en}^n)\delta\mathbf{V}_{eb}^n + \\ &\hat{\mathbf{V}}_{eb}^n\times\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n + 2\hat{\mathbf{V}}_{eb}^n\times\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n - \\ &\frac{2g_0(\hat{L}_b)}{r_{eS}^e(\hat{L}_b)}\delta h_b + \hat{\mathbf{C}}_b^n\mathbf{b}_a^b \end{aligned} \quad (۲۷)$$

که در آن اندیس (^) در بالای برخی پارامترها معرف مقادیر جبران‌سازی شده پارامتر می‌باشد. همچنین سایر پارامترهای انتشار خطا در دستگاه ناوبری به صورت ذیل می‌باشد [۲۴].

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{\text{en}}^{\text{n}} \approx \begin{pmatrix} \dfrac{\delta v_{eb,E}^{n}}{R_E\left(\hat{L}_b\right)+\hat{h}_b} - \dfrac{\hat{v}_{eb,E}^{n}}{\left(R_E\left(\hat{L}_b\right)+\hat{h}_b\right)^2}\delta h_b \\ \dfrac{-\delta v_{eb,N}^{n}}{R_N\left(\hat{L}_b\right)+\hat{h}_b} + \dfrac{\hat{v}_{eb,N}^{n}}{\left(R_N\left(\hat{L}_b\right)+\hat{h}_b\right)^2}\delta h_b \\ \left(\dfrac{-\delta v_{eb,E}^{n}\tan\hat{L}_b}{R_E\left(\hat{L}_b\right)+\hat{h}_b} + \dfrac{\hat{v}_{eb,E}^{n}\tan\hat{L}_b}{\left(R_E\left(\hat{L}_b\right)+\hat{h}_b\right)^2}\delta h_b - \right. \\ \left. \dfrac{\hat{v}_{eb,E}^{n}\sec^2\hat{L}_b}{R_E\left(\hat{L}_b\right)+\hat{h}_b}\delta L_b \right) \end{pmatrix} \quad (۲۸)$$

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} = -\omega_{ie}\begin{bmatrix}\sin\hat{L}_b\\0\\\cos\hat{L}_b\end{bmatrix}\times\delta L_b$$

$$\delta\dot{\boldsymbol{\varphi}}_{nb}^{n} \approx -\left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}+\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}\right)\times\delta\boldsymbol{\varphi}_{nb}^{n} - \delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} - \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^{n} + \hat{\mathbf{C}}_b^n\mathbf{b}_g^b \quad (۲۹)$$

$$\delta\dot{\mathbf{P}}_b = \begin{pmatrix}\delta\dot{L}_b\\ \delta\dot{\lambda}_b\\ \delta\dot{h}_b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\delta v_{eb,N}^{n}}{R_N\left(\hat{L}_b\right)+\hat{h}_b} - \dfrac{\hat{v}_{eb,N}^{n}\delta h_b}{\left(R_N\left(\hat{L}_b\right)+\hat{h}_b\right)^2} \\ \left(\dfrac{\delta v_{eb,E}^{n}}{\left(R_E\left(\hat{L}_b\right)+\hat{h}_b\right)\cos\hat{L}_b} + \dfrac{\hat{v}_{eb,E}^{n}\sin\hat{L}_b\delta L_b}{\left(R_E\left(\hat{L}_b\right)+\hat{h}_b\right)\cos^2\hat{L}_b} - \right. \\ \left. \dfrac{\hat{v}_{eb,E}^{n}\delta h_b}{\left(R_E\left(\hat{L}_b\right)+\hat{h}_b\right)^2\cos\hat{L}_b} \right) \\ -\delta v_{eb,D}^{n} \end{pmatrix} \quad (۳۰)$$

۳-۳. فیلتر کالمن توسعه یافته (EKF)

در KF فرض می‌شود مدل سیستم در یک مسئله ناوبری، خطی است. در اکثر مسائل این فرض درست نبوده و مدل سیستم غیرخطی می‌باشد. از این‌رو EKF یک راه‌حل بهینه برای حل سیستم‌های غیرخطی می‌باشد.

در مسئله ناوبری، معادله دینامیکی سیستم غیرخطی می‌باشد ولی مدل مشاهدات و اندازه گیری غالباً خطی می باشد. در کاربردهای ناوبری استفاده از ترکیب معادلات مرحله به‌روزرسانی فیلتر EKF و معادلات مرحله پیشگویی KF استاندارد به عنوان معادلات فضای حالت سیستم رایج می‌باشد. البته در برخی کاربردها ترکیب معکوس نیز به ندرت انجام می‌شود. مدل دینامیکی سیستم در EKF به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}_s(t)\\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{w}_m(t)\end{aligned} \quad (۳۱)$$

که در آن $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ماتریس سیستم و $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ ماتریس اندازه‌گیری می‌باشد. در EKF فرض می شود که تخمین خطای بردار حالت بسیار کوچک تر از بردار حالت است که این امر یک مدل سیستم خطی را برای بردار حالت ایجاد می‌نماید. بنابراین مدل خطای سیستم را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned}\delta\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}(t)\delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}_s(t)\\ \delta\mathbf{z}(t) &= \mathbf{H}(t)\delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}_m(t)\end{aligned} \quad (۳۲)$$

طوری که

$$\mathbf{F}_{k-1} = \left.\frac{\partial\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{+}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}},$$
$$\mathbf{H}_k = \left.\frac{\partial\mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{-}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}} \quad (۳۳)$$

که در آن $\delta\mathbf{x}(t)$ متغیرهای حالت سیستم خطی سازی شده می باشد که از یک توزیع نرمال با میانگین $\delta\hat{\mathbf{x}}(t)$ و کوواریانس $\mathbf{P}$ پیروی می کنند ($\delta\mathbf{x}\sim N(\delta\hat{\mathbf{x}},\mathbf{P})$). بردار $\mathbf{w}_s$ نیز ورودی‌های تصادفی سیستم می باشد که از یک توزیع نرمال با میانگین $\overline{w}$ و Q کوواریانس پیروی می‌کند ($\mathbf{w}_s\sim N(\overline{w},\mathrm{Q})$). در معادله دوم که معادله اندازه‌گیری می‌باشد ماتریس $\delta\mathbf{z}$، ماتریس مشاهدات سیستم خطی سازی و هم چنین $\mathbf{w}_m$ نویز اندازه‌گیری بوده که رفتاری گاوسی با میانگین صفر و کوواریانس $\mathbf{R}$ را داراست ($\mathbf{w}_m\sim N(0,\mathbf{R})$) [۲۵].

۳-۳-۱. گسسته‌سازی EKF

گسسته سازی مرحله پیش گویی معادلات EKF به صورت زیر می‌باشد.

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}=\mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1})$$
$$\mathbf{P}_{k|k-1}=\mathbf{F}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1|k-1}\mathbf{F}_{k-1}^{\mathrm{T}}+\mathbf{Q}_{k-1} \quad (۳۴)$$

همچنین گسسته سازی معادلات مرحله به‌روزرسانی EKF به صورت زیر می‌باشد.

$$\mathbf{S}_k=\mathbf{R}_k+\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^{\mathrm{T}}$$
$$\mathbf{K}_k=\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_k^{-1}$$
$$\mathbf{e}_k=\mathbf{z}_k-\mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \quad (۳۵)$$
$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}+\mathbf{K}_k\mathbf{e}_k$$
$$\mathbf{P}_{k|k}=\mathbf{P}_{k|k-1}-\mathbf{K}_k\mathbf{S}_k\mathbf{K}_k^{\mathrm{T}}$$

۳-۴. فیلتر ناوبری

با ترکیب معادلات انتشار خطای ناوبری با معادلات EKF گسسته، معادلات فضای حالت ناوبری به صورت زیر خواهد شد.

$$\delta\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}\mathbf{F}_{11}^n & \mathbf{F}_{12}^n & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3\\ \mathbf{F}_{21}^n & \mathbf{F}_{22}^n & \mathbf{F}_{23}^n & \hat{\mathbf{C}}_b^n & \mathbf{0}_3\\ \mathbf{F}_{31}^n & \mathbf{F}_{32}^n & \mathbf{F}_{33}^n & \mathbf{0}_3 & \hat{\mathbf{C}}_b^n\\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3\\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3\end{pmatrix}\delta\mathbf{x}+\begin{pmatrix}\mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3\\ \hat{\mathbf{C}}_b^n & \mathbf{0}_3\\ \mathbf{0}_3 & \hat{\mathbf{C}}_b^n\\ \hat{\mathbf{C}}_b^n & \mathbf{0}_3\\ \mathbf{0}_3 & \hat{\mathbf{C}}_b^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{w}_a^b\\ \mathbf{w}_g^b\end{pmatrix} \quad (۳۶)$$

$$\delta\mathbf{z}=\begin{pmatrix}\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3\\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{H}_{v3}^n & \mathbf{0}_3 & \mathbf{H}_{v5}^n\\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3\end{pmatrix}\delta\mathbf{x}+\bar{\nu}_{3\times1}$$

که در آن

$$\delta\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\delta\mathbf{P}_b & \delta\mathbf{V}_{eb}^n & \delta\boldsymbol{\varphi}_{nb}^n & \mathbf{b}_a^b & \mathbf{b}_g^b\end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{H}_{v3}^n=\begin{bmatrix}\left\{\begin{matrix}-\hat{\mathbf{C}}_b^n\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\times\mathbf{l}_{rb}^b\right)+\\ \left(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n\times+\hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n\times\right)\hat{\mathbf{C}}_b^n\mathbf{l}_{rb}^b\end{matrix}\right\}\times\end{bmatrix} \quad (۳۷)$$
$$\mathbf{H}_{v5}^n=-\hat{\mathbf{C}}_b^n\left(\mathbf{l}_{rb}^b\times\right)$$

که در آن $\mathbf{l}_{rb}^b$ بازوی اهرمی بین دستگاه کمک ناوبری مرجع بر روی حامل و دستگاه INS پرنده می‌باشد. همچنین سایر پارامترهای آن به صورت روابط ذیل می‌باشد.

$$\mathbf{F}_{11}^n=\begin{pmatrix}0 & 0 & -\dfrac{\hat{v}_{eb,N}^n}{\left(R_N(\hat{L}_b)+\hat{h}_b\right)^2}\\ \dfrac{\hat{v}_{eb,E}^n\sin\hat{L}_b}{\left(\left(R_E(\hat{L}_b)+\hat{h}_b\right)\times\cos^2\hat{L}_b\right)} & 0 & -\dfrac{\hat{v}_{eb,E}^n}{\left(\left(R_E(\hat{L}_b)+\hat{h}_b\right)\times\cos^2\hat{L}_b\right)}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{12}^n=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{R_N(\hat{L}_b)+\hat{h}_b} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\left(R_E(\hat{L}_b)+\hat{h}_b\right)\cos\hat{L}_b} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{22}^n=\begin{pmatrix}\dfrac{\hat{v}_{eb,D}^n}{R_N(\hat{L}_b)+\hat{h}_b} & \left(\dfrac{-2\hat{v}_{eb,E}^n\tan\hat{L}_b}{R_E(\hat{L}_b)+\hat{h}_b}-2\omega_{ie}\sin\hat{L}_b\right) & \dfrac{\hat{v}_{eb,N}^n}{R_N(\hat{L}_b)+\hat{h}_b}\\ \left(\dfrac{\hat{v}_{eb,E}^n\tan\hat{L}_b}{R_E(\hat{L}_b)+\hat{h}_b}+2\omega_{ie}\sin\hat{L}_b\right) & \dfrac{\left(\hat{v}_{eb,N}^n\tan\hat{L}_b+\hat{v}_{eb,D}^n\right)}{R_N(\hat{L}_b)+\hat{h}_b} & \left(\dfrac{\hat{v}_{eb,E}^n}{R_E(\hat{L}_b)+\hat{h}_b}+2\omega_{ie}\cos\hat{L}_b\right)\\ \dfrac{-2\hat{v}_{eb,N}^n}{R_N(\hat{L}_b)+\hat{h}_b} & \left(\dfrac{-2\hat{v}_{eb,E}^n\tan\hat{L}_b}{R_E(\hat{L}_b)+\hat{h}_b}-2\omega_{ie}\cos\hat{L}_b\right) & 0\end{pmatrix}, \quad (۳۹)$$

$$\mathbf{F}_{33}^n=-\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n+\hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n\right)\times,\quad \mathbf{F}_{23}^n=-\left(\mathbf{C}_b^n\hat{\mathbf{f}}_{ib}^b\right)\times,$$
$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n=\omega_{ie}\begin{pmatrix}\cos\hat{L}_b\\ 0\\ -\sin\hat{L}_b\end{pmatrix} \quad (۴۰)$$

$$\mathbf{F}_{21}^n=\begin{pmatrix}\left(\dfrac{-\left(\hat{v}_{eb,E}^n\right)^2\sec^2\hat{L}_b}{R_E(\hat{L}_b)+\hat{h}_b}-2\hat{v}_{eb,E}^n\omega_{ie}\cos\hat{L}_b\right) & 0 & \left(\dfrac{-\left(\hat{v}_{eb,E}^n\right)^2\tan\hat{L}_b}{\left(R_E(\hat{L}_b)+\hat{h}_b\right)^2}-\dfrac{\hat{v}_{eb,N}^n\hat{v}_{eb,D}^n}{\left(R_N(\hat{L}_b)+\hat{h}_b\right)^2}\right)\\ \left(\dfrac{\hat{v}_{eb,N}^n\hat{v}_{eb,E}^n\sec^2\hat{L}_b}{R_E(\hat{L}_b)+\hat{h}_b}+2\hat{v}_{eb,N}^n\omega_{ie}\cos\hat{L}_b-2\hat{v}_{eb,D}^n\omega_{ie}\sin\hat{L}_b\right) & 0 & \dfrac{\left(-\hat{v}_{eb,N}^n\hat{v}_{eb,E}^n\tan\hat{L}_b+\hat{v}_{eb,E}^n\hat{v}_{eb,D}^n\right)}{\left(R_E(\hat{L}_b)+\hat{h}_b\right)^2}\\ 2\hat{v}_{eb,E}^n\omega_{ie}\sin\hat{L}_b & 0 & \left(\dfrac{\left(\hat{v}_{eb,E}^n\right)^2}{\left(R_E(\hat{L}_b)+\hat{h}_b\right)^2}+\dfrac{\left(\hat{v}_{eb,N}^n\right)^2}{\left(R_N(\hat{L}_b)+\hat{h}_b\right)^2}-\dfrac{2g_0(\hat{L}_b)}{r_{eS}^e(\hat{L}_b)}\right)\end{pmatrix}, \quad (۴۱)$$

$$r_{eS}^e(\hat{L}_b)=R_E\left(\hat{L}_b\right)\sqrt{1-e(2-e)\sin^2\hat{L}_b}$$

$$\mathbf{F}_{31}^{n}=\begin{pmatrix} \omega_{ie}\sin\hat{L}_b & 0 & \dfrac{\hat{v}_{eb,E}^{n}}{\left(R_E\left(\hat{L}_b\right)+\hat{h}_b\right)^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{-\hat{v}_{eb,N}^{n}}{\left(R_N\left(\hat{L}_b\right)+\hat{h}_b\right)^2} \\ \begin{pmatrix}\omega_{ie}\cos\hat{L}_b+\\ \dfrac{\hat{v}_{eb,E}^{n}}{\left(\left(R_E\left(\hat{L}_b\right)+\hat{h}_b\right)\times\right.}\\ \left.\cos^2\hat{L}_b\right)\end{pmatrix} & 0 & \dfrac{\hat{v}_{eb,E}^{n}\tan\hat{L}_b}{\left(R_E\left(\hat{L}_b\right)+\hat{h}_b\right)^2} \end{pmatrix} \quad (۴۲)$$

$$\mathbf{F}_{32}^{n}=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-1}{R_E\left(\hat{L}_b\right)+\hat{h}_b} & 0 \\ \dfrac{1}{R_N\left(\hat{L}_b\right)+\hat{h}_b} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\tan\hat{L}_b}{R_E\left(\hat{L}_b\right)+\hat{h}_b} & 0 \end{pmatrix} \quad (۴۳)$$

۳-۵. همراستاسازی انتقالی ایستا- روش پیشنهادی

در اینجا از یک روش پیشنهادی و مقاوم برای بهبود و تسریع تخمین پارامترهای خطای معادله حالت استفاده‌شده است که برای کاربرد در مقایسه با EKF رفتار کافی و سریع‌تری در تخمین پارامترها از خود نشان می‌دهد. شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد سرعت همگرایی همراستاسازی انتقالی با استفاده از EKF، زمانی در حدود ۵۰ تا ۶۰ ثانیه را به دنبال خواهد داشت که در مسئله همراستاسازی انتقالی ایستا و مقداردهی اولیه پرنده از طریق حامل زمینی یا سکوی پرتاب، زمان زیادی تلقی شود که در ادامه، روشی برای تسریع و جبران این مسئله پیشنهادشده است. با فرض ایستایی دستگاه بدنی وسیله در دستگاه NED و دستگاه زمینی خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} &\mathbf{V}_{eb,N}^{n}=\mathbf{V}_{eb,E}^{n}=\mathbf{V}_{eb,D}^{n}=0 \\ &\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}=\boldsymbol{\omega}_{nb}^{b}=[0\quad 0\quad 0]^T \\ &\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}=\mathbf{C}_{n}^{b}\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} \end{aligned} \quad (۴۴)$$

با جایگذاری روابط بالا در معادله حالت رابطه (۳۶) و صرف نظر کردن از حالت‌های موقعیت و بایاس و باز آرایی معادلات فضای حالت، می‌توان فرم معادلات فضای حالت رابطه (۳۶) را به فرم کاهش یافته زیر تبدیل نمود.

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix}\delta\dot{\mathbf{v}}_{eb}^{n}\\ \delta\dot{\boldsymbol{\varphi}}_{nb}^{n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^{n}\times & \mathbf{g}_{b}^{n}\left(\hat{L}_b,\hat{h}_b\right)\\ \mathbf{0}_3 & -2\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^{n}\times\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\mathbf{v}_{eb}^{n}\\ \delta\boldsymbol{\varphi}_{nb}^{n}\end{pmatrix}+ \\ &\qquad\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{C}}_{b}^{n} & \mathbf{0}_3\\ \mathbf{0}_3 & -\hat{\mathbf{C}}_{b}^{n}\end{pmatrix}\mathbf{U}(t)+\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{C}}_{b}^{n} & \mathbf{0}_3\\ \mathbf{0}_3 & -\hat{\mathbf{C}}_{b}^{n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{w}_{a}^{b}\\ \mathbf{w}_{g}^{b}\end{pmatrix} \\ &\delta\mathbf{z}=\begin{pmatrix}\mathbf{I}_3 & \mathbf{H}_{v3}^{n}\\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3\end{pmatrix}\delta\mathbf{x}+\bar{v}_{3\times1}\end{aligned} \quad (۴۵)$$

که در آن $\mathbf{H}_{v3}^{n}$ همان زیرماتریس مشاهدات ارائه شده در رابطه (۳۷) می‌باشد که به دلیل وجود بازوی اهرمی در معادلات ایجاد شده است. در این روش معادلات فضای حالت فوق، مشابه فیلتر EKF مقداردهی می‌شوند. به دلیل ایستایی و روابط $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^{b}=\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}+\mathbf{b}_{g}^{b}$ و $\tilde{\mathbf{f}}_{ib}^{b}=\mathbf{f}_{ib}^{b}+\mathbf{b}_{a}^{b}$، می‌توان در هر مرحله تخمینی از بایاس‌های سیستم به صورت زیر محاسبه نمود.

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbf{b}}_{a}^{b}=\tilde{\mathbf{f}}_{ib}^{b}-\tilde{\mathbf{C}}_{n}^{b}\mathbf{g}_{l}^{n} \\ &\tilde{\mathbf{b}}_{g}^{b}=\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^{b}-\tilde{\mathbf{C}}_{n}^{b}\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} \end{aligned} \quad (۴۶)$$

مقادیر بایاس محاسبه شده به عنوان مقادیر ورودی در فیلتر رابطه (۴۵) قرار خواهند گرفت که در آن $\mathbf{U}(t)=\left[\tilde{\mathbf{b}}_{a}^{b}\quad\tilde{\mathbf{b}}_{g}^{b}\right]^T$ می‌باشد. در واقع، در این روش پارامترهای بایاس شتاب‌سنج‌ها و ژیروسکوپ‌ها به عنوان ورودی سیستم فرض می‌شوند. با دریافت هر اندازه‌گیری در معادلات فضای حالت رابطه (۴۵)، خطای سرعت و وضعیت با استفاده از EKF، تخمین زده‌شده و سپس خطاهای ماتریس‌های وضعیت و سرعت جبران‌سازی می‌شود. سپس مقادیر بایاس حسگرها از لحظه صفر تا لحظه کنونی (k)، به صورت $\hat{\mathbf{b}}_{a}^{b}$ و $\hat{\mathbf{b}}_{g}^{b}$ و با استفاده از رابطه ذیل محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbf{b}}_{a}^{b}(k)=\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(\tilde{\mathbf{f}}_{ib}^{b}(i)-\hat{\mathbf{C}}_{n}^{b}\mathbf{g}_{l}^{n}(i)\right)}{k} \\ &\hat{\mathbf{b}}_{g}^{b}(k)=\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^{b}(i)-\hat{\mathbf{C}}_{n}^{b}\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}(i)\right)}{k} \end{aligned} \quad (۴۷)$$

بر این اساس، تمام مقادیر بایاس‌ها با دقت و سرعت مناسبی تخمین زده می‌شوند.

۳-۵-۱. ماتریس مشاهده‌پذیری

با توجه به گسسته‌سازی معادلات انتشار خطای ناوبری ارائه شده در هر دو دسته معادلات فضای حالت EKF و روش پیشنهادی، ماتریس مشاهده پذیری مدل گسسته به صورت زیر خواهد شد.

$$\mathbf{O}_{d,k}=\begin{pmatrix}\mathbf{H}_k\\ \mathbf{H}_k\mathbf{F}_{k-1}\\ \vdots\\ \mathbf{H}_k\mathbf{F}_{k-1}^{\,n-1}\end{pmatrix}, \qquad (۴۸)$$

با جایگذاری ماتریس‌های $\mathbf{F}_{k-1}$ و $\mathbf{H}_k$ گسسته‌سازی شده رابطه (۳۶) در رابطه (۴۸)، رتبه ماتریس مشاهده‌پذیری سیستم ناوبری برای معادلات فضای حالت EKF برابر با ۱۵ و به صورت کامل از مرتبه ستونی خواهد شد. همچنین با جایگذاری ماتریس‌های $\mathbf{F}_{k-1}$ و $\mathbf{H}_k$ گسسته‌سازی شده رابطه (۴۵) در رابطه (۴۸)، رتبه ماتریس مشاهده‌پذیری سیستم برای معادلات فضای حالت روش پیشنهادی برابر با ۶ و کامل از مرتبه ستونی خواهد شد.

$$rank(\mathbf{O}_{d,k})=\begin{cases}15, & EKF\\ 6 & Porposed\ Method\end{cases} \qquad (۴۹)$$

۴. شبیه‌سازی

در جدول ۲ ورودی‌های شبیه‌سازی برای یک سناریوی خاص جهت‌گیری SINS ارائه شده است.

جدول ۲. ورودی بلوک شبیه‌ساز همراستاسازی انتقالی

مقداردهی اولیه	
مشخصات	**مقادیر**
عرض جغرافیایی	36.5°
طول جغرافیایی	59.5°
ارتفاع	$1120\ m$
زمان همراستاسازی اولیه	$30\ \ s$
زمان همراستاسازی انتقالی	$300\ \ s$

زوایای وضعیت و سمت حامل	$\psi_{nb}=0^\circ$ $\theta_{nb}=0^\circ$ $\phi_{nb}=0^\circ$
حسگرهای ژیروسکوپ	
مشخصات	**مقادیر**
مجموع بایاس اجرا به اجرا و باقیمانده از مرحله کالیبراسیون	$b^b_{g_0,x}=0.5\ \ ^\circ/h$ $b^b_{g_0,y}=-0.3\ \ ^\circ/h$ $b^b_{g_0,z}=0.6\ \ ^\circ/h$
چگالی نویز (1σ)	$0.5\ \ ^\circ/h$
قدم تصادفی زاویه‌ای (سه محور)	$N=0.1^\circ/\sqrt{h}$
پهنای باند	$60\ \ Hz$
ناپایداری بایاس (سه محور)	$B=0.05\ \ ^\circ/h$
قدم تصادفی نرخی (سه محور)	$K=0.0005\ \ ^\circ/h^{3/2}$
حسگرهای شتاب‌سنج	
مشخصات	**مقادیر**
مجموع بایاس اجرا به اجرا و باقیمانده از مرحله کالیبراسیون	$b^b_{a_0,x}=250\ \ \mu g$ $b^b_{a_0,y}=-200\ \ \mu g$ $b^b_{a_0,z}=-250\ \ \mu g$
چگالی نویز (1σ)	$700\ \ \mu g$
قدم تصادفی زاویه‌ای (سه محور)	$N=0.5\ \ m/s/\sqrt{h}$
پهنای باند	$60\ \ Hz$
ناپایداری بایاس (سه محور)	$B=500\ \ \mu g$
قدم تصادفی نرخی (سه محور)	$K=0.005\ \ m/s/h^{3/2}$

با توجه به مشخصات نویزی حسگرهای درجه هوایی مقداردهی اولیه حالت‌های EKF و همچنین ماتریس کوواریانس اولیه و کوواریانس نویز به صورت زیر می‌باشد.

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|0}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{1\times6}\\ \text{coarse alingment output}_{1\times3}\\ \mathbf{0}_{1\times6}\end{bmatrix} \qquad (۵۰)$$

$$\mathbf{P}_{0|0}=diag\begin{pmatrix}(10m)^2\times\text{ones}_{1\times3}\\ (0.1m/s)^2\times\text{ones}_{1\times3}\\ (1^\circ)^2\times\text{ones}_{1\times3}\\ (300\mu g)^2\times\text{ones}_{1\times3}\\ (1^\circ/h)^2\times\text{ones}_{1\times3}\end{pmatrix} \qquad (۵۱)$$

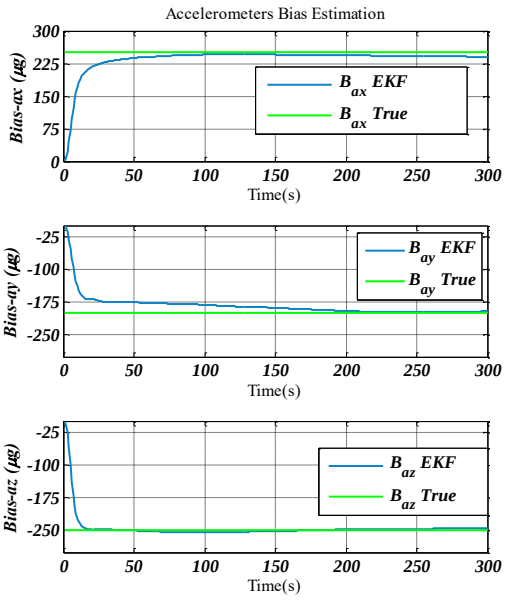
$$\mathbf{Q}\approx\begin{pmatrix}\mathbf{0}_3&\mathbf{0}_3&\mathbf{0}_3&\mathbf{0}_3&\mathbf{0}_3\\ \mathbf{0}_3&S_{ra}\mathbf{I}_3&\mathbf{0}_3&\mathbf{0}_3&\mathbf{0}_3\\ \mathbf{0}_3&\mathbf{0}_3&S_{rg}\mathbf{I}_3&\mathbf{0}_3&\mathbf{0}_3\\ \mathbf{0}_3&\mathbf{0}_3&\mathbf{0}_3&S_{bad}\mathbf{I}_3&\mathbf{0}_3\\ \mathbf{0}_3&\mathbf{0}_3&\mathbf{0}_3&\mathbf{0}_3&S_{bgd}\mathbf{I}_3\end{pmatrix}\tau_s \qquad (۵۲)$$

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}(0.01m/s)^2\mathbf{I}_3 & (\deg 2rad(0.1^\circ))^2\mathbf{I}_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

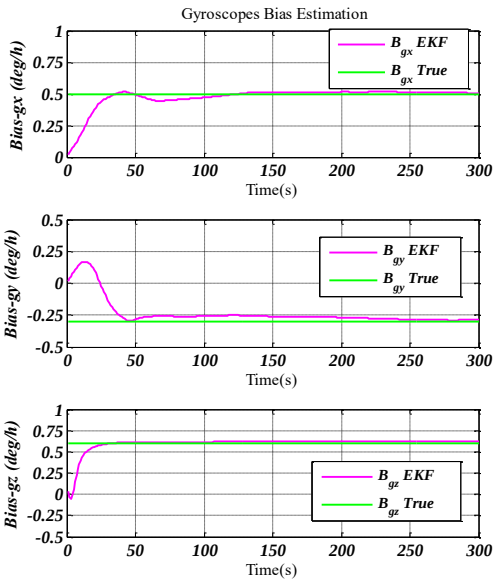
که در آن S_{ra}، S_{rg}، S_{bad} و S_{bgd} مقادیر چگالی طیف توان (PSD) به ترتیب نویز تصادفی شتاب‌سنج و ژیروسکوپ، تغییرات بایاس شتاب‌سنج و ژیروسکوپ می‌باشد. این مقادیر معمولاً از اطلاعات مندرج در مشخصات فنی حسگرهای اینرسی و یا آزمون های آزمایشگاهی از قبیل نتایج آلان واریانس تعیین می شوند. مقدار طول بازوی اهرمی در این سناریو نیز به صورت $\mathbf{l}_{rb}^{b}=[10 \quad 2 \quad 4]^{T}$ بر حسب متر در نظر گرفته شده است.

۵. نتایج

درصورتی که مؤلفه های سرعت، زوایای وضعیت و سمت حامل به‌عنوان مشاهدات معادلات اندازه گیری در دسترس باشند، در این صورت کلیه مقادیر بایاس‌های شتاب‌سنج‌ها و ژیروسکوپ‌ها مشاهده‌پذیر بوده و قابل تخمین می‌باشند. در شکل-۴ و شکل-۵ نتایج همراستاسازی انتقالی ایستا به ترتیب برای تخمین بایاس شتاب سنج ها و ژیروسکوپ ها با استفاده از EKF نشان داده شده است.

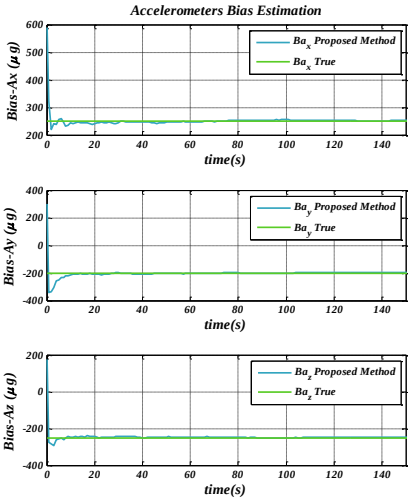


شکل ٤. تخمین بایاس شتاب‌سنج‌ها – فیلتر EKF

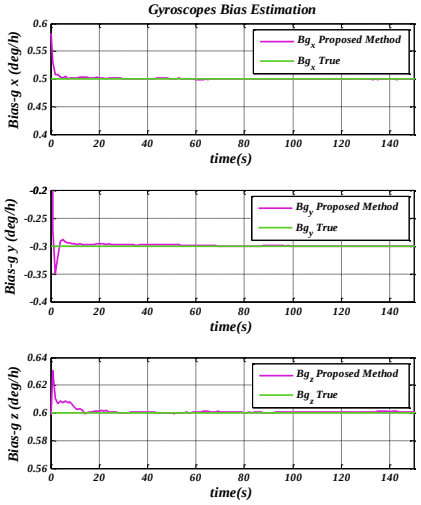


شکل ۵. تخمین بایاس ژیروسکوپ‌ها – فیلتر EKF

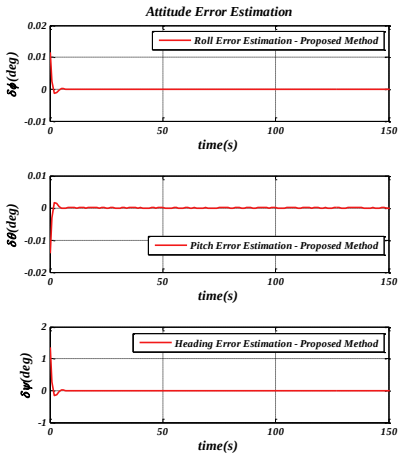
در ادامه، نتایج همراستاسازی انتقالی ایستا با روش پیشنهادی ارائه شده است. سرعت و دقت همگرایی مقادیر تخمین زده شده در شکل‌ها نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد در روش پیشنهادی، در ۱۰ ثانیه اول فرایند همراستاسازی مقادیر تخمین زده شده در باند انحراف استاندارد (۳ سیگما) قرار می‌گیرند و در مقایسه با روش EKF سرعت همگرایی بهتری از خود به نمایش می‌گذارند. همچنین نتایج شبیه‌سازی‌ها حاکی از آن است که روش پیشنهادی، دقت کافی برای کاربرد را دارا می‌باشد. در شکل ۶ و ۷ به ترتیب نحوه همگرایی و تخمین بایاس حسگرهای شتاب‌سنج و ژیروسکوپ در فرایند همراستاسازی انتقالی ایستا با استفاده روش پیشنهادی ارائه شده است. همچنین میزان خطای تخمین زوایای وضعیت و سمت پرنده نیز در شکل ۸ نمایش داده شده است.



شکل ۶. تخمین بایاس شتاب‌سنج‌ها – روش پیشنهادی

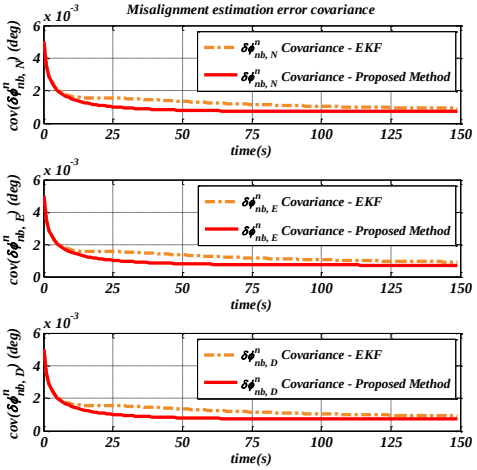


شکل ۷. تخمین بایاس ژیروسکوپ‌ها – روش پیشنهادی



شکل ۸. خطای تخمین زوایای وضعیت و سمت پرنده در روش پیشنهادی

در شکل ۹ نیز، مقایسه کوواریانس تخمین بردار ناهمراستایی وضعیت در روش پیشنهادی و EKF نشان داده شده است.



شکل ۹. مقایسه کوواریانس تخمین بردار ناهمراستایی وضعیت در روش پیشنهادی و EKF

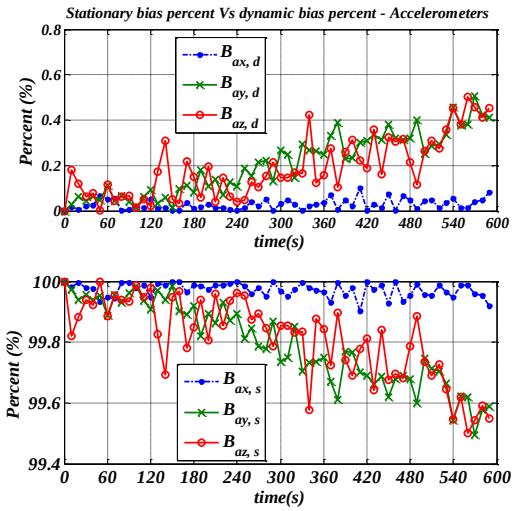
در جدول ۳، همگرایی و تخمین بایاس حسگرهای شتاب‌سنج و ژیروسکوپ در دو الگوریتم EKF و روش پیشنهادی مقایسه شده است. در این جدول، پارامترهای میانگین، انحراف استاندارد و زمان همگرایی برای داده‌های حاصل از خطای تخمین (تفاضل مقادیر واقعی بایاس و مقادیر تخمین زده شده) ارائه شده است.

جدول ۳. بررسی سرعت و دقت همگرایی فیلتر پیشنهادی در مقایسه با EKF

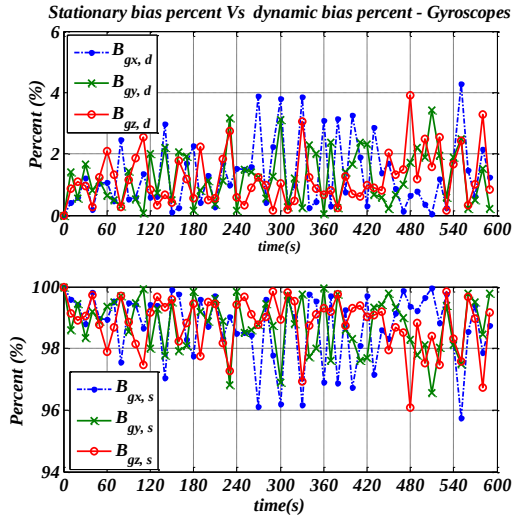
ژیروسکوپ‌ها			
پارامتر		EKF	روش پیشنهادی
میانگین	x-axis	$0.0230\ ^\circ/hr$	$0.0004\ ^\circ/hr$
	y-axis	$-0.0660\ ^\circ/hr$	$0.0012\ ^\circ/hr$
	z-axis	$0.0020\ ^\circ/hr$	$0.0011\ ^\circ/hr$
انحراف استاندارد (1σ)	x-axis	$0.085\ ^\circ/hr$	$0.005\ ^\circ/hr$
	y-axis	$0.107\ ^\circ/hr$	$0.020\ ^\circ/hr$
	z-axis	$0.093\ ^\circ/hr$	$0.002\ ^\circ/hr$
زمان همگرایی (<0.05 deg/hr)	x-axis	73 s	4 s
	y-axis	39 s	4 s
	z-axis	20 s	10 s

شتاب‌سنج‌ها			
پارامتر		EKF	روش پیشنهادی
میانگین	x-axis	14.5 μg	2.7 μg
	y-axis	–16.7 μg	–0.4 μg
	z-axis	–5.4 μg	2.1 μg
انحراف استاندارد (1σ)	x-axis	31.6 μg	20.4 μg
	y-axis	25.5 μg	32 μg
	z-axis	25.5 μg	24.9 μg
زمان همگرایی (< 25 μg)	x-axis	27 s	4 s
	y-axis	49 s	8 s
	z-axis	11 s	4 s

همچنین در ادامه در شکل ۱۰ و شکل ۱۱، درصد سهم خطای بایاس ایستا و پویای شتاب‌سنج و ژیروسکوپ رده هوایی شبیه‌سازی شده از مجموع کل بایاس‌ها و در طول ۶۰۰ ثانیه اول راه اندازی IMU ارائه شده است. این نمودارها سهم بایاس ایستا و پویا را از مجموع خطاهای کلی موجود در حسگر، پس از اتمام زمان گرم شدن (پایان زمان Warm up) نشان می‌دهد. مجموع خطاهای کلی موجود در حسگر شامل خطاهای باقیمانده از مرحله کالیبراسیون، بایاس اجرا به اجرا، بایاس حین اجرا و میانگین نویز سفید حسگر می‌باشد. همانگونه که در این نمودارها دیده می‌شود سهم خطای پویا در ۱۰ دقیقه ابتدایی روشن شدن حسگرها (پس از سپری شدن زمان Warm up) کمتر از ۵ درصد می‌باشد که این مقدار برای ۶۰ ثانیه ابتدایی حدود ۲ درصد خواهد بود.



شکل ۱۰. سهم بایاس ایستا و پویای بلوک شتاب‌سنج شبیه‌سازی شده از مجموع کل خطا - ۶۰۰ ثانیه اول راه اندازی حسگر

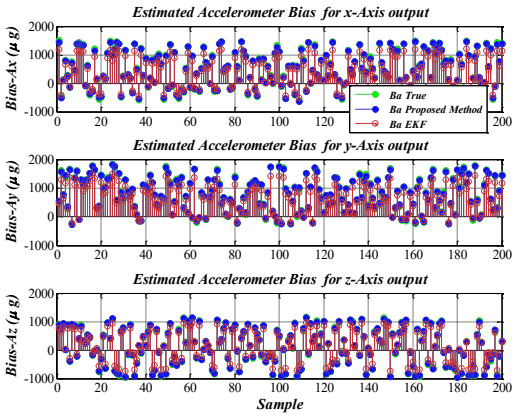


شکل ۱۱. سهم بایاس ایستا و پویای بلوک ژیروسکوپ شبیه‌سازی شده از مجموع کل خطا - ۶۰۰ ثانیه اول راه‌اندازی حسگر

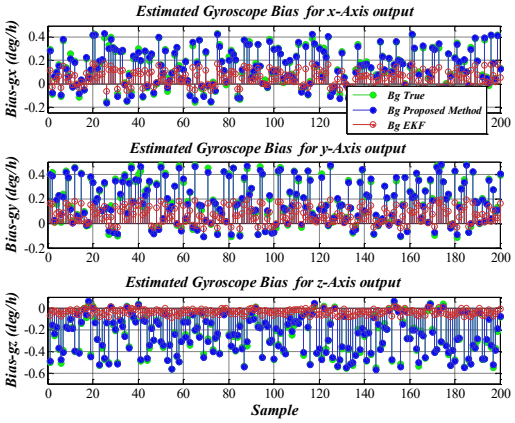
۵-۱. تحلیل مونت کارلو

در انتها برای اعتبارسنجی نتایج، یک تحلیل مونت‌کارلو نیز انجام شده است. در این تحلیل، ۲۰۰ مرتبه اجرای برنامه در شرایط اولیه تصادفی، تحت زوایای سمت و وضعیت دلخواه و بایاس های تصادفی برای یک IMU رده هوایی انجام شد. برای اعتبارسنجی بهتر نتایج و مقایسه رفتار سرعت و دقت الگوریتم پیشنهادی، داده‌های

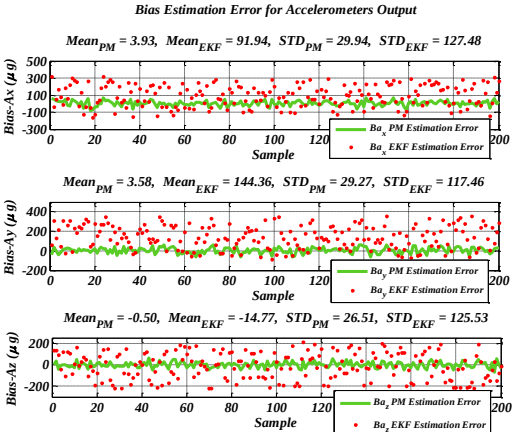
مربوط به ثانیه ۵ شبیه‌سازی انتخاب و در ۲۰۰ اجرای مختلف با هم مقایسه شده‌اند. در این تحلیل، تنظیمات اولیه بلوک شبیه‌ساز IMU مشابه سناریوی جدول ۲ انجام شد. همچنین بازوی اهرمی نیز در این تحلیل به صورت $\mathbf{l}_{rb}^{b}=[10 \quad 2 \quad 4]^{T}$ در نظر گرفته شد. در شکل ۱۲ نتایج اجرای مونت‌کارلو برای بایاس حسگرهای شتاب‌سنج و در شکل ۱۳ نتایج تخمین بایاس حسگرهای ژیروسکوپ نمایش داده شده است. در این شکل‌ها مقدار بایاس واقعی حسگرها در کنار بایاس‌های تخمین زده شده EKF و روش پیشنهادی نمایش داده شده است. دایره‌های توپر، مقادیر بایاس واقعی و مقادیر بایاس تخمینی با روش پیشنهادی هستند که اغلب بر هم منطبق شده‌اند. نتایج نشان می‌دهد مقادیر بایاس تخمین زده شده با استفاده از روش پیشنهادی بسیار به مقادیر واقعی نزدیک هستند.



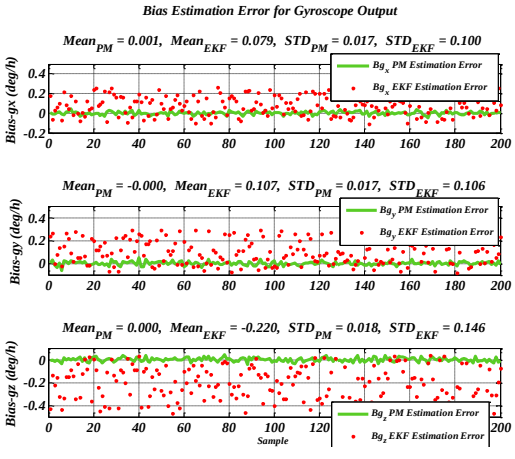
شکل ۱۲. تخمین بایاس حسگرهای شتاب‌سنج در ۲۰۰ اجرای مونت‌کارلو



شکل ۱۳. تخمین بایاس حسگرهای ژیروسکوپ در ۲۰۰ اجرای مونت‌کارلو



شکل ۱۴. خطای تخمین بایاس حسگرهای شتاب‌سنج در ۲۰۰ اجرای مونت‌کارلو



شکل ۱۵. خطای تخمین بایاس حسگرهای ژیروسکوپ در ۲۰۰ اجرای مونت‌کارلو

در شکل ۱۴ و شکل ۱۵، خطای تخمین مقادیر بایاس حسگرهای شتاب‌سنج و ژیروسکوپ در این اجرای مونت‌کارلو نمایش داده شده است. این شکل‌ها در واقع اختلاف مقادیر بایاس تخمین زد شده از مقادیر واقعی در شکل ۱۲ و شکل ۱۳ هستند. در بالای هر زیرشکل از شکل‌های ۱۴ و ۱۵ مقادیر میانگین و STD خطای تخمین بایاس حسگر مربوطه نشان داده شده است. همچنین در جدول ۴ خلاصه نتایج این اجرای مونت‌کارلو آورده شده است. نتایج این جدول نیز بر اساس ثانیه ۵ شبیه سازی ارائه شده است.

جدول ٤. نتایج تخمین بایاس حسگرها در ۲۰۰ اجرای مونت‌کارلو و در ثانیه ۵ شبیه سازی

شتاب‌سنج‌ها			
روش پیشنهادی	EKF	پارامتر	
$71.59\mu g$	$318.62\mu g$	x-axis	بیشینه
$63.70\mu g$	$355.00\mu g$	y-axis	
$60.00\mu g$	$208.24\mu g$	z-axis	
$-78.39\mu g$	$-161.1\mu g$	x-axis	کمینه
$-66.68\mu g$	$-84.95\mu g$	y-axis	
$-67.73\mu g$	$-244.94\mu g$	z-axis	
$29.94\mu g$	$127.48\mu g$	x-axis	انحراف استاندارد (1σ)
$29.27\mu g$	$117.46\mu g$	y-axis	
$26.52\mu g$	$125.53\mu g$	z-axis	
$3.93\mu g$	$91.94\mu g$	x-axis	میانگین
$3.58\mu g$	$144.36\mu g$	y-axis	
$-0.50\mu g$	$-14.77\mu g$	z-axis	
ژیروسکوپ‌ها			
روش پیشنهادی	EKF	پارامتر	
$0.045\,^\circ/hr$	$0.262\,^\circ/hr$	x-axis	بیشینه
$0.048\,^\circ/hr$	$0.291\,^\circ/hr$	y-axis	
$0.041\,^\circ/hr$	$0.034\,^\circ/hr$	z-axis	
$-0.049\,^\circ/hr$	$-0.108\,^\circ/hr$	x-axis	کمینه
$-0.063\,^\circ/hr$	$-0.082\,^\circ/hr$	y-axis	
$-0.041\,^\circ/hr$	$-0.473\,^\circ/hr$	z-axis	
$0.017\,^\circ/hr$	$0.100\,^\circ/hr$	x-axis	انحراف استاندارد (1σ)
$0.017\,^\circ/hr$	$0.106\,^\circ/hr$	y-axis	
$0.017\,^\circ/hr$	$0.146\,^\circ/hr$	z-axis	
$0.001\,^\circ/hr$	$0.079\,^\circ/hr$	x-axis	میانگین
$0.000\,^\circ/hr$	$0.107\,^\circ/hr$	y-axis	
$0.000\,^\circ/hr$	$-0.220\,^\circ/hr$	z-axis	

۶. نتیجه‌گیری و پیشنهاد

در این مقاله یک روش برای بهبود دقت و سرعت همگرایی همراستاسازی انتقالی یک SINS در حالت ایستا ارائه شده است. در این روش، معادلات فضای حالت همراستاسازی نرم SINS ایستا، به دو بخش خطاهای سرعت و وضعیت و بخش بایاس حسگرهای اینرسی تقسیم می‌شوند. با استفاده از یک روش تحلیلی معادلات بخش اول محاسبه می‌شوند و پس از تلفیق با فیلتر، بخش دوم معادلات فضای حالت محاسبه خواهند شد. نتایج حاکی از آن است که الگوریتم پیشنهادی با علم به ایستایی مسئله و فرض ساکن بودن بلوک IMU می‌تواند در مقایسه با روش‌های متداول و EKF، سرعت همگرایی بهتر و دقت کافی را برای کاربرد از خود نشان دهد. نتایج نشان می‌دهد، پارامتر خطای تخمین در کمتر از ۱۰ ثانیه از آغاز فرایند همراستاسازی انتقالی در محدوده انحراف استاندارد (یک سیگما) خطا قرار می‌گیرد که این مقدار در روش EKF به میزان ۵۰ تا ۶۰ ثانیه زمان صرف خواهد شد. نتایج همراستاسازی با استفاده از یک تحلیل مونت‌کارلو به ازای ۲۰۰ آزمایش همراستاسازی اولیه اعتبارسنجی شده است. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد در مسئله همراستاسازی پیش از پرواز یک پرنده با حسگرهای اینرسی رده متوسط یا هوایی که عمدتاً در زمان‌های اولیه راه اندازی پرنده صورت می‌پذیرد، بایاس‌های پویای سیستم از قبیل بایاس حین اجرا (که به صورت گاوس مارکوف مرتبه اول مدل‌سازی می‌شوند)، سهم کمی در خطای کلی بلوک حسگر پرنده خواهند داشت و عمده سهم خطا در این محدوده زمانی تنها به واسطه بایاس‌های اجرا به اجرا و خطاهای ثابت و دمایی به جا مانده از مرحله کالیبراسیون خواهد بود. در مجموع در کاربردهای عملی، استفاده از این روش می‌تواند، سرعت عملیاتی شدن یک SINS را بالا ببرد. در راستای ادامه این پژوهش پیشنهاد می‌شود در خصوص همراستاسازی انتقالی ایستا با وجود ارتعاشات و تکان‌های ناشی از دیزل حامل (اثرات فرکانس بالا) و نیز اثر باد و تکان‌های لحظه‌ای بر حامل (اثرات فرکانس پایین) در حضور بازوهای اهرمی متفاوت بررسی و پژوهش به عمل آید.

۷. فهرست علائم

دستگاه مختصات شتاب‌سنج	a
قدم تصادفی شتاب	ACRW
انحراف استاندارد آلن	ASD
دستگاه مختصات بدنی	b
ماتریس کسینوس هادی	DCM
دستگاه مختصات زمین مرکزی	e
چارچوب زمین مرکزی-زمین ثابت	ECEF
چارچوب اینرسی زمین مرکزی	ECI
فیلتر کالمن توسعه‌یافته	EKF
دستگاه مختصات ژیروسکوپ	g
سامانه موقعیت‌یاب ماهواره‌ای جهانی	GNSS
دستگاه مختصات اینرسی	i
سامانه ناوبری اینرسی	INS
واحد اندازه‌گیری اینرسی	IMU
فیلتر کالمن	KF
ناوبری محلی	LN
جهت‌گیری شمال، شرق و پایین	NED
دستگاه مختصات ناوبری محلی	n
چگالی طیفی توان	PSD
قدم تصادفی نرخی	RRW
سامانه ناوبری اینرسی متصل به بدنه	SINS
انحراف استاندارد	STD
قدم تصادفی سرعت	VRW
زاویه چرخ (رول)	ϕ_{nb}
زاویه فراز (پیچ)	θ_{nb}
زاویه سمت	ψ_{nb}

۸. منابع

[1] C. Jekeli, Inertial navigation systems with geodetic applications, Berlin, Germany: de Gruyter, 2000.

[2] P. Benet and A. Guinamard, "Gyrocompassing: from gravity rotation analysis to inertial trajectory fitting," Institute of Navigation, Vol. 21, pp. 19– 28, December 2025.

[3] M. Massoumin, Fundamental of high accuracy inertial navigation, Golsanj, 2018 (in Persian).

[4] P. G. Savage, Strapdown analytics parts 1 and 2, Maple Plain, MN: Strapdown Associates, 2000.

[5] R. M. Rogers, Applied mathematics in integrated navigation system, 2nd ed., US: AIAA Inc, 2003.

[6] H. Kim, J. H. Son, S. A. Heon and D. H. Hwang, "Note on coarse alignment of gyro-free inertial navigation system," Sensors 23, 5763, 2023.

[7] D. H. Titterton and J. L. Weston, Strapdown inertial navigation technology, 2nd ed., UK: IEE, 2004.

[8] S. A. Zahiripour, "Physical initial flight alignment for stabilized platform inertial navigation system using state feedback," Journal of Space Science and Technology, Vol. 17, No. 1, pp. 1-10, 2024.

[9] P. D Groves, "Navigation using inertial sensors," Tutorial submission to IEEE, IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine 30(2):42-69, Feb 2015.

[10] Zh. Lu, Y. Qu and Sh. Qiao, Geodesy, Introduction to geodetic datum and geodetic systems, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.

[11] H. Rahimi, A. A. Nikkhah and K. Hooshmandi, "A fast alignment of marine strapdown inertial navigation system based on adaptive unscented Kalman Filter," Transactions of the Institute of Measurement and Control, p 1-10, 2020.

[12] H. Y. Liu, S. Tsai, M. L. Tsai and K. W Chiang, "An initial alignment method of Inertial navigation system for the static state," The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, volume XLIII-B1, 2022.

[13] P. G. Savage, "Blazing gyros: the evolution of strapdown inertial navigation technology for aircraft," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 35, pp. 637-655, 2013.

[14] H. Huang, J. Wei, D. Wang, L. Zhang, and B Wang, "In-motion initial alignment method based on vector observation and truncated vectorized *K*-matrix for SINS," IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2022.

[15] M. S. Grewal, A. P. Andrews, and C. G. Bartone, Global navigation satellite systems, inertial navigation, and integration. John Wiley & Sons, 2020.

[16] R. Zhang, F. Hoflinger, and L. M. Reind, "Calibration of an IMU using 3-D rotation platform," IEEE Sens. J., vol. 14, no. 6, pp. 1778–1787, 2014.

[17] S. J. Angello, E. C. Barnes and F. K. Becker, "Crossbow, IEEE standard specification format guide and test procedure for single-axis interferometric fiber optic gyros," vol. Document N. 2006.

[18] J. A. Farrell, F. O. Silva, F. Rahman, and J. Wendel, "IMU error modeling tutorial," 2021.

[19] M. J. Rajabi, S. M. Dehghan and S. Mohammad-Hosseini, "Improving inertial navigation system alignment using a

proportional-integral left-invariant extended kalman filter: a robust approach against inertial sensors errors," Scientica Iranica, 2025.
[20] H. Hou, Modeling inertial sensors errors using Allan variance. Citeseer, 2004.
[21] P. G. Savage, "A unified mathematical framework for strapdown algorithm design," Journal of Guidance, Control And Dynamic Vol. 29, No. 2, 2006.
[22] H. Rahimi and A. A. Nikkhah, "Improving the speed of initial alignment for marine strapdown inertial navigation systems using heading control signal feedback in extended kalman filter," International Journal of Advanced Robotic Systems, p 1-11, 2020.
[23] H. Huang and J. Wei, "In-motion coarse alignment method based on position loci and optimal-REQUEST for SINS," Appl. Sci, 2022.
[24] H. Jameian, B. Safarinejadian and M. Shasadeghi, "A robust and fast self-alignment method for strapdown inertial navigation system in rough sea conditions," Elsevier Measurment, Ocean Eng. 187, 2019.
[25] Y. Bar-Shalom, X. R. Li, T. Kirubarajan, "Estimation with applications to tracking and navigation: theory algorithms and software". Wiley (July), Hoboken, New Jersey, USA, 2001.