

تحلیل دینامیکی یک سیستم روتور- دیسک دارای نابالانسی با وجود دمپینگ داخلی بر روی بستر ویسکوالاستیک

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۹/۲۲

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۵/۳۱

محمود رئیس‌زاده کوشکقاضی^۱، مجید بختیاری^۲، کامران دانشجو^۳، علی ترکاشوند^۴

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

۲- استادیار، مهندسی فضایی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

۳- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، kjo@iust.ac.ir

۴- دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

چکیده

در این مقاله، هدف بررسی پاسخ فرکانسی یک سیستم روتور-دیسک تحت دوران با وجود نابالانسی است. سیستم‌های دوار، یکی از اصلی‌ترین بخش‌ها در ماشین‌های مکانیکی می‌باشند. ترکیب روتور-دیسک‌ها به عنوان بخشی از موتورها و پیش‌رانه‌های هواپیماها و هلیکوپترها عمل می‌کنند. از آنجائیکه این سیستم‌ها با سرعت بالا گردش می‌کنند، کوچکترین نابالانسی بر عملکرد آن‌ها تاثیرگذار می‌باشد. لذا اینجا ارتعاشات اجباری یک سیستم روتور-دیسک و یاتاقان با وجود دمپینگ داخلی مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. به منظور ایجاد ارتعاشات اجباری از یک نابالانسی جرمی بر روی دیسک استفاده شده است. محور اصلی از چهار محور کوچکتر با مقاطع مختلف تشکیل شده است. یاتاقان‌های با بستر ویسکوالاستیک مدل شده‌اند. از تئوری تیر تیموشنکو برای استخراج معادلات حرکت استفاده شده است. اثرات دمپینگ داخلی، اثرات ژيروسکوپیک، سختی یاتاقان، ضریب افت بستر ویسکوالاستیک و... بر روی ارتعاشات سیستم مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. نشان داده شده است که افزایش سختی یاتاقان و دمپینگ داخلی باعث کاهش دامنه جابجایی سیستم می‌شود.

واژه‌های کلیدی: سیستم‌های دوار، بستر ویسکوالاستیک، روتور-دیسک، تئوری تیر تیموشنکو، نابالانسی جرمی.

Dynamic analysis of a rotor-disk system with unbalance and internal damping on a viscoelastic foundation

Mahmood Raeiszadeh Kooshkghazi¹, Majid Bakhtiari², Kamran Daneshjou³, Ali Tarkashvand⁴

1- M.Sc. Student, Mechanical Engineering Department, Iran University of Science & Technology, Tehran.

2- Assistant Professor, School of Advanced Technologies, Iran University of Science & Technology, Tehran.

3- Professor, Mechanical Engineering Department, Iran University of Science & Technology, Tehran, kjo@iust.ac.ir.

4- Ph. D, School of Mechanical engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran.

Abstract

In this paper, the aim is to investigate the frequency response of a rotor-disk system under rotation in the presence of unbalance. Rotating systems are among the most essential components in mechanical machinery and are widely used in most mechanical systems. Rotor-disk assemblies serve as key parts of engines and propulsion systems in aircraft and helicopters. Since these systems operate at high speeds, even the slightest imbalance can affect their performance. Therefore, forced vibrations of a rotor-disk-bearing system in the presence of internal damping are analyzed here. A mass imbalance is introduced on the disk to generate forced vibrations. The main shaft is composed of four smaller shafts with different cross-sections. Bearings are modeled using a viscoelastic foundation. The Timoshenko beam theory is employed to derive the equations of motion. The effects of internal damping, gyroscopic effects, bearing stiffness, loss factor of the viscoelastic foundation, and other parameters on the system's vibrations are investigated. It is shown that increasing both bearing stiffness and internal damping reduces the displacement amplitude of the system.

Keywords: Rotary systems, Viscoelastic foundation, Rotor-disk, Timoshenko's beam theory, Mass unbalance.

۵۳

سال ۱۵ - شماره ۱

بهار و تابستان ۱۴۰۵

نشریه علمی

دانش و فناوری هوا فضا



۱. مقدمه

سیستم‌های دوار، یکی از اصلی‌ترین بخش‌های ماشین‌های مکانیکی می‌باشند و در اکثر سیستم‌های مکانیکی کاربرد دارند. از سیستم‌های رفت و برگشتی در علم مکانیک به عنوان خشک و از سیستم‌های دوار به عنوان سیستم‌های نرم یاد می‌کنند. علت این نام‌گذاری بد رفتار بودن سیستم‌های رفت و برگشتی در برابر مساله خستگی و خوش رفتار بودن سیستم‌های دوار در برابر این مساله می‌باشد. از عوامل تاثیر گذار در کاهش عمر سیستم در مواجهه با مساله خستگی در ماشین‌های دوار، وجود نابالانسی در سیستم است بنابراین رفع نقیصه‌هایی که منتج به ایجاد نابالانسی می‌شوند از اهمیت شایان ذکر برخوردار می‌باشند. همچنین اگر در ارتعاشات یک سیستم فرکانس ارتعاشاتی ناخواسته‌ای آن به فرکانس ارتعاشات طبیعی این سیستم نزدیک شود می‌تواند ایجاد تشدید یا رزونانس کند که منجر به حرکت هم‌زمان سیستم به صورت دوار و جابجایی شود و در نهایت منجر به خرابی کل سیستم شود. از علت‌هایی که در سیستم‌های دوار ایجاد نابالانسی و ارتعاشات ناخواسته می‌کند می‌توان به خارج از مرکز بودن روتورها، خوردگی در پره‌ها، از بین رفتن یا خرابی در قطعات، افتادگی در قطعات، تغییر شکل‌هایی که از تغییرات دمایی حاصل می‌شوند و نابالانسی‌های پسماند در زمان تولید در کارخانه اشاره کرد.

از کاربردهای مبحث دینامیک محورها می‌توان به محوره‌های دوار، توربین‌ها، پمپ‌ها و تجهیزات مورد استفاده در صنایع هوافضا اشاره نمود. برای تیرهای بلند که نسبت ضخامت به طول کمی دارند مدل تیر اوپلر-برنولی دارای دقت مناسبی

می‌باشد. ولی برای تیرهای کوتاه این تئوری دقت لازم را ندارد زیرا در چنین تیرهایی اثرات تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی قابل صرف‌نظر نخواهند بود. با در نظر گرفتن این دو عامل مدل کامل‌تری به نام مدل تیر تیموشنکو معرفی شده است. نکته‌ی دیگری که باید به آن اشاره نمود این است که به دلیل تقریب‌های صورت گرفته مدل تیر اوپلر-برنولی قادر به مدلسازی اثر ژيروسکوپی در تیرهای دوار نمی‌باشد. در حالیکه این اثر در مدل تیر تیموشنکو به راحتی نمایان خواهد شد. افزایش پیوسته تقاضا در مورد عملکرد ماشین آلات با سرعت بالا منجر به علاقه قابل توجهی به استفاده از سیستم‌های روتور-شفت با طراحی خوب شده است. کنترل ارتعاش برای چنین سیستم‌های شافت چرخشی با سرعت بالا از اهمیت بالایی برخوردار است. یکی از ابزارهای کنترل و کاهش ارتعاشات در ماشین‌های دوار، استفاده از عناصر میرایی و الاستیک خارجی است. میرایی خارجی و الاستیسیته عمدتاً از طریق یاتاقان‌های انعطاف‌پذیر و تکیه‌گاه‌های بلبرینگ انعطاف‌پذیر تأمین می‌شوند. بلبرینگ‌های انعطاف‌پذیر می‌توانند الاستیک، کشسان چسبناک و ویسکوالاستیک باشند [۱-۴].

فرکانس‌های طبیعی، سرعت‌های بحرانی و شکل موده‌های محوره‌های دوار جنبه‌های مهمی در طراحی و تحلیل ارتعاشات اجباری محورها می‌باشند. گریبوس [۱] اثر تغییر شکل برشی را روی سرعت‌های بحرانی محورها بررسی نمود. چوی و همکاران [۵] معادلات حاکم بر ارتعاشات عرضی در دو صفحه و ارتعاشات پیچشی یک محور با ممان اینرسی نامشابه در دو صفحه تحت نیروی محوری فشاری را مورد بررسی قرار دادند. سرعت‌های بحرانی لنگزنی و شکل موده‌های محور

رایلی نامتقارن یکنواخت با دیسک‌های صلب و تکیه‌گاه‌های ایزوتروپیک توسط جی و لی [۶] بررسی شد. سینگ و جو [۷] ارتعاشات آزاد سیلندر استوانه‌ای کامپوزیتی را مورد بررسی قرار دادند. استورلا و آرجنتو [۸] روی ارتعاشات آزاد و اجباری محور رایلی ویسکوالاستیک متمرکز شدند. بر اساس تئوری‌های تیر و پوسته و در نظر گرفتن میرایی داخلی، ملانسون و زو [۹] ارتعاشات آزاد و پایداری محورها با شرایط مرزی عمومی را مورد بررسی قرار دادند. جون و کیم [۱۰] ارتعاشات خمشی محور تحت کوپل پیچشی ثابت را تحلیل کردند. آن‌ها محور را بر اساس تئوری تیر تیموشنکو مدل کردند و اثر ژيروسکوپی را در نظر گرفتند. تحلیل دینامیکی المان محدود سیستم محور-تکیه‌گاه توسط محی‌الدین و خولیف [۱۱] انجام گرفت. آن‌ها مدل الاستودینامیک حرکت جفت شده خمشی و پیچشی را با در نظر گرفتن اثر ژيروسکوپی برای محور دوار استخراج نمودند. تحلیل ارتعاشات محور کامپوزیتی گوه‌ای شکل توسط کیم و همکاران [۱۲] ارائه شد. کاروندپیران و زو [۱۳] بر روی تحلیل ارتعاشات محور با تکیه‌گاه‌های ارتجاعی متمرکز شدند. تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری سیستم محور-دیسک واقع شده روی تکیه‌گاه‌های الاستیک توسط شبانه و زو [۱۴] انجام گرفت.

لین [۱۵] از روش ماتریس انتقال برای حل مستقیم و معکوس یک تیر با تکیه‌گاه ساده دارای ترک باز استفاده نمود. او ترک را با فنر پیچشی مدل کرده، با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو و اعمال شرایط پیوستگی، معادله‌ی مشخصه را به‌طور صریح بدست آورد. این معادله مشخصه تابعی از فرکانس‌های طبیعی، محل و عمق ترک

است. لین با حل معادله مشخصه محل ترک و نرمی محلی را تعیین نموده و اندازه ترک را از رابطه بین نرمی محلی با اندازه ترک بدست آورد. سخار [۱۶] خصوصیات ارتعاشی شفت ترک دار با دو ترک باز را بررسی نمود. وی به منظور تحلیل ارتعاشات خمشی شفت از روش اجزا محدود استفاده کرد و تاثیر یک ترک روی ترک دیگر را برای فرکانس‌های ویژه، مد شیپ‌ها و محدوده‌های سرعت بحرانی نشان داد. بعد وانگ و تسای [۱۷] شفت دواری را مورد بررسی قرار دادند که دارای چندین ترک بود. آن‌ها در مقاله خویش ترک‌ها را در مد اول و تحت زوایای گوناگون نسبت به یکدیگر در نظر گرفتند و مد شیپ‌های متناظر با شفت ترک دار و بدون ترک را ترسیم نمودند. سپس از تفاضل این دو شکل مد که به ازای فرکانس طبیعی اول به دست آمده بود، توانستند موقعیت ترک‌های موجود در سیستم شفت دوار را بیابند.

لی و همکاران [۱۸] یک راه حل سری دقیق به منظور تجزیه و تحلیل ارتعاش آزاد تیر تیموشنکو شیب دار که در حال چرخش است، توسعه دادند. اثرات تغییر شکل کششی و نیروی کوریولیس بر فرکانس‌های طبیعی مورد بحث قرار گرفت. پس از آن، یک مطالعه جامع در مورد ارتعاش اجباری و برخی دیگر از پارامترهای رفتار دینامیکی روی روتور دیسک انجام شد که دارای یک ترک عرضی در شفت بود [۱۹]. پس از این، برای تجزیه و تحلیل ارتعاشات پیچشی جانبی و جفت شده سیستم بلبرینگ روتور، یک ماتریس انتقال گسترده توسط هسیه و همکاران [۲۰] توسعه داده شد. اثرات نیرو و وزن نامتعادل بر رفتار ارتعاش مورد مطالعه قرار گرفت. حسینی و خادم [۲۱] از تکنیک مقیاس‌های چندگانه برای





تجزیه و تحلیل ارتعاشات شفت دوار با غیرخطی در اینرسی و انحنا استفاده کردند. نشان داده شد که تحلیل آشفتگی گسسته و مستقیم یکسان است. علاوه بر این، روش اجزای محدود برای تجزیه و تحلیل سیستم بلبرینگ روتور توسط شیانگ و همکاران [۲۲] استفاده شده است. در این بررسی نشان دادند که یک عنصر شفت مبتنی بر موجک ابزار مناسبی برای تحلیل این سیستم‌ها است. متعاقباً، هوانگ و همکاران [۲۳] تجزیه و تحلیلی برای ارتعاشات آزاد تیرهای دوار با تکنیک مبتنی بر محلول سری توانی در سرعت زاویه ای بالا انجام داد. نشان دادند که افزایش تعداد بخش‌ها باعث بهبود دقت راه حل می‌شود. در ادامه، رفتار دینامیکی روتورهای دوگانه مجهز به دو یاتاقان ژورنال تحت تعلیق غیر خطی مورد بررسی قرار گرفت [۲۴]. تحقیقی بر روی آنالیز دینامیکی یک شفت چرخان دنده‌ای با در نظر گرفتن ترک روی آن توسط هان و همکاران [۲۵] ارائه شد. سپس، جون [۲۶] از گشتاور خمشی و شیب اضافی در موقعیت ترک برای بررسی رفتار دینامیکی روتور ترک خورده استفاده کرد. روش اجزای محدود توسط وانگ و همکاران [۲۷] برای بررسی رفتار دینامیکی و مشخصات دقیق ارتعاش روتور با یک یاتاقان ژورنال در کمپرسور دوار استفاده شد. بعد، یک روش جدید به منظور تجزیه و تحلیل رفتار دینامیکی غیرخطی یک روتور-دیسک با یاتاقان‌های مجله هیدرو دینامیکی توسط اوراموف و همکاران [۲۸] پیشنهاد شد. جلالی و همکاران [۲۹] با استفاده از روش اجزاء محدود، تحلیلی از روتور با هندسه معین در سرعت بالا انجام دادند و آن نتایج را با نتایج حاصل از آزمایش مودال تجربی مقایسه کردند. بعد، هان و جو [۳۰] پاسخ دینامیکی یک

سیستم چرخ دنده ای را با سه حرکت پایه زاویه‌ای تجزیه و تحلیل کردند. تأثیرات حرکات پایه مختلف بر روی طیف پاسخ و پاسخ فرکانسی مورد بحث قرار دادند. مدل‌سازی تحلیلی برای تحلیل دینامیکی سیستم‌های دارای روتور چند بخش با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو توسط اساهین و همکاران [۳۱] ارائه شد. علاوه بر این، ترابی و افشاری [۳۲] یک راه حل تحلیلی برای تحلیل چرخشی یک روتور بار محوری انجام دادند. روش اجزای محدود توسط وانگ و همکاران [۳۳] برای تجزیه و تحلیل جامع سیستم‌های دارای روتور با در نظر گرفتن ناهمسانگردی کامل در میرایی، اینرسی و سختی به کار گرفته شد. تأثیرات چهار نوع ناهمسانگردی بر روی سیستم در این کار بررسی شد. در ادامه ما و همکاران [۳۴] یک مدل دینامیکی جدید برای سیستم‌های روتور-تیغه ایجاد کردند. سرینیواس و ردی [۳۵] رفتار ارتعاشی یک سیستم روتور داخلی با یاتاقان‌های ژورنال را که تحت تحریک پایه قرار دارد، بررسی کردند. شاو و وو [۳۶] تجزیه و تحلیلی را بر روی یک تیر کنسول دوار با یک اثر کوتاه‌کننده در کنار تغییر شکل محوری حالت پایدار در یک محدوده سرعت خاص انجام دادند. نشان داده شد که سرعت چرخش تأثیر کمی بر فرکانس کشش محوری دارد. علاوه بر این، باب و همکاران [۳۷] تشدیدهای اولیه یک روتور را بررسی کردند که با تئوری اوپلر-برنولی و با تیغه‌های صلب، منعطف و دیسک صلب مدل‌سازی شده بودند. در این مقاله اثرات خروج از مرکز جرم و میرایی محیط اطراف بر پاسخ‌های سیستم مذکور مورد بررسی قرار گرفت. روی و چاندراکر [۳۸] تحقیقی بر روی روتور ویسکوالاستیک انجام دادند

که توسط یاتاقان ژورنال پشتیبانی می‌شد. نشان داده شد که تأثیر نیروی میرایی داخلی، زوج ژيروسکوپ و فیلم سیال یاتاقان‌های ژورنال بر دینامیک روتور چشم‌گیر است. سپس تاتار و همکاران [۳۹] از مدل تیموشنکو برای کشف ویژگی‌های دینامیکی یک سیستم سیاره‌دار با در نظر گرفتن اثرات ژيروسکوپ استفاده کردند. از این رو، وانگ و جیانگ [۴۰] مقاله‌ای را منتشر کردند که در آن عیوب جفت‌کننده و عدم تعادل تراز سیستم دو روتور مورد بررسی قرار گرفته است. برای اعتبارسنجی، نتایج عددی با نتایج تجربی مقایسه شده است. روش اجزای محدود توسط هان و دینگ [۴۱] برای کاوش ویژگی‌های دینامیکی سیستم بلبرینگ روتور در طول مانورهای نور موتور هوا استفاده شد. یانگفنگ و همکاران [۴۲] رفتار ارتعاشی روتوری با ترک را بررسی کردند و از بسط آشوب چند جمله‌ای برای توضیح عدم قطعیت‌ها استفاده کردند. از تکنیک تعادل هارمونیک برای حل معادلات استفاده شد و شبیه‌سازی‌های مونت-کارلو برای اعتبارسنجی روش پیشنهادی استفاده شد و در نهایت به این نتیجه رسیدند که پاسخ‌های غیرخطی روتور شاخص‌های مهمی برای شناسایی ترک هستند. در این مقاله، ارائه یک مدل تحلیلی کامل برای سیستم روتور-دیسک با شفت چهاربخشی با مقاطع متفاوت است مد نظر است. بر خلاف مدل‌های پیشین که عمدتاً شفت یکنواخت یا حداکثر دو بخشی را در نظر می‌گرفتند، مدل حاضر قابلیت شبیه‌سازی سیستم‌های صنعتی واقعی با تغییرات گام به گام قطر شفت را دارا می‌باشد. مدلسازی بستر ویسکوالاستیک به صورت گسترده در طول شفت و اعمال اثرات میرایی داخلی بر روی تمامی بخش‌های واقع بر

روی تکیه‌گاه صورت می‌گیرد که در کارهای پیشین کمتر مورد توجه قرار گرفته بود. در گام بعد با استخراج همزمان پاسخ فرکانسی ناشی از نابالانسی دیسک و فرکانس‌های طبیعی سیستم با استفاده از یک روش تحلیلی یکپارچه مبتنی بر اصل همپلتون و تئوری تیر تیموشنکو است که ضمن در نظر گرفتن اثرات ژيروسکوپ، اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی، قابلیت اعمال شرایط مرزی و پیوستگی پیچیده بین بخش‌های مختلف شفت را نیز دارا می‌باشد. در نهایت تأثیر همزمان پارامترهای متعدد شامل ضریب سفتی بستر، ضریب تلفات ماده ویسکوالاستیک، ضریب میرایی داخلی، جرم نابالانسی دیسک و سرعت دورانی بر روی پاسخ دینامیکی سیستم است که دیدگاه جامعی نسبت به طراحی بهینه تکیه‌گاه‌های ویسکوالاستیک ارائه می‌دهد مورد بررسی قرار گرفته است. لازم به ذکر است که در تمامی مراحل مدل‌سازی و حل، از یک کد عددی توسعه یافته در محیط متلب استفاده شده است.

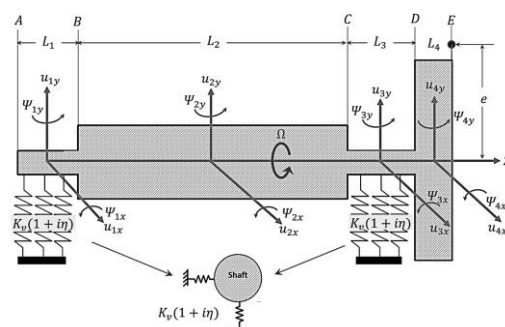
۲. روابط حاکم و روش حل مسئله

در شکل ۱ جزئیات یک شفت دوار سه تکه (AB, BC, CD) به همراه دیسک (DE) که بر روی یاتاقان‌های هیدرودینامیک قرار گرفته نشان داده شده است. این سیستم با سرعت دوارنی Ω در حال چرخش است و برای آن دمپینگ داخلی C_i منظور شده است. این شفت در هر قسمت دارای سطح مقطع متفاوتی با دیگر قسمت‌هاست. دیسک در سمت راست سیستم قرار گرفته که دارای یک جرم نابالانسی M_e به فاصله e از مرکز شفت است. یاتاقان‌ها به کمک فنر و دمپر $K_v(1+i\eta)$ مدل شده‌اند و در طول شفت‌های اول و سوم گسترده هستند. برای شبیه‌سازی چهار





قسمت شفت از تئوری تیموشنکو استفاده شده است. بنابراین برای هر قسمت چهار درجه آزادی، شامل دو انتقال $(u_{ix}, u_{iy}, i=1, 2, 3, 4)$ در راستای x و y و دو دوران حول محورهای x و y (Ψ_{ix}, Ψ_{iy}) منظور شده است. به عبارت دیگر علاوه بر تغییر مکان خمشی عرضی (u_x, u_y) دو متغیر مستقل جدید (Ψ_x, Ψ_y) که زوایای دوران ناشی از خمش می باشند باید برای روتور در نظر گرفته شوند.



شکل ۱. دیاگرام آزاد و شماتیک سیستم روتور-دیسک به همراه بستر ویسکوالاستیک.

در این مقاله معادلات حرکت هر قسمت با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده است که می توان آن را به صورت زیر بیان کرد [۴۳]:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T_i - U_i) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_i dt = 0 \quad (1)$$

$$T_i = \frac{1}{2} \int_0^t \left\{ \rho_i A_i \left[\left(\frac{\partial u_{iy}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_{ix}}{\partial t} \right)^2 \right] + \rho_i I_i \left[\left(\frac{\partial \psi_{iy}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_{ix}}{\partial t} \right)^2 \right] + \Omega J_{zi} \left[\psi_{iy} \frac{\partial \psi_{ix}}{\partial t} - \psi_{ix} \frac{\partial \psi_{iy}}{\partial t} \right] \right\} dz \quad (2)$$

در اینجا، U ، W و T کار انجام شده توسط بار خارجی، انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی هستند. به ترتیب، و باید برای هر قسمت از سیستم روتور-دیسک-یاتاقان محاسبه شود [۴۴]. انرژی جنبشی ناشی از انتقال خمشی، چرخش عرضی و چرخش است. در رابطه (۲)، ρ ، Ω ، J_z ، I و A به ترتیب سرعت زاویه ای، چگالی، گشتاور قطبی، مقطع اینرسی و سطح مقطع هستند [۴۴].

$$U_i = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ E_i I_i \left[\left(\frac{\partial \psi_{ix}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_{iy}}{\partial z} \right)^2 \right] + k_i A_i G_i \left[\left(\psi_{iy} - \frac{\partial u_{iy}}{\partial z} \right)^2 + \left(\psi_{ix} - \frac{\partial u_{ix}}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} dz \quad (3)$$

E ، G نشان دهنده مدول الاستیک و مدول برشی می باشند. همچنین $k=0.68$ ضریب اصلاح توزیع تنش برشی در مقطع می باشد که تابعی از هندسه سطح مقطع و ضریب پواسون است. در نهایت، کار انجام شده توسط میرایی داخلی به شرح زیر است:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta W_{vis,i} dt = \int_0^t \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left[-C_{iv,i} \frac{\partial u_{ix}}{\partial t} - C_{iv,i} \Omega u_{iy} \right] \delta u_{ix} dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[-C_{iv,i} \frac{\partial u_{iy}}{\partial t} - C_{iv,i} \Omega u_{ix} \right] \delta u_{iy} dt \right\} dz \quad (4)$$

جایی که پارامتر C_{iv} ضریب میرایی ویسکوز داخلی است. اکنون سیستم بلبرینگ روتور-دیسک بر اساس تئوری تیر تیموشنکو که تأثیر اینرسی دورانی و تغییر شکل های برشی تیر را در نظر می گیرد، مدل سازی شده است، به همین دلیل می توان این تئوری را برای همه قطعات شفت های اعمال کرد. علاوه بر این، تأثیرات ژيروسکوپی را می توان گنجانده. همانطور که در بخش قبل ذکر شد، با در نظر گرفتن اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی، چهار جابجایی تعمیم یافته تعریف شده است شامل انحرافات عرضی u_x و u_y و زوایای خمشی Ψ_x و Ψ_y که به شرح زیر معرفی می شوند [۴۴]:

$$u = u_x + i u_y \quad \text{و} \quad \psi = \psi_x + i \psi_y \quad (5)$$

دلیل اصلی این کار، جفت شدگی طبیعی حرکت در این دو جهت به دلیل چرخش شفت و اثر ژيروسکوپی است. با استفاده از متغیر مختلط، دو معادله دیفرانسیل جفت شده حقیقی به یک معادله مختلط تبدیل می شوند که حل آن بسیار ساده تر است. همچنین این روش امکان نمایش

$$P = \sum_{i=0}^m a_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} \quad (10)$$

$$Q = \sum_{i=0}^n b_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} \quad (11)$$

در معادلات (۱۰) و (۱۱)، a و b ثابت‌های ماده هستند، n و m پارامترهایی هستند که به واکنش ویسکوالاستیک مواد بستگی دارند و تعداد عبارت‌ها را تعیین می‌کنند. مدل ویسکوالاستیک نشان داده شده توسط معادله (۹) معادل ترکیب دمپر و فنر الاستیک است.

$$\sigma(t) = E^* \varepsilon(t), \quad E^* = Q/p \quad (12)$$

که در آن E^* معادل مدول الاستیسیته است که تنش‌ها را به کرنش‌ها مرتبط می‌کند. علاوه بر این، رابطه نیرو-جابجایی را می‌توان از معادله (۱۳) به دست آورد.

$$F = k^* u \quad (13)$$

که در آن k^* ضریب سختی معادل و یک عملگر کامل ویسکوالاستیک است. در این تحقیق از مدل کلین-ووینگت استفاده شده و به شرح زیر است:

$$k^* = k_v(1 + i\eta) \quad (14)$$

در اینجا k_v و η به ترتیب ضرایب سختی و ضریب تلفات هستند. انرژی پتانسیل حاصل از بستر ویسکوالاستیک به شرح زیر است:

$$U_{vis-s} = \frac{1}{2} k^* u_x^2 + \frac{1}{2} k^* u_y^2 \quad (15)$$

معادله حرکت یک شفت دوار بر روی بستر ویسکوالاستیک به صورت زیر بدست خواهد آمد.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{kG}{\rho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{c_i}{\rho A} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - i\Omega u \right) - k^* u = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{i\Omega J_z}{\rho I} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{kAG}{\rho I} \left(\psi - \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 \quad (17)$$

به منظور حل معادلات حرکت، چرخش و جابجایی به شکل زیر در نظر گرفته می‌شوند.

همزمان دامنه و فاز نوسان در هر مقطع از شفت را فراهم می‌کند و توصیف مسیر بیضوی یا دایره‌ای مرکز دیسک را به صورت طبیعی بیان می‌نماید. در مجموع، استفاده از فرم مختلط در تحلیل روتورها یک ابزار ریاضی استاندارد و کارآمد برای کاهش پیچیدگی معادلات و لحاظ کردن اثرات چرخشی است. برای قطعاتی که روی بستر ویسکوالاستیک قرار ندارند، معادلات حرکت شفت یکنواخت تیموشنکو با در نظر گرفتن میرایی داخلی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{kG}{\rho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{c_i}{\rho A} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - i\Omega u \right) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{i\Omega J_z}{\rho I} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{kAG}{\rho I} \left(\psi - \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 \quad (7)$$

معادلات (۶) و (۷) حاصل مستقیم اعمال اصل همیلتون بر روی توابع انرژی و کار سیستم هستند. حال برای قسمت‌های ۱ و ۳ باید ویژگی‌ها و خواص بستر را در نظر بگیریم که با استفاده از معادلات تشکیل دهنده آن قابل تعیین است. این معادلات رابطه بین کرنش و تنش ماده را ایجاد می‌کند. از آنجاییکه ماده ویسکوالاستیک در نظر گرفته می‌شود، به این معنی است که رفتارهای چسبناک و الاستیک مواد باید به طور همزمان مورد مطالعه قرار گیرند. بنابراین، روابط سازنده تعمیم یافته به صورت زیر تشکیل می‌شوند:

$$\varepsilon(t) = D_{\tau=t_0}^{\tau=t} \{ \sigma(\tau_0) \} \quad (8)$$

D ، τ_0 و $\sigma(\tau)$ به ترتیب عملکردی زمان اولیه و تنش هستند. در مورد مواد ویسکوالاستیک دیفرانسیل تک محوری خطی، قانون تشکیل دهنده به صورت زیر است:

$$P\sigma(t) = Q\varepsilon(t) \quad (9)$$

در اینجا، Q و P عملگرهای دیفرانسیل خطی مربوط به زمان t می‌باشند و به شرح زیر هستند:





$$u(z, t) = U(z)e^{i\omega t} \quad (18)$$

$$\Psi(z, t) = \varphi(z)e^{i\omega t} \quad (19)$$

ω فرکانس، U و φ توابع مکانی هستند. با جایگزینی معادلات (۱۸) و (۱۹) به معادلات حرکت سیستم، خواهیم داشت:

$$U'' + Ua_1 + \varphi'a_2 = 0 \quad (20)$$

$$\varphi'' + \varphi b_1 + U'b_2 = 0 \quad (21)$$

ضرایب معادلات فوق عبارتند از:

$$a_1 = \left(\omega^2 \rho + \frac{k}{A} - i \frac{C_i}{A} (\omega - \Omega) \right) \frac{1}{\tau G} \quad (22)$$

$$a_2 = -1 \quad (23)$$

$$b_1 = \left(\omega^2 \rho + \frac{i\Omega J_s}{I_s} - \frac{\tau AG}{I_s} \right) \frac{1}{E} \quad (24)$$

$$b_2 = \frac{kAG}{EI_s} \quad (25)$$

و بعد از دیکوپله کردن معادلات فوق داریم که:

$$U'''' + U''q_1 + Uq_2 = 0 \quad (26)$$

$$\varphi'''' + \varphi''q_1 + \varphi q_2 = 0 \quad (27)$$

در حالیکه عبارات تعریف شده در معادلات فوق عبارتند از:

$$q_1 = a_1 + b_1 - a_2 b_2 \quad (28)$$

$$q_2 = a_1 b_1 \quad (29)$$

با حل دو معادله (۲۶) و (۲۷) خواهیم داشت:

$$U(z) = \sum_{j=1}^4 A'_j e^{n_j z} \quad (30)$$

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^4 B_j e^{n_j z} \quad (31)$$

n_j ریشه‌های معادلات (۲۶) و (۲۷) می‌باشد.

A_j ضرایب مجهول می‌باشند که با قراردادن در شرایط مرزی بدست خواهند آمد.

۳. شرایط مرزی نقاط مختلف سیستم روتور-دیسک

لازم است به این نکته اشاره شود که سیستم روتور-دیسک مورد نظر از چهار بخش شفت متوالی تشکیل شده است. بنابراین برای اتصال این بخش‌ها به یکدیگر، باید شرایط پیوستگی در

نقاط مشترک بین آنها برقرار گردد. در هر نقطه اتصال، چهار کمیت اصلی باید پیوستگی خود را حفظ کنند: نخست، جابجایی عرضی شفت که باید در دو طرف نقطه اتصال برابر باشد؛ دوم، چرخش مقطع نیز باید در دو طرف پیوسته باشد؛ سوم، نیروی برشی وارد بر مقطع باید از یک طرف به طرف دیگر منتقل شده و تعادل برقرار شود؛ و چهارم، گشتاور خمشی نیز باید در محل اتصال پیوستگی داشته باشد.

الف) در ابتدای شفت ($z=0$)

شفت در حالت کلی به صورت شرایط مرزی آزاد-آزاد می‌باشد. به عبارت دیگر در نقطه ابتدایی گشتاور خمشی و نیروی برشی برابر صفر است.

$$\Psi'_1 = 0 \quad (32)$$

$$\tau_1 A_1 G_1 (\Psi_1 - u'_1) = 0 \quad (33)$$

ب) در نقطه‌ی ($z=L_1$) B

برای آنکه شرایط پیوستگی در نقاط میانی ارضا شود بایستی که جابجایی، چرخش، نیروی برشی و گشتاور خمشی با هم برابر باشند.

$$u_1 = u_2 \quad (34)$$

$$\Psi_1 = \Psi_2 \quad (35)$$

$$\Psi'_1 = \left[\frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} \right] \Psi'_2 \quad (36)$$

$$\Psi_1 - u'_1 = \frac{\tau_2 A_2 G_2}{\tau_1 A_1 G_1} (\Psi_2 - u'_2) \quad (37)$$

ج) در نقطه‌ی ($z=L_1+L_2$) C

$$u_2 = u_3 \quad (38)$$

$$\Psi_2 = \Psi_3 \quad (39)$$

$$\Psi'_2 = \left[\frac{E_3 I_3}{E_2 I_2} \right] \Psi'_3 \quad (40)$$

$$\Psi_2 - u'_2 = \frac{\tau_3 A_3 G_3}{\tau_2 A_2 G_2} (\Psi_3 - u'_3) \quad (41)$$

د) در نقطه‌ی ($z=L_1+L_2+L_3$) D

$$u_3 = u_4 \quad (42)$$

$$\Psi_3 = \Psi_4 \quad (43)$$

$$\Psi'_3 = \left[\frac{E_4 I_4}{E_3 I_3} \right] \Psi'_4 \quad (44)$$

$$\psi_3 - u'_3 = \frac{\tau_4 A_4 G_4}{\tau_3 A_3 G_3} (\psi_4 - u'_4) \quad (45)$$

ه) در نقطه‌ی E

در نقطه‌ی انتهایی شفت گشتاور خمشی برابر صفر است و نیروی برش برابر است با نیروی حاصل از خارج از مرکزی یا نیروی نابالانسی.

$$\tau_4 A_4 G_4 (u'_4 - \psi_4) - M_e \omega^2 u_4 = M_e \Omega^2 e \quad (46)$$

$$\psi'_4 = 0 \quad (47)$$

پس از نوشتن معادلات حرکت برای هر بخش از شفت و تعیین شرایط مرزی در دو انتهای سیستم (آغاز شفت و محل دیسک) و همچنین شرایط پیوستگی در محل اتصال بخش‌های مختلف شفت، تمامی این معادلات که شامل معادلات (۳۲) تا (۴۷) هستند، در کنار یکدیگر چیده می‌شوند. حاصل این کار، تشکیل یک دستگاه معادلات همگن شانزده معادله و شانزده مجهول است که به صورت ماتریسی نمایش داده می‌شود. برای آنکه این دستگاه جوابی غیر از جواب صفر داشته باشد (یعنی سیستم بتواند نوسان کند)، باید دترمینان ماتریس ضرایب Q که یک ماتریس شانزده در شانزده است، مخالف با صفر شود. حالتی که این دترمینان صفر می‌گردد، تنها در مقادیر خاصی از فرکانس رخ می‌دهد. بنابراین با صفر قرار دادن دترمینان این ماتریس و حل معادله حاصل، فرکانس‌های طبیعی سیستم استخراج می‌شوند.

$$Q_{16 \times 16} \times Y_{16 \times 1} = F_{16 \times 1} \quad (48)$$

$$Y = [A'_{1,1} \ A'_{1,2} \ A'_{1,3} \ A'_{1,4} \ A'_{2,1} \ A'_{2,2} \ A'_{2,3} \ A'_{2,4} \ \dots \ A'_{16,4}]^T \quad (49)$$

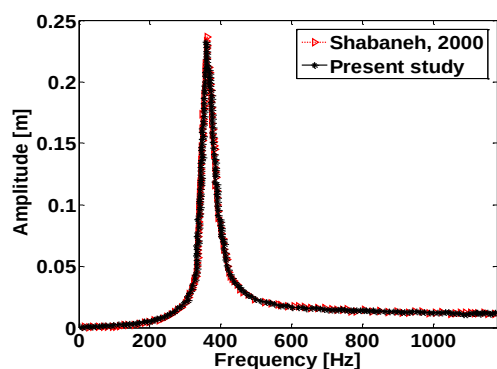
$$F = [0 \ 0 \ \dots \ (M_e \times e \times \Omega^2) \ \dots \ 0 \ 0]^T \quad (50)$$

برای محاسبه پاسخ فرکانسی سیستم در حضور نابالانسی، نیاز به حل یک دستگاه معادلات خطی است که در این کار از روش تجزیه LU استفاده شده است. این روش به دلیل کارایی بالا

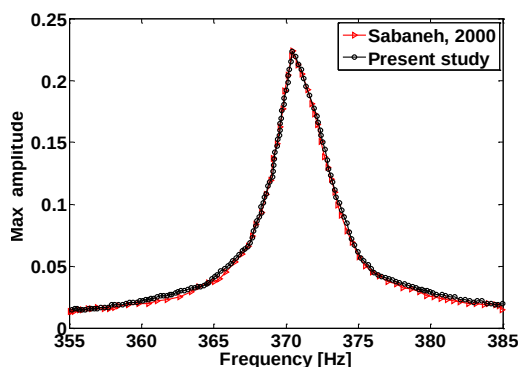
در حل دستگاه‌های معادلات با ابعاد نسبتاً بزرگ و همچنین پایداری عددی مناسب، انتخاب گردیده است. در روش تجزیه LU، ماتریس ضرایب Q به حاصل ضرب دو ماتریس مثلثی پایینی و مثلثی بالایی تجزیه می‌شود و سپس با دو مرحله جانشانی رو به جلو و رو به عقب، بردار مجهولات Y محاسبه می‌گردد. برای پیاده‌سازی عددی مدل تحلیلی و حل دستگاه معادلات حاکم، یک کد جامع در محیط نرم‌افزار متلب نوشته شد.

۴. اعتبارسنجی و صحت‌سنجی معادلات

برای نشان دادن صحت مدل تحلیلی ارائه شده در این مقاله، نتایج مدل حاضر با کار شعبانه و همکاران [۴۴]، مقایسه می‌شود (شکل‌های ۲ و ۳). در کار آنها فنر و دمپر در انتهای شفت و به صورت نقطه‌ای فرض شده است. علاوه بر این فنرها بر روی یک جرم و یک بستر ویسکوالاستیک قرار دارد. در حالیکه بستر در انتها دارای جابجایی است. آن‌ها سیستم را متقارن فرض کرده‌اند، بنابراین فقط ارتعاشات نصف سیستم را مورد تحلیل قرار دادند و مسئله را ساده کرده‌اند.



شکل ۲. اعتبارسنجی مدل تحلیلی حاضر با کار منتشر شده توسط شعبانه [۴۴].



شکل ۳. اعتبارسنجی مدل تحلیلی حاضر با کار منتشر شده توسط شعبانه [۴۴].

به منظور اعتبارسنجی، ضریب سختی فنر یاتاقان دوم را برابر صفر قرار داده و شفت را به صورت یکپارچه و سطح مقطع برابر با مقدار داده شده در کار شعبانه داده شده است. همچنین طول یاتاقان اول خیلی کوچک منظور شده است. در شکل‌های ۲ و ۳ مقایسه دامنه جابجایی است که حاکی از توافق خیلی خوب بین دو مطالعه است.

۵. نتایج

۱.۵ داده‌ها و پارامترهای مورد نیاز

داده‌ها و پارامترهای مورد استفاده در این شبیه‌سازی در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱. داده‌های مورد نیاز جهت شبیه‌سازی.

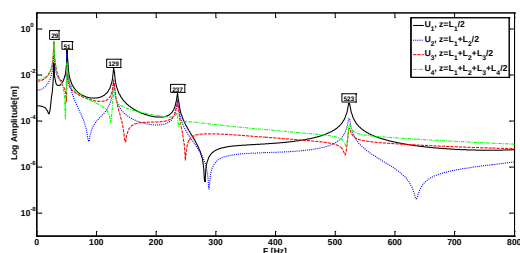
مشخصات	روتور فولادی			دیسک
	AB	BC	CD	DE
اجزاء سیستم	AB	BC	CD	DE
طول (m)	۰/۱	۱	۰/۱	۰/۰۵
قطر (m)	۰/۰۳	۰/۰۶	۰/۰۳	۰/۲۵
C_i (Ns)	۴۰۰	۴۰۰	۴۰۰	۴۰۰
E (GPa)	۲/۰۴	۲/۰۴	۲/۰۴	۲/۰۴
ν	۰/۳	۰/۳	۰/۳	۰/۳
k	۰/۶۸	۰/۶۸	۰/۶۸	۰/۶۸
ρ (kg/m ³)	۷۷۵۰	۷۷۵۰	۷۷۵۰	۷۷۵۰
k_v (MN/m ²)	۱۰	۰	۱۰	۰
η	۰/۰۱	۰	۰/۰۱	۰

به منظور بررسی ارتعاشات اجباری سیستم یک نابالانسی در آن ایجاد شده است. بر روی

دیسک ۰/۱ کیلوگرم نابالانسی در فاصله ۰/۵ نیم‌متری روی دیسک اعمال شده است.

۲.۵ شکل مدها و فرکانس‌های طبیعی

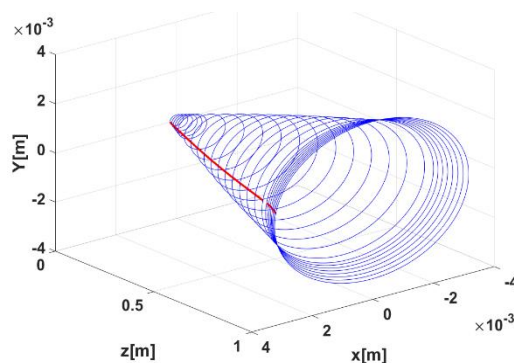
در شکل ۴ پاسخ فرکانسی سیستم نشان داده شده است. برای این تحلیل نقاط میانی شفت‌ها در نظر گرفته شده است در حالیکه سیستم با ۳۰۰۰ دور در دقیقه دوران می‌کند. این شکل نشان می‌دهد که حداکثر جابجایی برای هر سه شفت و دیسک در فرکانس‌های طبیعی رخ می‌دهد. پنج فرکانس‌های طبیعی سازه ۲۸/۸۵، ۵۱/۲، ۱۲۹/۱۵، ۲۳۶/۸۸ و ۵۲۳/۳۹ هرتز می‌باشند که بر روی شکل نشان داده شده‌اند.



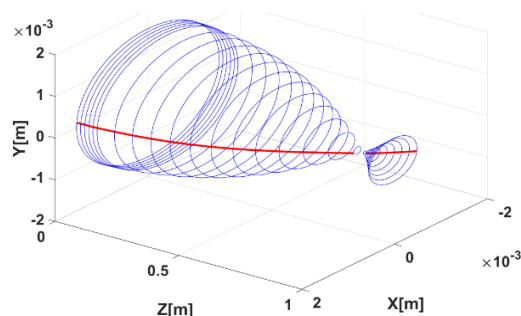
شکل ۴. تغییرات جابجایی نقاط میانی شفت‌ها نسبت به تحریک فرکانسی.

شکل‌های ۵ تا ۹ پنج شکل مد اولیه سیستم متناسب با جابجایی در فضای سه بعدی را نشان می‌دهند. برای رویت چگونگی حرکت روتور، ابتدا تاب خوردن یک طناب را تصور کنید. طناب روی سطح خارجی استوانه حرکت می‌کند. به همین دلیل گاهی این مد را مد استوانه‌ای می‌نامند. اما برخلاف طناب، روتور دوران هم دارد. حرکت چرخش روتور می‌تواند هم جهت دوران شافت یا در جهت مخالف آن باشد به همین خاطر به آن‌ها در جهت چرخش یا خلاف جهت چرخش گویند.

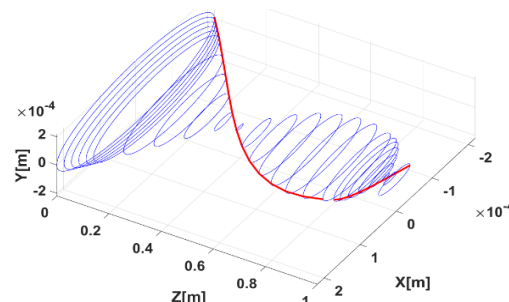
مربوط به زمانی است که شفت هم جهت با دوران چرخش می‌کند. برای دیدن اثرات تغییر سرعت محور، می‌توان آنالیز را بدون دوران تا سرعت بالا انجام داد. شکل ۱۰ تغییرات فرکانس‌های طبیعی اول (مد استوانه‌ای) و دوم (مد مخروطی) روی یک رنج سرعتی گسترده را نشان می‌دهند. اما backward زمانی رخ می‌دهد که شفت خلاف جهت دوران چرخش می‌کند. از این شکل، می‌توان دریافت که فرکانس مد مخروطی (مد دوم) روی محدوده‌ی سرعت تغییر می‌کنند و مد در خلاف جهت فرکانس طبیعی کاهش، در حالیکه در هم جهت افزایش می‌یابد. توضیح این رفتار عجیب اثر ژیرسکوپ است که هرگاه شکل مد قطعه زاویه‌ای (مخروطی) باشد حادث می‌شود. از این شکل، می‌توان دریافت که در مد استوانه‌ای فرکانس طبیعی در محدوده سرعت خیلی تغییر نمی‌کند. مد خلاف جهت اندکی کاهش می‌یابد، و مد هم جهت افزایش می‌یابد.



شکل ۵. مد اول سیستم متناسب با فرکانس ۲۸/۸۵ هرتز.

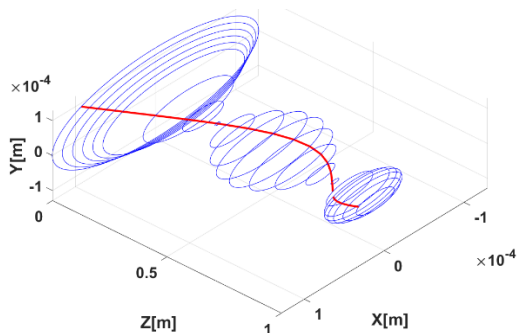


شکل ۶. مد اول سیستم متناسب با فرکانس ۵۱/۲ هرتز.

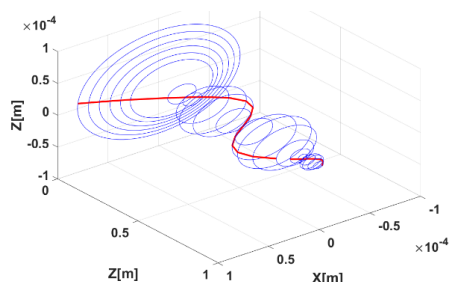


شکل ۷. مد سوم سیستم متناسب با فرکانس ۱۲۹/۱۵ هرتز.

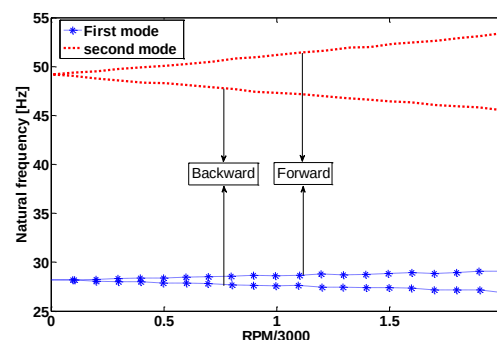
برای تصور چگونگی حرکت روتور برای مدهای دوم به بالا (شکل ۶)، در نظر بگیرید که میله‌ای را در وسط ثابت نگه داشته‌اید، و آن را طوری حرکت می‌دهید که دو انتهای آن مسیر دایره را دور بزنند. میله چند شکم مخروطی را طی می‌کنند که نوک شان در میله به هم می‌رسند. به همین خاطر گاهی این مد را مخروطی می‌نامند. با نگاه جانبی، چنین به نظر می‌رسد که میله حول مرکزش بالا و پایین می‌جهد و دو طرف نسبت به هم غیر هم فازند. نمودار forward



شکل ۸. مد چهارم سیستم متناسب با فرکانس ۲۳۶/۸۸ هرتز.



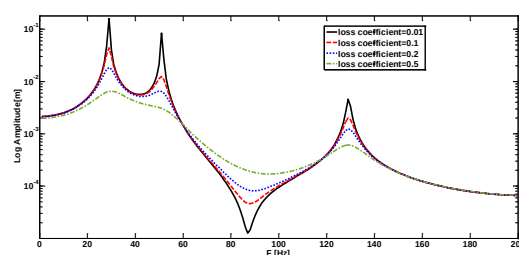
شکل ۹. مد پنجم سیستم متناسب با فرکانس ۵۲۳/۳۹ هرتز.



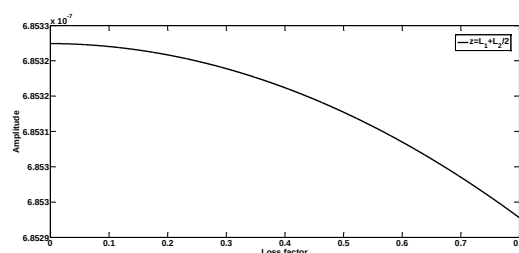
شکل ۱۰. تغییرات فرکانس‌های طبیعی اول (مد استوانه‌ای) و دوم (مد مخروطی).

۳.۵ بررسی اثر ضریب افت بستر (η) بر روی ارتعاشات سیستم

تأثیر ضریب افت نسبت به تحریک فرکانسی بر روی دامنه ارتعاشات در شکل ۱۱ نشان داده شده است. این آنالیز برای چهار مقدار ضریب افت انجام شد. بررسی نشان می‌دهد که هرچه ضریب افت افزایش می‌یابد دامنه جابجایی کاهش پیدا کرده است. می‌توان نتیجه گرفت که برای کاهش دامنه در فرکانس‌های طبیعی از یاتاقان‌های با ضریب افت بالاتری استفاده کرد. شکل ۱۱ نشان می‌دهد که افزایش ضریب افت تأثیر آنچنانی بر روی فرکانس‌های طبیعی ندارد.



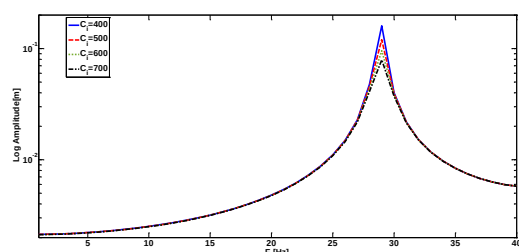
شکل ۱۱. تأثیر ضریب افت نسبت به تحریک فرکانسی بر روی دامنه ارتعاشات.



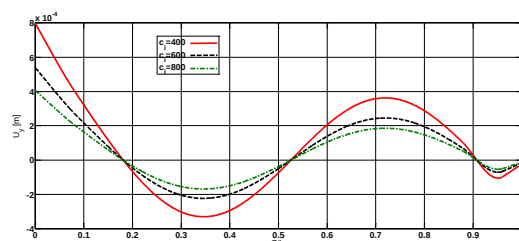
شکل ۱۲. تأثیر ضریب افت بر روی حداکثر دامنه‌ی ارتعاشات.

شکل ۱۲ تأثیر ضریب افت بر روی حداکثر دامنه‌ی ارتعاشات نشان داده شده است. این بررسی برای نقطه‌ی میانی شفت دوم تحت دوران ۳۰۰۰ دور در دقیقه انجام شد. تجزیه و تحلیل نشان می‌دهد که با افزایش ضریب افت حداکثر دامنه کاهش می‌یابد. دلیل این موضوع این است که انرژی بیشتری توسط دمپر جذب می‌شود.

۴.۵ اثر ضریب دمپینگ داخلی (C_i) بر روی ارتعاشات سیستم



شکل ۱۳. تأثیر ضریب افت بر روی حداکثر دامنه‌ی ارتعاشات.



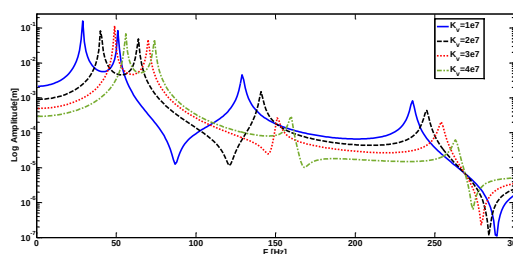
شکل ۱۴. تأثیر ضریب دمپینگ داخلی بر روی دامنه ارتعاشات.

شکل ۱۳ تأثیر ضریب دمپینگ داخلی بر روی دامنه ارتعاشات را نشان می‌دهد. این تحلیل برای چهار مقدار از ضریب دمپینگ داخلی انجام شد. تحلیل نشان می‌دهد که با افزایش ضریب دمپینگ داخلی مقدار دامنه جابجایی کاهش می‌یابد. کاهش دامنه را می‌توان به این نسبت داد که افزایش ضریب افت کریستال‌های ماده شفت کمتر بر روی هم می‌لغزند. شکل ۱۴ تأثیر ضریب دمپینگ داخلی بر روی شکل مد پنجم را نشان می‌دهد. افزایش ضریب دمپینگ باعث کاهش

جابجایی در طول محور می‌شود.

۵.۵ اثر ضریب سختی یاتاقان (k_v) بر روی ارتعاشات سیستم

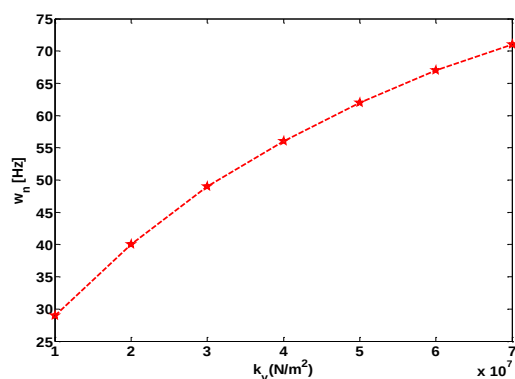
تأثیر سختی یاتاقان بر روی ارتعاشات سیستم روتور دیسک در شکل ۱۵ نشان داده شده است. مقادیر سختی معادل یاتاقان‌ها به صورت پارامتریک و در محدوده وسیعی از مقادیر (از سفتی کم تا زیاد) انتخاب شده است تا تأثیر این پارامتر بر رفتار دینامیکی سیستم به طور کامل بررسی شود.



شکل ۱۵. تأثیر سختی یاتاقان بر روی ارتعاشات سیستم.

انتخاب مقادیر سفتی و ضریب تلفات بر اساس بازه‌های معمول برای مواد ویسکوالاستیک مورد استفاده در صنعت و همچنین بر اساس مطالعات مرجع [۴۴] انجام شده است. این تحلیل برای چهار مقدار مختلف k_v تحت سرعت دورانی ۳۰۰۰ دور در دقیقه انجام شد. بررسی‌ها نشان می‌دهد که افزایش در مقدار k_v سبب می‌شود که جابجایی در سیستم کاهش یابد. دلیل این امر این است که هرچه سختی یاتاقان زیاد شود صلبیت سیستم بالا می‌رود. افزایش سختی علاوه بر افزایش صلبیت سیستم باعث می‌شود که رزونانس در فرکانس‌های بالاتری رخ دهد. به عبارت دیگر مقدار فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابد. همین پدیده را می‌توان در شکل ۱۶ مشاهده کرد. نسبت سختی یاتاقان به سختی شافت اثر زیادی روی شکل مدها دارد. برای یاتاقان‌های نرم و متوسط، شافت در دو مد

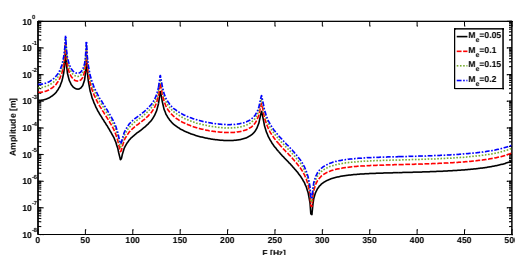
پایینتر خیلی خم نمی‌شود. بنابراین، عموماً مدهای روتور صلب نامیده می‌شود. همچنانکه سختی یاتاقان افزایش می‌یابد یا اینکه سختی شافت کاهش می‌یابد، مقدار خم شفت بیشتر می‌شود.



شکل ۱۶. تأثیر سختی یاتاقان بر روی فرکانس‌های طبیعی سیستم.

۵.۶ اثر جرم خارج از مرکزی بر روی ارتعاشات سیستم

شکل ۱۷ تأثیرات جرم خارج از مرکزی بر روی ارتعاشات سیستم را نشان می‌دهد. از شکل قابل مشاهده است که افزایش نابالانسی در سیستم سبب افزایش جابجایی در محدوده‌ی فرکانسی می‌شود. این را می‌توان به آن نسبت داد که افزایش جرم نابالانسی باعث افزایش نیروی تحریک سیستم می‌شود. در حالی که افزایش جرم نابالانسی هیچ تأثیری در فرکانس‌های طبیعی سیستم ندارد.



شکل ۱۷. تأثیرات جرم خارج از مرکزی بر روی ارتعاشات سیستم.

۶. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این پژوهش، تحلیل دینامیکی یک سیستم روتور-دیسک نامتقارن با شفت چندبخشی و تکیه‌گاه‌های ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات حرکت سیستم با استفاده از اصل همپلتون و بر اساس تئوری تیر تیموشنکو استخراج گردید که به موجب آن، اثرات اینرسی دورانی، تغییر شکل برشی، اثر ژيروسکوپی و میرایی داخلی به طور همزمان در مدل لحاظ شد. یاتاقان‌های سیستم با استفاده از مدل کلونین-ویگت با شبیه‌سازی گردیدند. با اعمال شرایط مرزی در دو انتهای شفت و شرایط پیوستگی در محل اتصال بخش‌های چهارگانه، یک دستگاه معادلات خطی 16×16 تشکیل شد. برای پیاده‌سازی عددی مدل تحلیلی و حل دستگاه معادلات حاکم، یک کد جامع در محیط نرم‌افزار متلب نوشته شد.

نتایج عددی نشان دادند که افزایش ضریب سختی یاتاقان منجر به کاهش دامنه ارتعاشات و افزایش فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌گردد که بیانگر افزایش صلبیت کلی سازه است. همچنین مشخص شد که افزایش ضریب تلفات بستر ویسکوالاستیک موجب کاهش دامنه ارتعاشات شده و در نتیجه می‌تواند به عنوان یک راهکار مؤثر برای کنترل ارتعاشات ناخواسته در سیستم‌های دوار به کار رود. بررسی اثر میرایی داخلی نشان داد که افزایش این پارامتر، دامنه جابجایی شفت را به طور محسوسی کاهش می‌دهد، زیرا انرژی بیشتری توسط دمپر جذب می‌گردد. در بررسی اثر نابالانسی، مشاهده گردید که افزایش جرم خارج از مرکزی سبب افزایش دامنه ارتعاشات در حوزه فرکانس می‌شود، اما تأثیری بر فرکانس‌های طبیعی سیستم ندارد.

همچنین تحلیل فرکانس‌های طبیعی در محدوده سرعت‌های دورانی مختلف نشان داد که فرکانس مود استوانه‌ای (مد اول) تقریباً مستقل از سرعت دورانی است، در حالی که فرکانس مود مخروطی (مد دوم) در حالت هم‌جهت با چرخش افزایش و در حالت خلاف جهت کاهش می‌یابد. اعتبارسنجی مدل تحلیلی با نتایج دیگر محققان تطابق بسیار خوبی را نشان داد که صحت مدل‌سازی و کد عددی توسعه یافته را تأیید می‌کند. در مجموع، مدل ارائه شده در این مقاله ابزاری دقیق و کارآمد برای تحلیل ارتعاشات اجباری و آزاد سیستم‌های روتور-دیسک با شفت‌های چندبخشی و تکیه‌گاه‌های ویسکوالاستیک محسوب می‌شود که می‌تواند در طراحی و بهینه‌سازی سیستم‌های دوار صنعتی از جمله توربین‌ها، کمپرسورها و ژنراتورها مورد استفاده قرار گیرد.

۷. مآخذ

- [1] R. Grybos, "Effect of shear and rotary inertia of a rotor at its critical speeds," *Archive of Applied Mechanics*, vol. 61, no. 2, pp. 104–109, January 1991.
- [2] R. Subbiah, R. B. Bhat, and T. S. Sankar, "Vibration analysis of rotor systems," *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, vol. 111, no. 4, pp. 360–365, October 1989.
- [3] C. Nataraj and H. D. Nelson, "Dynamic analysis of rotor-bearing systems using dynamic condensed models," *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, vol. 111, no. 2, pp. 187–193, April 1989.
- [4] A. V. Ruddy and D. Sommers-Smith, "The selection and design of bearings for industrial turbomachinery," *Tribology International*, vol. 13, no. 5, pp. 199–204, October 1980.
- [5] S. H. Choi, C. Pierre, and A. G. Ulsoy, "Consistent modeling of rotating Timoshenko shafts subject to axial loads," *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, vol. 114, no. 2, pp. 249–259, April 1992.

- [19] R. Gasch, "Dynamic behaviour of the Laval rotor with a transverse crack," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 22, no. 4, pp. 790–804, May 2008.
- [20] S.-C. Hsieh, J.-H. Chen, and A.-C. Lee, "A modified transfer matrix method for the coupled lateral and torsional vibrations of asymmetric rotor-bearing systems," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 312, no. 4–5, pp. 563–571, May 2008.
- [21] S. A. A. Hosseini and S. E. Khadem, "Free vibrations analysis of a rotating shaft with nonlinearities in curvature and inertia," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 44, no. 1, pp. 272–288, January 2009.
- [22] J. Xiang, D. Chen, X. Chen, and Z. He, "A novel wavelet-based finite element method for the analysis of rotor-bearing systems," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 45, no. 12, pp. 908–916, October 2009.
- [23] C. L. Huang, W. Y. Lin, and K. M. Hsiao, "Free vibration analysis of rotating Euler beams at high angular velocity," *Computers & Structures*, vol. 88, no. 17–18, pp. 991–1001, September 2010.
- [24] C.-W. Chang-Jian, "Non-linear dynamic analysis of dual flexible rotors supported by long journal bearings," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 45, no. 6, pp. 844–866, June 2010.
- [25] Q. Han, J. Zhao, and F. Chu, "Dynamic analysis of a geared rotor system considering a slant crack on the shaft," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, no. 26, pp. 5803–5823, December 2012.
- [26] O. S. Jun, "Dynamic behavior analysis of cracked rotor based on harmonic motion," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 30, no. 1, pp. 186–203, July 2012.
- [27] Z. Wang, X. Yu, F. Liu, Q. Feng, and Q. Tan, "Dynamic analyses for the rotor-journal bearing system of a variable speed rotary compressor," *International Journal of Refrigeration*, vol. 36, no. 7, pp. 1938–1950, November 2013.
- [28] K. V. Avramov and O. Borysiuk, "Self-sustained vibrations of one disk rotor in two arbitrary length journal bearings," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 70, no. 1, pp. 474–486, December 2013.
- [29] M. H. Jalali, M. Ghayour, S. Ziaei-Rad, and B. Shahriari, "Dynamic analysis of a high speed rotor-bearing system," *Measurement*, vol. 53, no. 1, pp. 1–9, July 2014.
- [30] Q. Han and F. Chu, "Dynamic behaviors of a geared rotor system under time-periodic base angular motions," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 78, no. 1, pp. 1–14, August 2014.
- [6] Y. G. Jei and C. W. Lee, "Modal analysis of continuous asymmetrical rotor bearing systems," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 152, no. 2, pp. 245–262, January 1992.
- [7] S. P. Singh and K. Gupta, "Free damped flexural vibration analysis of composite cylindrical tubes using beam and shell theories," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 172, no. 2, pp. 171–190, April 1994.
- [8] F. A. Sturla and A. Argento, "Free and forced vibrations of a spinning viscoelastic beam," *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 118, no. 3, pp. 463–468, July 1996.
- [9] J. Melanson and J. W. Zu, "Free vibration and stability analysis of internally damped rotating shafts with general boundary conditions," *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 120, no. 3, pp. 776–783, July 1998.
- [10] O. S. Jun and J. O. Kim, "Free bending vibration of a multi-step rotor," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 224, no. 4, pp. 625–642, July 1999.
- [11] M. A. Mohiuddin and Y. A. Khulief, "Coupled bending torsional vibration of rotors using finite element," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 223, no. 2, pp. 297–316, June 1999.
- [12] W. Kim, A. Argento, and R. A. Scott, "Free vibration of a rotating tapered composite Timoshenko shaft," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 226, no. 1, pp. 125–147, September 1999.
- [13] S. Karunendiran and J. W. Zu, "Free vibration analysis of shafts on resilient bearings using Timoshenko beam theory," *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 121, no. 2, pp. 256–258, April 1999.
- [14] N. H. Shabaneh and J. W. Zu, "Dynamic analysis of rotor-shaft systems with viscoelastically supported bearings," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 35, no. 9, pp. 1313–1330, September 2000.
- [15] H. P. Lin, "Direct and inverse methods on free vibration analysis of simply supported beams with a crack," *Journal of Engineering Structures*, vol. 26, no. 4, pp. 427–436, March 2004.
- [16] A. S. Sekhar, "Vibration characteristics of a cracked rotor with two open cracks," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 223, no. 4, pp. 497–512, June 1999.
- [17] T. C. Tsai and Y. Z. Wang, "The vibration of a multi-crack rotor," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 39, no. 9, pp. 1037–1053, September 1997.
- [18] S. Y. Lee and J. J. Sheu, "Free vibration of an extensible rotating inclined Timoshenko beam," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 304, no. 3–5, pp. 606–624, July 2007.



- [42] Y. Yongfeng, W. Qinyu, W. Yanlin, Q. Weiyang, and L. Kuan, "Dynamic characteristics of cracked uncertain hollow-shaft," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 124, no. 1, pp. 36–48, June 2019.
- [43] S. Bab, S. E. Khadem, M. Shahgholi, and A. Abbasi, "Vibration attenuation of a continuous rotor-blisk-journal bearing system employing smooth nonlinear energy sinks," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 84, no. 1, pp. 128–157, February 2017.
- [44] N. H. Shabaneh and J. W. Zu, "Dynamic analysis of rotor-shaft systems with viscoelastically supported bearings," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 35, no. 9, pp. 1313–1330, September 2000.
- [31] O. Özşahin, H. N. Özgüven, and E. Budak, "Analytical modeling of asymmetric multi-segment rotor-bearing systems with Timoshenko beam model including gyroscopic moments," *Computers & Structures*, vol. 144, no. 1, pp. 119–126, November 2014.
- [32] K. Torabi and H. Afshari, "Exact solution for whirling analysis of axial-loaded Timoshenko rotor using basic functions," *Engineering Solid Mechanics*, vol. 4, no. 3, pp. 97–108, November 2015.
- [33] S. Wang, Y. Wang, Y. Zi, and Z. He, "A 3D finite element-based model order reduction method for parametric resonance and whirling analysis of anisotropic rotor-bearing systems," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 359, no. 1, pp. 116–135, December 2015.
- [34] H. Ma, Y. Lu, Z. Wu, X. Tai, H. Li, and B. Wen, "A new dynamic model of rotor-blade systems," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 357, no. 1, pp. 168–194, November 2015.
- [35] M. R. Reddy and J. Srinivas, "Vibration analysis of a support excited rotor system with hydrodynamic journal bearings," *Procedia Engineering*, vol. 144, no. 1, pp. 825–832, 2016.
- [36] G. Zhao and Z. Wu, "Coupling vibration analysis of rotating three-dimensional cantilever beam," *Computers & Structures*, vol. 179, no. 1, pp. 64–74, January 2017.
- [37] S. Bab, S. E. Khadem, A. Abbasi, and M. Shahgholi, "Dynamic stability and nonlinear vibration analysis of a rotor system with flexible/rigid blades," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 105, no. 1, pp. 633–653, November 2016.
- [38] H. Roy and S. Chandraker, "Dynamic study of viscoelastic rotor: Modal analysis of higher order model considering various asymmetries," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 109, no. 1, pp. 65–77, March 2017.
- [39] A. Tatar, C. W. Schwingshackl, and M. I. Friswell, "Dynamic behaviour of three-dimensional planetary geared rotor systems," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 134, no. 1, pp. 39–56, April 2019.
- [40] N. Wang and D. Jiang, "Vibration response characteristics of a dual-rotor with unbalance-misalignment coupling faults: theoretical analysis and experimental study," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 125, no. 1, pp. 207–219, July 2018.
- [41] B. Han and Q. Ding, "Forced responses analysis of a rotor system with squeeze film damper during flight maneuvers using finite element method," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 122, no. 1, pp. 233–251, April 2018.