# بررسی اثر هیبریداسیون الیاف بر پاسخ دینامیکی توزیع تنش در تک‌لایه‌های مرکب تحت ترک

محمد شیشه‌ساز[1]، عرفان میرشکاری[2]

گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشگاه آزاد اسلامی اهواز

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۰/۱۰/۰۶

تاریخ ارزیابی نهایی: ۱۳۹۱/۰۵/۰۹

## چکیده

در کار حاضر توزیع تنش گذرا در تک‌لایه هیبرید با ابعاد محدود، تحت اثر ترک از لحظه‌ی گسسته شدن الیاف تا رسیدن به حالت تعادل، بررسی شده است. فرض بر آن است که کلیه‌ی الیاف هم‌جهت و بار اعمال شده بر ماده مرکب به‌صورت کششی و در راستای الیاف می‌باشد و ترک در میانه‌ی تک‌لایه ایجاد می‌شود. معادلات دیفرانسیلی جابجایی گذرای الیاف به کمک تئوری شیرلگ استخراج می‌گردند. به منظور حل معادلات تفاضلی ـ دیفرانسیلی استخراج شده، از روش تفاضل محدود استفاده می‌شود. نتایج به‌دست آمده، اثر هیبریداسیون، جرم و مدول کشسانی الیاف و اندازه ترک را بر پاسخ دینامیکی توزیع تنش نشان می‌دهند. مقادیر گذرای ضریب تمرکز تنش استخراج شده در این تحقیق برای تک‌لایه ساده تحت ترکی تا سه رشته[1] گسسته شده با نتایج به‌دست آمده از روش تحلیلی انطباق کامل دارند.

**کلیدواژه:**

تک‌لایه هیبرید، توزیع تنش گذرا، ضریب تمرکز تنش دینامیکی، فراجهش دینامیکی.

## مقدمه

عبارت هیبرید عموماً برای توصیف مواد مرکبی استفاده می‌شود که بیش از یک نوع رشته در یک زمینه مشترک قرار گیرند. با هیبرید نمودن الیاف، خواص مکانیکی نسبت به حالت ساده بهبود یافته و وزن و هزینه‌های ساخت مواد تغییر می‌یابد. از جمله این مواد مرکب می‌توان به تک‌لایه‌ی هیبریدی اشاره نمود که در آن الیاف با خواص مکانیکی متفاوت به‌صورت یک در میان در زمینه قرار گرفته‌اند. به دلیل کاربرد وسیع مواد مرکب در صنایع مختلف از جمله صنایع هوایی، مطالعه‌ی رفتار این مواد به‌خصوص در مواجهه با نقایصی مانند سوراخ و ترک از اهمیت بالایی برخودار بوده ولی خواص ناهمگن و غیرایزوتروپیک مواد مرکب، تحلیل رفتار مکانیکی آن‌ها را دشوار می‌سازد. از این رو تحلیل جنبه‌های مختلف رفتار مکانیکی مواد مرکب ضروری به نظر می‌رسد.

هاچپس[2] [1]، از اولین کسانی بود که از مدل شیرلگ[3] جهت بررسی رفتار مکانیکی مواد مرکب استفاده نمود. در این مدل فرض بر آن است که الیاف فقط بار کششی را تحمل نموده و زمینه[4] فقط تحت بارهای برشی قرار می‌گیرد. فرض شده است که طول و عرض تک‌لایه بی‌نهایت و میان رشته و زمینه پیوند کامل برقرار است و رشته و زمینه تا نقطه‌ی شکست رفتار الاستیک خطی دارند. در این مرجع ضریب تمرکز تنش استاتیکی در نوک ترک (که در آن بیشترین تمرکز تنش رخ می‌دهد) به‌دست آمده است.

زندر[5] و دیتون[6] [2]، با انجام آزمایش‌هایی بر روی مواد مرکب با رشته داکرون و زمینه پلی‌اورتان صحت روش هاچپس را نشان دادند. هاچپس و ون‌دایک[7] [3]، توزیع تنش و تمرکز تنش را در چندلایه‌هایی با آرایش الیاف مربعی و شش‌گوش با طول و عرض بی‌نهایت و با تعداد معین الیاف شکسته شده بدست آوردند. آن‌ها برای استخراج معادلات از مدل شیرلگ استفاده نموده و آرایش الیاف شکسته شده را بصورت مربعی و دایره‌ای در نظر گرفتند.

فوکودا[8] و چائو[9] [4]، با اصلاح مدل شیرلگ، توزیع تنش را در یک ماده‌ی مرکب تک‌لایه‌ی هیبریدی با الیاف ناپیوسته در حالت شکست متقارن الیاف بررسی نمودند. آن‌ها تمرکز تنش را در دو نوع رشته با مدول بالا و مدول پایین به‌دست آوردند.

لندیس[10] و همکاران [5]، تمرکز تنش در چندلایه‌هایی با

۱. استاد mshishehsaz@scu.ac.ir

۲. مربی erfan.mirshekari@iauahvaz.ac.ir

آرایش الیاف مربعی و شش‌ضلعی با طول و عرض بی‌نهایت را بدست آوردند. روش به کار رفته نوعی روش شیرلگ بهبود یافته بود که در آن زمینه به صورت المان‌های سه‌بعدی مدل می‌شد به قسمی که جابجایی‌های گره‌ای المان، جابجایی‌های الیاف قرار گرفته در اطراف زمینه می‌باشد. نتایج بدست آمده از روش شیرلگ با روش اجزاء محدود مقایسه شده است. لندیس و مک مکینگ[۱۱] [۶]، با استفاده از مدلی مشابه با مدل شیرلگ تنش در ماده‌ی مرکبی با یک رشته شکسته را تحلیل نمودند. در این تحقیق رفتار زمینه الاستیک – پلاستیک کامل در نظر گرفته شده است.

شیشه‌ساز [۷]، اثر کشش زمینه بر توزیع تنش در رشته و همچنین اثر گسیختگی زمینه بر ماده‌ی مرکب هیبریدی را بررسی نمود. شیشه‌ساز، توزیع تنش را در یک تک‌لایه‌ی مرکب هیبریدی با عرض محدود در دو حالت رشته کوتاه و رشته بلند و زمینه اطراف آن‌ها بررسی کرد. در این مرجع توزیع تنش در اطراف دو ترک که با فاصله از یکدیگر قرار گرفته‌اند، محاسبه شده است.

در همین زمان، بعضی نویسندگان، روش‌های عددی به‌خصوص روش تفاضل محدود را جهت درک رفتار دینامیکی مواد مرکب به‌کار بردند [۹-۱۰]. به نظر می‌رسد تنها کار انجام شده برای به‌دست آوردن توزیع تمرکز تنش گذرا در یک ماده‌ی مرکب، تحقیق هاچپس در مرجع [۱] است. در این کار تمرکز تنش گذرا برای تک‌لایه با ابعاد نامحدود تحت اثر حداکثر سه رشته‌ی شکسته شده، به کمک توابع مختلط، به‌دست آمده است. هاچپس با لاپلاس گیری نسبت به متغیر زمان از معادلات حرکت دینامیکی الیاف، روابطی شبیه به معادلات دیفرانسیلی استاتیکی به‌دست آورد و از حلی مشابه حالت استاتیکی برای حالت دینامیکی استفاده نمود. وی به علت پیچیدگی حل نتوانست معادلات را برای بیشتر از سه رشته‌ی شکسته شده حل نماید.

در کار حاضر، توزیع تنش گذرا در تک‌لایه‌ای هیبرید از لحظه‌ی شکست الیاف تا زمان رسیدن به حالت تعادل استاتیکی به‌دست آمده است. اثر اندازه ترک، و هیبریداسیون الیاف و نیز تاثیر ناشی از دینامیک شکست الیاف بر توزیع و ضریب تمرکز تنش در تک‌لایه هیبرید بررسی شده است.

## استخراج معادلات دیفرانسیل

ابعاد ماده مرکب مورد بررسی، محدود و بار اعمال شده در جهت الیاف در نظر گرفته می‌شود. فرض شده است الیاف همراستا و موازی بوده و بار کششی اعمال شده بر آن در راستای الیاف می‌باشد و ماتریس تنها بارهای برشی را تحمل می‌کند. این فرض برای بیشتر مواد مرکب با ماتریس ضعیف مناسب است.

برای نوشتن روابط، فرضیات اضافه زیر در نظر گرفته شده است:

- میان هر رشته و ماتریس‌های مجاور آن پیوند کامل برقرار است.
- رشته و ماتریس تا نقطه‌ی شکست دارای رفتار الاستیک خطی هستند.
- رشته و ماتریس همگن فرض می‌شوند.
- سطح مقطع الیاف به‌صورت مربع در نظر گرفته می‌شود، البته باید مساحت سطح مقطع، برابر با حالت دایره‌ای در نظر گرفته شود.

شکل۱، سطح مقطع الیاف را در تک‌لایه هیبرید نشان می‌دهد. برای نوشتن معادله‌ی حرکت در هر رشته، از نماد LM برای مشخص نمودن رشته با مدول کششی پایین‌تر و HM برای نمایش رشته با مدول کششی بالاتر استفاده می‌شود. $n$ شماره‌ی رشته، بدون در نظر گرفتن نوع آن است. برای مشخص کردن الیاف با مدول پایین‌تر، از علامت * استفاده می‌شود.

مقدار تنش عمودی برای رشته $n$ام با مدول پایین (LM) از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\sigma^*_n = E^*_f \varepsilon^*_n = E^*_f \frac{du^*_n}{dx} \qquad (۱)$$

با استفاده از رابطه‌ی فوق، نیروی اعمال شده بر هر رشته LM برابر است با:

$$p^*_n = E^*_f A^*_f \frac{du^*_n}{dx} \qquad (۲)$$

در جایی که $u^*_n$ و $p^*_n$ به ترتیب جابجایی و بار در رشته شماره‌ی $n$ و $E^*_f A^*_f$ سفتی کششی رشته LM است. تنش برشی در زمینه به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right) \qquad (۳)$$

که در آن G مدول برشی زمینه است. با این فرض که جابجایی عرضی زمینه (v) تابعی از $x$ نباشد، عبارت تنش برشی به‌صورت زیر است:

$$\tau_{xy} = G(\delta u / \delta y) = G\frac{du}{dy} \qquad (۴)$$

نمایش تفاضل محدود تنش برشی در زمینه بر حسب جابجایی الیاف بالا و پایین، و فاصله‌ی بین آن‌ها $(d)$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$(\tau_{xy})_{n+1,n} = G(\gamma_{xy})_{n+1,n} = G\frac{u_{n+1}-u^*_n}{d} \tag{5}$$

$$(\tau_{xy})_{n,n-1} = G(\gamma_{xy})_{n,n-1} = G\frac{u^*_n-u_{n-1}}{d} \tag{6}$$

با استفاده از فرضیه‌ی شیرلگ و با توجه به شکل۲ معادله‌ی حرکت برای $n$امین رشته LM به شرح زیر است.

$$\frac{\partial p^*_n}{\partial x}dx + \left\{(\tau_{xy})_{n+1,n} - (\tau_{xy})_{n,n-1}\right\}hdx = (\mathrm{m}^*.dx)\frac{\partial^2 u^*_n}{\partial^2 t} \tag{7}$$

در این رابطه $h$ضخامت تک‌لایه، $\mathrm{m}^*$ جرم بر واحد طول رشته‌ی LM و $\tau_{xy}$ تنش برشی بین رشته‌ی $n$ام و هر یک از الیاف کناری در تک‌لایه است. با جایگزینی روابط ۲، ۵ و ۶ در رابطه‌ی ۷، معادله حرکت برای الیاف LM به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$E^*_f A^*_f \frac{\partial^2 u_n}{\partial^2 x} + \frac{Gh}{d}(u_{n+1} - 2u^*_n + u_{n-1}) = m^*\frac{\partial^2 u^*_n}{\partial^2 t} \tag{8}$$

با طی نمودن روندی مشابه برای الیاف HM، معادله دیفرانسیل جابجایی برای این الیاف (به جز الیاف قرار گرفته در لبه‌های تک-لایه) به‌صورت زیر است:

$$E_f A_f \frac{\partial^2 u_n}{\partial^2 x} + \frac{Gh}{d}(u^*_n - 2u_n + u^*_{n-1}) = m\frac{\partial^2 u_n}{\partial^2 t} \tag{9}$$

تنش برشی در لبه‌های آزاد تک‌لایه برابر صفر است. به همین دلیل معادله‌ی تعادل برای الیاف قرار گرفته در لبه‌های تک‌لایه متفاوت است. ضمن احتساب این مطلب و با این فرض که الیاف HM در لبه‌های تک‌لایه قرار گرفته‌اند، معادله‌ی تعادل برای کل تک‌لایه به‌صورت ماتریسی برابر است با:

$$\boldsymbol{e}\boldsymbol{u}'' - \frac{Gh}{d}\boldsymbol{L}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{m}\ddot{\boldsymbol{u}} \tag{10}$$

در جایی که:

$$\boldsymbol{u}^T = [u_1, u^*_2, u_3, \dots, u_{N-2}, u^*_{N-1}, u_N] \tag{11}$$

$$\boldsymbol{u}''^T = [u''_1, u''^*_2, u''_3, \dots, u''_{N-2}, u''^*_{N-1}, u''_N] \tag{12}$$

$$\ddot{\boldsymbol{u}}^T = [\ddot{u}_1, \ddot{u}^*_2, \ddot{u}_3, \dots, \ddot{u}_{N-2}, \ddot{u}^*_{N-1}, \ddot{u}_N] \tag{13}$$

در این روابط N تعداد الیاف در تک‌لایه است. ماتریس‌های $\boldsymbol{L}$، $\boldsymbol{m}$ و $\boldsymbol{e}$ به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{(N\times N)} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m^* & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & m^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}_{(N\times N)} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} E_fA_f & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E^*_fA^*_f & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_fA_f & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & E_fA_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & E^*_fA^*_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & E_fA_f \end{bmatrix}_{(N\times N)} \tag{16}$$

ملاحظه می‌شود در صورتی‌که الیاف LM در لبه‌ها قرار گرفته باشند، می‌توان با جابجایی درایه‌های ماتریس‌های $\boldsymbol{m}$ و $\boldsymbol{e}$ معادله‌ی دیفرانسیل جابجایی الیاف را به‌دست آورد.

## شرایط اولیه و شرایط مرزی

همان‌طور که در شکل۳ ملاحظه می‌شود گسستگی الیاف در وسط تک‌لایه (x=0) رخ داده و ترک از رشته‌ی شماره‌ی $f$ام آغاز شده و شامل $r$ رشته گسسته شده می‌باشد.

شرایط اولیه، شرایط تک‌لایه در لحظه‌ی ایجاد ترک است. قبل از پاره شدن الیاف بار اعمال شده در امتداد طول هر رشته برابر با $p$ (بار کششی اعمال شده بر هر رشته‌ی چندلایه دور از ترک) است:

$$p_n(x,0) = p \tag{17}$$

شرط اولیه‌ی بعدی، مربوط به لحظه‌ی گسستن الیاف است. در این لحظه هر رشته در حالت سکون قرار داشته و سرعت لحظه‌ای آن برابر صفر است؛ به عبارت دیگر:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,0) = 0 \tag{18}$$

شرایط مرزی مربوط به زمان پس از گسسته شدن الیاف است. در این حالت در $x=0$ جابجایی در الیاف سالم و نیروی کششی

اعمال شده بر الیاف گسسته شده، برابر با صفر است. به عبارت دیگر:

$$u_n(0,t)=0 \qquad (n<f \quad or \quad n>r+f) \tag{19}$$

$$p_n(0,t)=0 \qquad (f\le n\le r+f) \tag{20}$$

همچنین بار کششی در تمام الیاف، دور از ترک به سمت بار کششی یکنواخت $p$ میل می‌کند. به قسمی که:

$$(p_n)_{x\to\infty}=p \tag{21}$$

## بی‌بعدسازی معادلات تعادل، شرایط اولیه و شرایط مرزی

معادلات تعادل به‌دست آمده با استفاده از پارامترهای $P_n^*$، $P_n$، $U_n$، $U_n^*$، $\xi$، $Q$ و $R$ بدون بعد می‌شوند:

$$P_n=\frac{p_n}{p} \tag{22}$$

$$P_n^*=\frac{p_n^*}{p} \tag{23}$$

$$U_n=\sqrt{\frac{E_fA_fGh}{p^2d}}\,u_n \tag{24}$$

$$U_n^*=\sqrt{\frac{E_fA_fGh}{p^2d}}\,u_n^* \tag{25}$$

$$\xi=\sqrt{\frac{Gh}{E_fA_fd}}\,x \tag{26}$$

$$\tau=\sqrt{\frac{Gh}{\mathrm{m}d}}\,t \tag{27}$$

$$Q=\frac{\mathrm{m}^*}{\mathrm{m}} \tag{28}$$

$$R=\frac{E_f^*A_f^*}{E_fA_f} \tag{29}$$

ضمن جایگزینی پارامترهای بدون بعد در معادلات تعادل، معادلات بی‌بعد تعادل به شرح زیر به‌دست می‌آیند:

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{U}''-\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{U}} \tag{30}$$

$$\boldsymbol{U}^T=[U_1,U_2^*,U_3,\ldots,U_{N-2},U_{N-1}^*,U_N] \tag{31}$$

$$\boldsymbol{U}''^T=[U_1'',U_2''^*,U_3'',\ldots,U_{N-2}'',U_{N-1}''^*,U_N''] \tag{32}$$

$$\ddot{\boldsymbol{U}}^T=[\ddot{U}_1,\ddot{U}_2^*,\ddot{U}_3,\ldots,\ddot{U}_{N-2},\ddot{U}_{N-1}^*,\ddot{U}_N] \tag{33}$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&\cdots&0&0&0&0\\0&Q&0&0&\cdots&0&0&0&0\\0&0&1&0&\cdots&0&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&0&1&0&0\\0&0&0&0&\cdots&0&0&Q&0\\0&0&0&0&\cdots&0&0&0&1\end{bmatrix}_{(N\times N)} \tag{34}$$

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&\cdots&0&0&0&0\\0&R&0&0&\cdots&0&0&0&0\\0&0&1&0&\cdots&0&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&0&1&0&0\\0&0&0&0&\cdots&0&0&R&0\\0&0&0&0&\cdots&0&0&0&1\end{bmatrix}_{(N\times N)} \tag{35}$$

شرایط اولیه بدون بعد (بدون در نظر گرفتن نوع الیاف) به شرح زیر می‌باشند:

$$\frac{\partial U_n}{\partial\tau}(\xi,0)=0 \tag{36}$$

$$P_n(\xi,0)=\frac{\partial U_n}{\partial\xi}(\xi,0)=1 \tag{37}$$

شرایط مرزی بدون بعد (بدون در نظر گرفتن نوع الیاف) به‌صورت زیر است:

$$U_n(0,\tau)=0 \qquad (n<f \quad or \quad n>f+r) \tag{38}$$

$$P_n(0,\tau)=\frac{\partial U_n}{\partial\xi}(0,\tau)=0 \qquad (f\le n\le f+r) \tag{39}$$

$$(P_n)_{\xi\to\infty}=1 \tag{40}$$

## حل معادلات دیفرانسیل

معادلات به‌دست آمده بیانگر دستگاه معادلات دیفرانسیلی تفاضلی مرتبه دوم با دو متغیر هستند. برای حل معادلات دیفرانسیل به‌دست آمده از روش تفاضل محدود صریح استفاده می‌شود. در ابتدا برای حل، طول الیاف، محدود و برابر L در نظر گرفته می‌شود.

به منظور به‌دست آوردن شکل تفاضل محدودی معادلات دیفرانسیل، مطابق شکل۴ هر رشته به قسمت‌های مساوی $\Delta\xi$ تقسیم می‌شود. به قسمی که:

$$L=S_z\Delta\xi \tag{41}$$

در جایی که $S_z$ تعداد تقسیمات رشته در جهت طول آن است. شماره‌ی هر قسمت $i$ نامیده می‌شود به قسمی که:

$$\xi = i\Delta\xi \qquad (۴۲)$$

همچنین هر مرحله‌ی زمانی بدون بعد، از لحظه‌ی پاره شدن الیاف با $j$ نمایش داده می‌شود. در هر مرحله، زمان یاد شده در قالب بدون بعد به شرح زیر به‌دست می‌آید:

$$\tau = j\Delta\tau \qquad (۴۳)$$

کل زمان منظور شده بعد از گسسته شدن الیاف ($\tau_{total}$) از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\tau_{total} = S_t\Delta\tau \qquad (۴۴)$$

در جایی که $S_t$ تعداد تقسیمات زمان بدون بعد می‌باشد. مشتق دوم مکانی بدون بعد در قالب تفاضل مرکزی حول نقطه‌ی $i$، به‌صورت زیر است:

$$\frac{\partial^۲ \bar{U}_n^{i,j}}{\partial\xi^۲} = \frac{\bar{U}_n^{i+۱,j} - ۲\bar{U}_n^{i,j} + \bar{U}_n^{i-۱,j}}{(\Delta\xi)^۲} \qquad (۴۵)$$

$\bar{U}_n^{i,j}$ بیانگر جابجایی رشته‌ی $n$ام (بدون در نظر گرفتن نوع آن) در نقطه‌ای به فاصله‌ی $\xi = i\Delta\xi$ از وسط رشته در زمان $\tau = j\Delta\tau$ پس از پاره شدن الیاف است. مشتق دوم زمانی بدون بعد را می‌توان در قالب تفاضل مرکزی حول نقطه‌ی $j$ به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial^۲ \bar{U}_n^{i,j}}{\partial\tau^۲} = \frac{\bar{U}_n^{i,j+۱} - ۲\bar{U}_n^{i,j} + \bar{U}_n^{i,j-۱}}{(\Delta\tau)^۲} \qquad (۴۶)$$

با استفاده از روابط ۳۰، ۴۵ و ۴۶، شکل تفاضل محدودی معادله‌ی دیفرانسیل جابجایی به شکل اندیسی به‌صورت زیر استخراج می‌شود:

$$\bar{U}_n^{i,j+1} = \frac{(\Delta\tau)^2}{\bar{M}_{n,n}}\sum_{k=1}^{N}\bar{L}_{n,k}\bar{U}_k^{i,j} - 2\left(1 - \frac{s\bar{E}_{n,n}}{\bar{M}_{n,n}}\right)\bar{U}_n^{i,j} + \frac{s\bar{E}_{n,n}}{\bar{M}_{n,n}}\bar{U}_n^{i+1,j} + \frac{s\bar{E}_{n,n}}{\bar{M}_{n,n}}\bar{U}_n^{i-1,j} - \bar{U}_n^{i,j-1} \quad , \quad s = \left(\frac{\Delta\tau}{\Delta\xi}\right)^2 \qquad (۴۷)$$

رابطه ۴۷، معادله‌ی جابجایی رشته‌ی $n$ام در فاصله‌ی بدون بعد $\xi = i\,(\Delta\xi)$، در مرحله‌ی زمانی بدون بعد $\tau = j(\Delta\tau)$ است.

ملاحظه می‌شود که برای شروع حل و به‌دست آوردن جابجایی در هر نقطه از الیاف در مرحله زمانی جدید ($\bar{U}_n^{i,j+1}$) از معادله‌ی ۴۷ مجهولاتی وجود دارد که می‌بایست به وسیله‌ی شرایط اولیه و مرزی به‌دست آیند؛ این مجهولات به شرح زیر می‌باشند:

-ابتدا این که وجود $U_n^{i,j-1}$ و $U_n^{i,j}$ در معادله مذکور نشان می‌دهد که جابجایی هر نقطه در هر رشته با جابجایی آن نقطه در دو مرحله زمانی گذشته مرتبط است. برای شروع حل، جابجایی نقاط مختلف الیاف در دو مرحله‌ی زمانی اول مشخص نبوده و باید با استفاده از شرایط اولیه، آن‌ها را محاسبه نمود.

- همچنین وجود عبارت $U_n^{i-۱,j}$، بیان‌گر این مطلب است که جابجایی هر نقطه در طول رشته به جابجایی نقطه‌ای قبل از آن بستگی دارد. این مطلب از آن‌رو مشکل‌ساز می‌گردد که در محل ایجاد ترک، جابجایی الیاف مشخص نبوده و باید با استفاده از شرایط مرزی به‌دست آید.

همان‌گونه که ذکر شد جابجایی الیاف در دو مرحله‌ی اول از شرایط اولیه به‌دست می‌آیند. مرحله‌ی اول پیش از گسسته شدن الیاف در نظر گرفته می‌شود. در این زمان همه‌ی الیاف سالم و نیروی کششی اعمال شده بر آنها یکسان بوده و شرط اولیه‌ی ۳۷ برقرار است. مشتق اول بیان شده در این رابطه در j=۱ در قالب تفاضل پیشرو به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P_n(\xi,۰) = \frac{\partial\bar{U}_n}{\partial\xi}(\xi,۰) = \frac{\bar{U}_n^{(i+۱,۱)} - \bar{U}_n^{(i,۱)}}{\Delta\xi} = ۱ \qquad (۴۸)$$

همچنین با این فرض که تک‌لایه متقارن بوده و جابجایی وسط الیاف برابر صفر است جابجایی همه‌ی نقاط الیاف در مرحله‌ی زمانی اول در j=۱ (وسط الیاف) به شرح زیر می‌باشد:

$$\bar{U}_n^{(۱,۱)} = ۰ \qquad (۴۹)$$

با ترکیب روابط ۴۸ و ۴۹، جابجایی در تمام قسمتهای الیاف در لحظه‌ی اول (j=۱) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\bar{U}_n^{(۲,۱)} = \Delta\xi \;,\; \bar{U}_n^{(۳,۱)} = ۲\Delta\xi \;,\; \ldots \;, \qquad \bar{U}_n^{(N,۱)} = (S_z - ۱)\Delta\xi \qquad ۱ \le n \le N \qquad (۵۰)$$

مرحله‌ی بعدی ($j$ =۲) لحظه‌ی گسسته شدن الیاف است. در این مرحله با استفاده از شرط اولیه‌ی ۳۶ و نوشتن سرعت به فرم تفاضل پیشرو، جابجایی نقاط مختلف هر رشته به‌دست می‌آید.

$$\frac{\partial\bar{U}_n}{\partial\tau}(\xi,\Delta\tau) = \frac{\bar{U}_n^{(i,۲)} - \bar{U}_n^{(i,۱)}}{\Delta\tau} = ۰ \qquad (۵۱)$$

در نتیجه جابجایی در مرحله‌ی دوم ($j$=2) که برابر با جابجایی در مرحله‌ی اول است به‌دست می‌آید.

$$\bar{U}_n^{(i,۲)} = \bar{U}_n^{(i,۱)} \qquad ۱ \le n \le N \;\;,\;\; ۱ \le i \le S_z \qquad (۵۲)$$

$\bar{U}_n^{i-۱,j}$ در i =۱ مقدار نداشته و در این نقطه عبارت $\bar{U}_n^{۰,j}$ ایجاد می‌شود. به همین دلیل $\bar{U}_n^{۰,j}$ به طریقی توسط شرایط مرزی به‌دست آید.

با توجه به رابطه‌ی ۳۸ ملاحظه می‌شود که در الیاف سالم

جابجایی الیاف در وسط تک‌لایه (در $\xi = ۰$) برابر صفر است به عبارت دیگر:

$$\bar{U}_n^{۰,j} = ۰ \qquad (۳ \le j) \quad \& \quad (n < f \quad or \quad n > f + r) \tag{۵۳}$$

برای تعیین جابجایی الیاف گسسته شده در میانه‌ی ماده‌ی مرکب (محل وقوع ترک) از شرط مرزی ۳۹ استفاده می‌شود. برای تبدیل مشتق اول در قالب تفاضل محدود، به جای استفاده از تفاضل پیشرو که خطای آن از مرتبه‌ی اول $(\Delta\xi)$ است از تفاضل مرکزی حول نقطه‌ی i =۱ استفاده می‌شود. در این صورت خطای به‌دست آمده از مرتبه‌ی $(\Delta\xi)^۲$ است:

$$P_n(۰,\tau) = \frac{\partial \bar{U}_n}{\partial \xi}(۰,\tau) = \frac{\bar{U}_n^{(۲,j)} - \bar{U}_n^{(۰,j)}}{۲\Delta\xi} = ۰ \qquad (۳ \le j) \quad \& \quad (f \le n \le f + r) \tag{۵۴}$$

در نتیجه ملاحظه می‌شود که برای الیاف گسسته شده، رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\bar{U}_n^{(۰,j)} = \bar{U}_n^{(۲,j)} \qquad (۳ \le j) \quad \& \quad (f \le n \le f + r) \tag{۵۵}$$

ضمن اعمال روابط ۵۳ و ۵۵ در معادله‌ی ۴۷، رابطه‌ی تفاضل محدودی بیان‌کننده‌ی جابجایی در $\xi_1 = \Delta\xi$ (در نزدیکی محل وقوع ترک) به شرح زیر حاصل می‌شود:

$$\bar{U}_n^{۱,j+۱} = \frac{(\Delta\tau)^۲}{\bar{M}_{nn,}} \sum_{k=۱}^{N} \bar{L}_{n,k} \bar{U}_k^{۱,j} - ۲\left(۱ - \frac{s\bar{E}_{n,n}}{\bar{M}_{n,n}}\right)\bar{U}_n^{۱,j} + \frac{s\bar{E}_{n,n}}{\bar{M}_{n,n}}\bar{U}_n^{۱,j} - \bar{U}_n^{۱,j-۱} \qquad (۳ \le j \le S_t) \quad \& \quad (n < f \quad or \quad n > f + r) \tag{۵۶}$$

$$\bar{U}_n^{۱,j+۱} = \frac{(\Delta\tau)^۲}{\bar{M}_{n,n}} \sum_{k=۱}^{N} \bar{L}_{n,k} \bar{U}_k^{۱,j} - ۲\left(۱ - \frac{s\bar{E}_{n,n}}{۲\bar{M}_{n,n}}\right)\bar{U}_n^{۱,j} + \frac{s\bar{E}_{n,n}}{\bar{M}_{n,n}}\bar{U}_n^{۲,j} - \bar{U}_n^{۱,j-۱} \qquad (۳ \le j \le S_t) \quad \& \quad (f \le n \le f + r - ۱) \tag{۵۷}$$

با داشتن جابجایی‌ها در دو مرحله‌ی زمانی اول ($j$=۲ و $j$=۱)، از روابط ۵۰ و ۵۱، از مرحله‌ی زمانی سوم ($j$=۳) به بعد، جابجایی نقاط مختلف الیاف تک‌لایه (به جز در وسط تک‌لایه) از رابطه‌ی ۴۷ و در وسط تک‌لایه (محل ایجاد ترک) از روابط ۵۶ و ۵۷ به‌دست می‌آید.

چون برای نوشتن شکل تفاضل محدودی مشتق مرتبه دوم از تبدیل تفاضل مرکزی استفاده شده پس خطای محاسبات از مرتبه‌ی $((\Delta\xi)^2 ,(\Delta\tau)^2)$ می‌باشد. از این‌رو با بیشتر نمودن تقسیمات، خطای محاسبات کاهش یافته و پاسخی نزدیک به پاسخ دقیق بدست می‌آید. در کار حاضر $\Delta\tau = .005$ و $\Delta\xi = .01$ در نظر گرفته می‌شود.

## محاسبه‌ی ضریب تمرکز تنش

تمرکز تنش، $K_r$، نسبت بار در اولین رشته‌ی سالم بعد از رشته‌ی پاره شده در محل ایجاد ترک، به بار در همان رشته در فاصله‌ای دور از محل وقوع ترک است. الیاف تحت کشش یکسان p قرار دارند. اندازه‌ی بی‌بعد بار، $P$، یک می‌باشد، از این رو تمرکز تنش همان عبارت بی‌بعد مربوط به کشش رشته در اولین رشته‌ی سالم بعد از رشته‌ی پاره شده است:

$$K_r = P_{(f+r+1)}(0,\tau) = \frac{\partial U_{(f+r+1)}}{\partial \xi}(0,\tau) = \frac{U_{(f+r+1)}^{(2,j)} - U_{(f+r+1)}^{(1,j)}}{\Delta\xi} \tag{۵۸}$$

حداکثر ضریب تمرکز تنش ایجاد شده در طول زمان بعد از گسسته شدن الیاف، ضریب تمرکز تنش دینامیکی ($K_d$) و نسبت آن به ضریب تمرکز تنش استاتیکی($K_{r(\tau=\infty)}$) ، فراجهش دینامیکی ($\eta_r$) خوانده می‌شود:

$$\eta_r = \frac{K_d}{K_{r(\tau=\infty)}} \tag{۵۹}$$

## نتایج

از آن‌جا که تحقیق حاضر، اولین کار ارائه شده در زمینه بررسی توزیع تنش گذرا در تک‌لایه هیبرید بوده و مرجعی برای مقایسه وجود ندارد، جهت تایید نتایج استخراج شده، نسبت مدول کششی و جرم بر واحد طول الیاف برابر یک قرار داده شده و نتایج تک‌لایه ساده با مرجع [۱] مقایسه می‌گردد. شکل۵، تاثیر افزایش الیاف گسسته شده بر نمودار ضریب تمرکز تنش گذرای نوک ترک متقارن در تک‌لایه ساده را نشان می‌دهد. تک‌لایه، دارای ۲۵ رشته بوده و تحت اثر ۱ تا ۸ رشته گسسته شده در میانه‌ی خود قرار می‌گیرد. ملاحظه می‌شود که با گذشت زمان، اندازه‌ی ضریب تمرکز تنش به سمت مقادیر استاتیکی ذکر شده در مرجع [۱] همگرا می‌گردد. همچنین نمودار ضریب تمرکز تنش گذرای به‌دست آمده تا ۳ رشته گسسته شده با نتایج به‌دست آمده در مرجع [۱] انطباق کامل دارد.

مقادیر ضریب تمرکز تنش استاتیکی و دینامیکی و فراجهش دینامیکی تا ۵ رشته گسسته شده در تک‌لایه ساده در جدول۱ ارائه شده است.

**جدول ۱. تاثیر افزایش الیاف گسسته شده بر نمودار ضریب تمرکز تنش گذرای نوک ترک متقارن در تک‌لایه‌ی ساده**

| r | $K_d$ | ( $K_{r(\tau=\infty}$ | $\eta_r$ |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۱/۵۳۳ | ۱/۳۳۳ | ۱/۱۵ |
| ۲ | ۱/۹۰۶ | ۱/۶۰۰ | ۱/۱۹ |
| ۳ | ۲/۱۹۵ | ۱/۸۲۹ | ۱/۲۰ |
| ۴ | ۲/۴۸۰ | ۲/۰۳۲ | ۱/۲۲ |
| ۵ | ۲/۷۲۲ | ۲/۲۱۶ | ۱/۲۳ |

به منظور بررسی تاثیر هیبریداسیون الیاف بر توزیع تنش، الیافی از جنس شیشه و گرافیت با مساحت سطح مقطع یکسان در نظر گرفته می‌شود که نسبت مدول کشسانی و جرم بر واحد طول آن‌ها به ترتیب R =۰/۳۳ و Q =۱/۸۲ است (جدول ۲).

**جدول ۲. خواص الیاف موجود در تک‌لایه‌ی هیبرید**

| ماده | $E_f$ (GPa) | $\rho$ ($kg/m^3$) |
|---|---|---|
| گرافیت | ۱۳/۸ | ۲۵۰ |
| شیشه | ۲۴/۴ | ۸۶ |

در شکل۶ تاثیر افزایش الیاف گسسته شده بر نمودار ضریب تمرکز تنش گذرا در نوک ترک به قسمی به‌دست آمده است که الیاف سالم قرار گرفته در نوک ترک از نوع LM (الیاف شیشه) باشند. نتایج، افزایش مقدار ضریب تمرکز تنش دینامیکی و فراجهش دینامیکی نسبت به تک‌لایه ساده را نشان می‌دهند.

در حالت بعدی ترک به گونه‌ای منظور می‌گردد که الیاف سالم قرار گرفته در نوک ترک، HM (الیاف گرافیت) باشند. شکل۷، تاثیر افزایش الیاف گسسته شده بر نمودار ضریب تمرکز تنش بر حسب زمان را در این حالت نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود ضریب تمرکز تنش دینامیکی و فراجهش دینامیکی نسبت به تک‌لایه ساده کاهش می‌یابد.

در جدول۳، اندازه ضریب تمرکز تنش دینامیکی و فراجهش دینامیکی بین تک‌لایه‌های ساده و هیبرید تحت ترک، مقایسه گردیده است.

**جدول ۳. مقایسه‌ی ضریب تمرکز تنش دینامیکی و فراجهش دینامیکی بین تک‌لایه ساده و هیبرید**

| r | تک‌لایه ساده | | تک‌لایه هیبرید (رشته‌ی سالم LM در نوک ترک) | | تک‌لایه هیبرید (رشته‌ی سالم HM در نوک ترک) | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $K_d$ | $\eta_r$ | $K_d$ | $\eta_r$ | $K_d$ | $\eta_r$ |
| ۱ | ۱/۵۳۳ | ۱/۱۵ | ۲/۱۶۲ | ۱/۲۱ | ۱/۲۲۴ | ۱/۰۷۸ |
| ۳ | ۲/۱۹۵ | ۱/۲۰ | ۳/۲۰ | ۱/۲۳ | ۱/۸۰ | ۱/۱۲۵ |
| ۵ | ۲/۷۲۲ | ۱/۲۳ | ۳/۸۷ | ۱/۲۵ | ۲/۲۳۶ | ۱/۱۴۶ |

معادلات دیفرانسیل جابجایی الیاف به صورت بدون بعد استخراج گردیده و پارامترهای موثر بر نمودار ضریب تمرکز تنش گذرا، نسبت جرم بر واحد طول و نسبت مدول کشسانی دو نوع رشته می‌باشند. در شکل۸ تاثیر افزایش نسبت جرم بر واحد طول الیاف (Q) بر نمودار ضریب تمرکز تنش گذرا در نوک ترکی با ۳ رشته‌ی گسسته شده با این فرض به دست آمده است که مدول کششی و سطح مقطع الیاف دو نوع رشته در تک‌لایه هیبرید با یکدیگر یکسان باشد (R=1). رشته‌ی گسسته شده نوک ترک، رشته با جرم واحد طول بالاتر می‌باشد. ملاحظه می گردد که با بیشتر شدن اندازه Q علاوه بر افزایشی که در اندازه تمرکز تنش دینامیکی رخ می‌دهد زمان رسیدن نمودار ضریب تمرکز به حداکثر مقدار خود، بیشتر می‌شود.

تاثیر تغییر نسبت مدول کشسانی دو نوع رشته (R) بر نمودار ضریب تمرکز تنش گذرا در نوک ترکی با ۳ رشته‌ی گسسته شده در شکل ۹ با این فرض به دست آمده است که نسبت جرم بر واحد طول الیاف در تک‌لایه هیبرید با یکدیگر یکسان باشد (Q=1). رشته‌ی گسسته شده نوک ترک، رشته با مدول کشسانی بالاتر است. ملاحظه می‌شود با کوچک‌تر شدن این نسبت، اندازه ضریب تمرکز تنش دینامیکی افزایش قابل ملاحظه‌ای می‌یابد.

## نتیجه‌گیری

براساس نتایج به‌دست آمده می‌توان دریافت که:

۱. اگر رشته‌ی سالم قرار گرفته در نوک ترک در تک‌لایه هیبرید، LM باشد اندازه ضریب تمرکز تنش دینامیکی نسبت به تک‌لایه‌ی ساده به میزان قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد. برای مثال این افزایش برای ترکی با ۵ رشته گسسته شده به میزان ۴۲٪ می‌باشد.

۲. چنان‌چه رشته‌ی سالم قرار گرفته در نوک ترک در تک‌لایه هیبرید از نوع HM باشد تمرکز تنش دینامیکی نسبت به حالت ساده کاهش می‌یابد. این کاهش برای ترکی با ۵ رشته‌ی گسسته شده در حدود ۱۸٪ می‌باشد.

۳. افزایش نسبت جرم بر واحد طول رشته‌ی گسسته شده در نوک ترک (در صورت ثابت ماندن نسبت مدول کشسانی دو نوع رشته) باعث افزایش ضریب تمرکز تنش دینامیکی و تاخیر در رسیدن نمودار ضریب تمرکز تنش به حداکثر مقدار خود می‌شود.

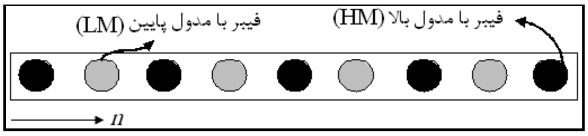
۴. افزایش مدول کشسانی رشته‌ی گسسته شده در نوک ترک (در صورت ثابت ماندن نسبت جرم بر واحد طول دو نوع رشته) باعث افزایش قابل ملاحظه ضریب تمرکز تنش دینامیکی در نوک ترک می گردد.

۵. با مقایسه رفتار تک‌لایه ساده و هیبرید این نتیجه مهم دریافت می‌شود که هیبریداسیون الیاف به طور کلی پاسخ دینامیکی تمرکز تنش را نامنظم‌تر نموده و زمان رسیدن الیاف گسسته شده به حالت

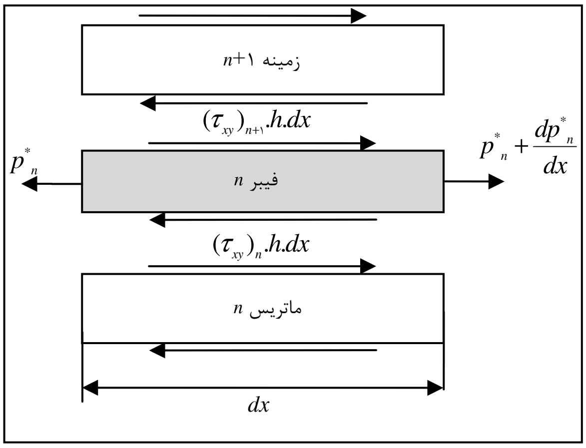
تعادل استاتیکی را افزایش می‌دهد. این روند با افزایش الیاف گسسته شده تشدید می‌گردد.

۶. از مقادیر به دست آمده برای فراجهش دینامیکی ملاحظه می‌شود که اثر دینامیکی شکست الیاف بر تمرکز تنش قابل ملاحظه است (در هر دو حالت ساده و هیبرید). با افزایش تعداد الیاف گسسته شده اندازه فراجهش دینامیکی نیز افزایش می‌یابد.

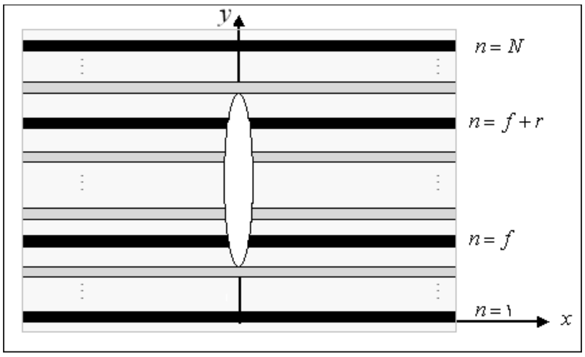
## شکل‌ها و نمودارها



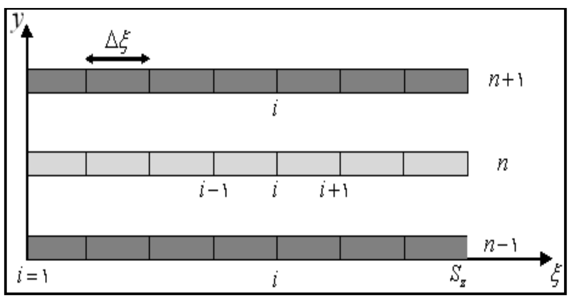

شکل ۱. سطح مقطع الیاف در تک‌لایه هیبرید



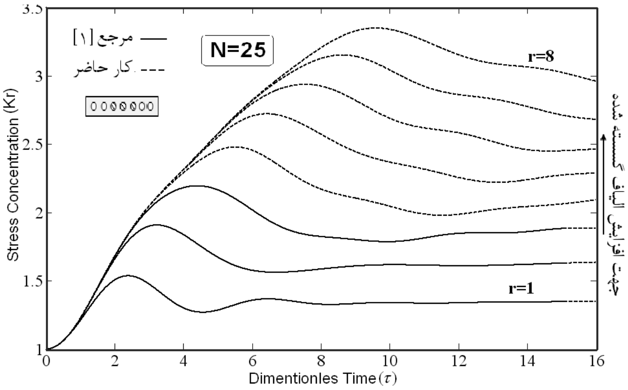

شکل ۲. نیروهای اعمال شده به رشته‌ی $n$ام و زمینه‌های مجاور آن



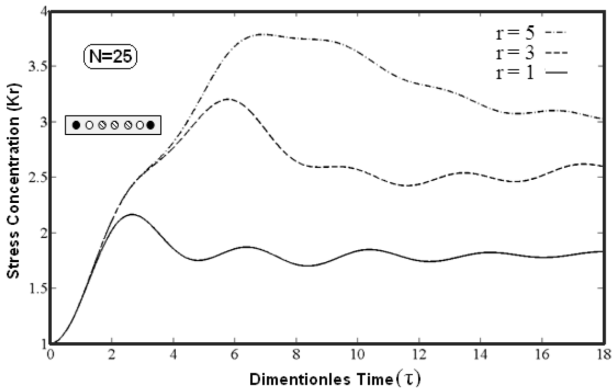

شکل ۳. نمایش تک‌لایه تحت ترک (نمای بالا)



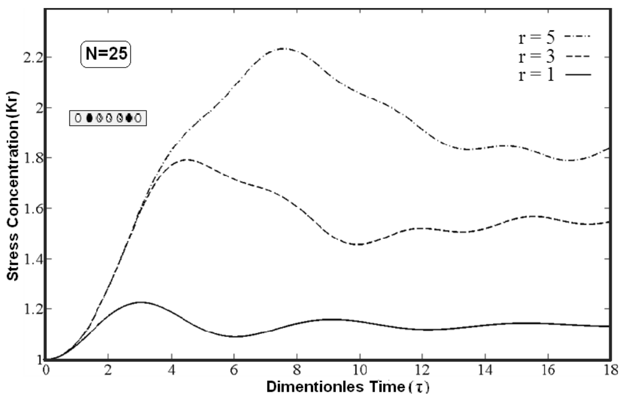

شکل ۴. تقسیم‌بندی الیاف در تک‌لایه‌ی هیبریدی به منظور تعیین میدان جابجایی و بار از روش تفاضل محدود



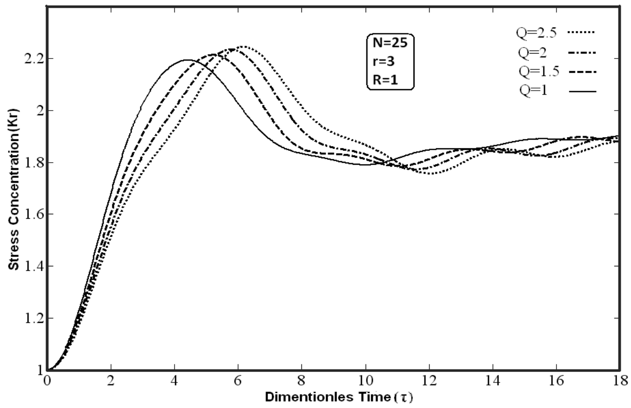

شکل ۵. تاثیر افزایش الیاف گسسته شده بر نمودار ضریب تمرکز تنش گذرای نوک ترک متقارن در تک‌لایه‌ی ساده



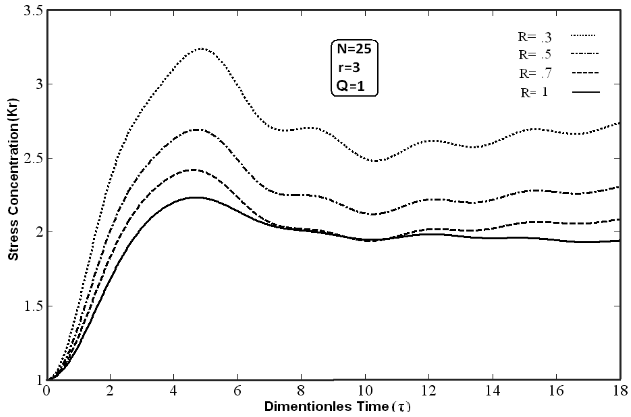

شکل ۶. تاثیر افزایش الیاف گسسته شده بر نمودار ضریب تمرکز تنش گذرای نوک ترک متقارن در تک‌لایه‌ی هیبرید (رشته‌ی سالم LM در نوک ترک)




شکل ۷. تاثیر افزایش الیاف گسسته شده بر نمودار ضریب تمرکز تنش گذرای نوک ترک متقارن در تک‌لایه‌ی هیبرید (رشته‌ی سالم HM در نوک ترک)




شکل ۸ . تاثیر افزایش نسبت جرم بر واحد طول الیاف موجود در تک‌لایه بر ضریب تمرکز تنش گذرا در نوک ترک (با فرض یکسان بودن مدول کشسانی دو نوع رشته)




شکل ۹. تاثیر تغییر نسبت مدول کشسانی الیاف موجود در تک‌لایه بر ضریب تمرکز تنش گذرا در نوک ترک (با فرض یکسان بودن جرم بر واحد طول دو نوع رشته)

## پی‌نوشت

1. Fiber
2. Hedgpeth
3. Shear lag
4. Matrix
5. Zender
6. Deaton
7. Van Dyke
8. Fukuda
9. Chou
10. Landis
11. McMeeking

## مراجع


1. Hedgepeth, J.M.,Stress concentration in a filamentary structure, NASA TND – 882, May 1961.
2. Zender, G. W., Deaton, J. W., Stress of Filamentary Sheets with one or more Fiber Brocken, NASA TND – 1609, 1963.
3. Hedgepeth, J.M., Van Dyke, P., Local Stress Concentration in imperfect Filamentary Composite Materials, *Journal of Composit Material*, Vol. 1, pp. 294-309, 1967.
4. Fukuda, H., Chou, T. W., Stress Concentration in a Hybrid Composite Sheet, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, pp. 845-848, 1983
5. Landis, C. M., McGlockton, M. A., McMeeking, R. M., An Improved Shear Lag Model for Broken Fibers in Composite Materials, *Journal of Composit Material*, Vol. 33, pp. 667-680, 1999.
6. Landis, C. M., McMeeking, R. M., A Shear Lag Model for a Broken Fiber Embedded in a Composite with a Ductile Matrix, *Composite Science and Technology*, Vol. 59, pp. 447-457, 1999.
7. Shishesaz, M. , The Effect of Matrix Extension on Fiber Stresses And Matrix Debonding in a Hybrid Composite Monolayer, *Iranian Journal of Science and Technology,* Vol. 25, 2001.
8. Shishesaz M., The Effect of Matrix Plasticity and Duplicate Cuts on Stress Distribution in Short and Long Fibers of a Hybrid Composite Lamina, *Iranian Journal of Science and Technology*, Vol. 25, 2005.
9. Shokrieh,, M. M., Karamnejad., A., “Dynamic Response of Strain Rate Dependent Glass/Epoxy Composite Beams Using Finite Difference Method”, *Journal of Mechanical, Industrial and Aerospace Engineering,* p.p. 50-56, 2010.
10. Larom, D., Herakovich., C.T., Aboudi, J., “Dynamic response of pulse loaded laminated composite cylinders”, *International Journal of Impact Engineering*, p.p. 233-248, 1991.